Opgaver i andengradspolynomier 2

Sætning 2 (Andengradsligninger)

Andengradsligningen $a\cdot x^2+b\cdot x+c=0$ har 0, 1 eller 2 reelle løsninger afhængigt af diskriminanten $d=b^2-4\cdot a\cdot c$:

a) $d<0$: Ingen reelle løsninger.

b) $d=0$: Én reel løsning: $x=-\dfrac{b}{2a}$.

c) $d>0$: To reelle løsninger:

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{d}}{2a},\quad x_2=\frac{-b+\sqrt{d}}{2a}$$

Eksempel 1

Bestem løsningerne til andengradsligningen $x^2-6x+8=0$.

Løsning:

Vi har: $a=1,\ b=-6,\ c=8$. Diskriminanten er:

$$d=b^2-4\cdot a\cdot c=(-6)^2-4\cdot 1\cdot 8=36-32=4.$$

Da $d>0$ er der to løsninger:

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{d}}{2a}=\frac{-(-6)-\sqrt{4}}{2\cdot 1}=\frac{6-2}{2}=\frac{4}{2}=2$$

$$x_2=\frac{-b+\sqrt{d}}{2a}=\frac{-(-6)+\sqrt{4}}{2\cdot 1}=\frac{6+2}{2}=\frac{8}{2}=4$$

Der er altså to løsninger 2 og 4. Dette kan kontrolleres ved indsættelse.

□

Eksempel 2

Bestem løsningerne til andengradsligningen $x^2-2x+3=0$.

Løsning:

Vi har: $a=1,\ b=-2,\ c=3$. Diskriminanten er:

$$d=b^2-4\cdot a\cdot c=(-2)^2-4\cdot 1\cdot 3=4-12=-8.$$

Da $d<0$ er der ingen reelle løsninger.

□

Eksempel 3

Bestem løsningerne til andengradsligningen $-\frac{1}{2}x^2-6x-18=0$.

Løsning:

Vi har: $a=-\frac{1}{2}$, $b=-6$, $c=-18$. Diskriminanten er:

$$d = b^2-4\cdot a\cdot c = (-6)^2-4\cdot(-\tfrac{1}{2})\cdot(-18) = 36-36 = 0.$$

Da $d=0$ er der netop én løsning:

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-6}{2\cdot(-\frac{1}{2})} = -\frac{6}{1} = -6$$

□

Bemærkning 4

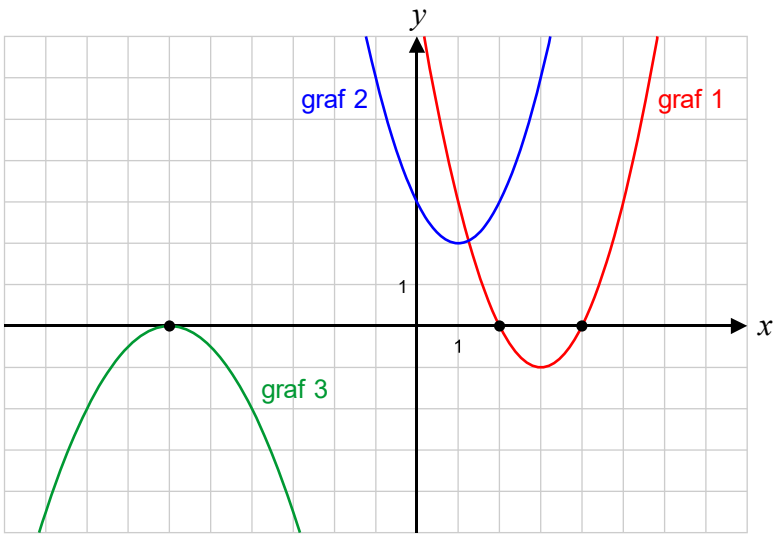
Lad $f(x)=a\cdot x^2+b\cdot x+c$. At løse andengradsligningen $a\cdot x^2+b\cdot x+c=0$ er det samme som at løse ligningen $f(x)=0$. Løsningerne til andengradsligningen er derfor netop nulpunkterne for funktionen *f*. For polynomier kaldes nulpunkterne også for *rødderne*. Geometrisk betyder det, at løsningerne er grafens skæringspunkter med *x*-aksen. Hvis andengradsligningen ikke har nogen reelle løsninger, har grafen ingen skæringspunkter med *x*-aksen. Grafen ligger derfor enten helt over eller helt under *x*-aksen.

