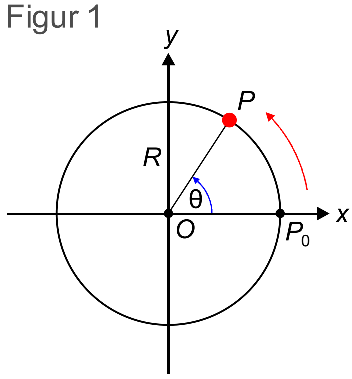
Vektorfunktioner – et projekt

I dette lille projekt skal vi se, hvordan vektorfunktioner kan benyttes til at beskrive forskellige bevægelser. Overalt i dette projekt regnes vinkler i radianer.

Opgave 1 (Jævn cirkelbevægelse)

Betragt figur 1 til højre. Vi har givet en cirkel med radius R og centrum i $(0,0)$. Et punkt P befinder sig på cirklen og er specificeret ved en vinkel θ, som er vinklen fra vektoren $\overrightarrow{OP_0}$ til vektoren $\overrightarrow{OP}$. Bemærk, at vinkler regnes positive i positiv omløbsretning (mod uret) og negative i negativ omløbsretning.

Figur 1



a) Benyt definitionen af cosinus og sinus på en enhedscirkel til at redegøre for, hvorfor koordinaterne for P er givet ved $\left(R\cdot\cos(\theta),\, R\cdot\sin(\theta)\right)$.

Hvis vi vil have punktet P til at løbe rundt på cirklen, så skal vi have vinklen θ til at afhænge af tiden *t*. Vi kunne skrive vinklen som en funktion af *t*, for eksempel $\theta(t)$. Nu ønsker vi at studere en *jævn cirkelbevægelse*. Betegnelsen "jævn" hentyder her til, at vinklen ændrer sig jævnt. Man indfører typisk en såkaldt *vinkelhastighed* ω, som her skal være et fast tal. Hvis man regner tiden i sekunder, får vinkelhastigheden enheden s^{-1}. En vinkelhastighed på 0,32 s^{-1} betyder, at $\overrightarrow{OP}$ overstryger en vinkel på 0,32 (radianer) i løbet af et sekund. Radianer er sat i parentes, for det er ikke nogen enhed. Man må godt bare skrive 0,32. Vi kan sætte $\theta(t) = \omega\cdot t$, hvis punktet starter i punktet P_0 til $t=0$. En jævn cirkelbevægelse startende i punktet P_0 kan altså beskrives ved parameterfremstillingen:

(1)
$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} R\cdot\cos(\omega\cdot t) \\ R\cdot\sin(\omega\cdot t) \end{pmatrix}$$

b) Bestem et udtryk for *hastigheden* $\vec{v}(t) = \vec{r}\,'(t)$.

c) Bestem et udtryk for *farten* $v(t) = |\vec{v}(t)|$. Sørg for at simplificere udtrykket. Brug gerne CAS-værktøj. Du skulle gerne få følgende: $v(t) = \omega\cdot R$, altså en konstant.

d) Bestem et udtryk for *accelerationen* $\vec{a}(t) = \vec{v}\,'(t) = \vec{r}\,''(t)$.

e) Bestem et udtryk for størrelsen $a(t) = |\vec{a}(t)|$ af accelerationen. Husk igen at simplificere. Du skulle meget gerne få $a(t) = \omega^2\cdot R$, igen en konstant.

f) Benyt resultaterne i c) og e) til at vise, at $a = v^2/R$, hvor vi undertrykker tiden *t* vi formlerne for hastigheden og accelerationen.

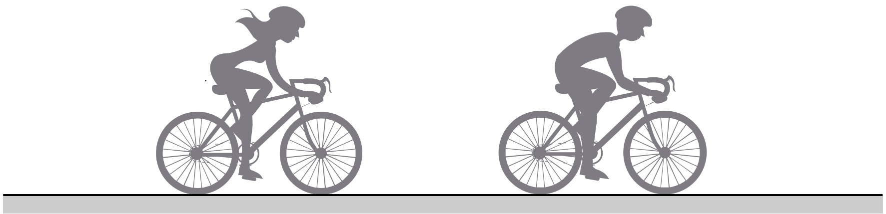
g) Vis, at accelerationsvektoren er *modsat rettet* stedvektoren.

Bemærkning 1

Resultaterne i c) – g) er nogle, man bruger meget i fysik A, hvor jævn cirkelbevægelse er vigtig. Resultatet i g) betyder ifølge Newton's 2. lov, at den resulterende kraft på partiklen er en *centripetalkraft*, dvs. en kraft rettet ind mod centrum i cirklen.

Opgave 2 (En cykloide)

I denne opgave er det vores idé at studere bevægelsen af et punkt P anbragt på cirkelperiferien af et cykelhjul, mens cyklen bevæger sig fremad med konstant fart