$d>0 \Leftrightarrow$ grafen skærer *x*-aksen i to punkter

$d=0 \Leftrightarrow$ grafen tangerer *x*-aksen i netop ét punkt

$d<0 \Leftrightarrow$ grafen skærer *ikke* *x*-aksen

De tre tilfælde i bemærkning 4 er eksemplificeret i eksemplerne ovenfor. På graferne vist nedenfor ses det, hvordan antallet af løsninger svarer til antallet af skæringspunkter med *x*-aksen.



Opgave 1

Besvar for hver af nedenstående andengradsligninger følgende spørgsmål:

a) Angiv værdierne for koefficienterne a, b og c.
b) Bestem diskriminanten d.
c) Hvor mange løsninger har andengradsligningen?
d) Beregn løsningerne, hvis der er nogen.

$x^2 - 9x + 18 = 0$

$x^2 - 4x + 8 = 0$

$\frac{1}{2}x^2 + 6x + 18 = 0$

$-x^2-2x+3=0$

Opgave 2

Benyt GeoGebra til at tegne graferne for de fire andengradspolynomier, som svarer til venstresiderne i andengradsligningerne i opgave 1. Altså tegn graferne for:

$$f_1(x)=x^2-9x+18$$

$$f_2(x)=x^2-4x+8$$

$$f_3(x)=\tfrac{1}{2}x^2+6x+18$$

$$f_4(x)=-x^2-2x+3$$

a) Kan du sige god for pointen i bemærkning 4 om, at løsningerne til andengradsligningen netop er x-koordinaterne for de punkter, hvor grafen for det tilhørende andengradspolynomium skærer x-aksen?

b) Hvad kan du sige om tilfældet, hvor andengradspolynomiet slet ikke skærer x-aksen?

Opgave 3 (Simple andengradsligninger)

Der er tilfælde, hvor andengradsligninger er særligt lette at løse, og hvor man ikke behøver at benytte sætning 2. Det er, hvis $b=0$ eller $c=0$, eller begge er 0. Lad os se på to tilfælde, hvor $b=0$ og to tilfælde, hvor $c=0$:

1) $x^2-9=0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2=9 \quad \Leftrightarrow \quad x=3 \ \vee \ x=-3$

2) $2x^2+16=0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2=-16 \quad \Leftrightarrow \quad x^2=-8$.
Ingen reelle løsninger, da x^2 aldrig kan blive negativ.

3) $x^2-4x=0 \quad \Leftrightarrow \quad x(x-4)=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=0 \ \vee \ x-4=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=0 \ \vee \ x=4$

4) $5x^2+10x=0 \quad \Leftrightarrow \quad 5x\cdot(x+2)=0 \Leftrightarrow 5x=0 \ \vee \ x+2=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=0 \ \vee \ x=-2$

Hvis $b=0$: Idéen er at isolere x^2, så man får en ligning på formen $x^2=k$. Hvis $k>0$, er der to løsninger, nemlig $x=\sqrt{k} \ \vee \ x=-\sqrt{k}$. Hvis $k=0$, er der netop én løsning, nemlig $x=0$. Hvis derimod $k<0$, er der ingen reelle løsninger.

Hvis $c=0$: Man *faktoriserer* ved at sætte så meget uden for parentes som muligt. Da c er lig med 0, kan mindst x sættes uden for parentes. Derefter benyttes *nulreglen*.

NB! Hvis b og c begge er forskellige fra 0, kan man ikke anvende de to ovenstående genveje. Man kan da anvende formlerne i sætning 2. Formlerne i sætning 2 kan i øvrigt anvendes i alle tilfælde.

Løs nedenstående ligninger:

$x^2-16=0$	$x^2-10x=0$
$2x^2+70=0$	$4x^2-8x=0$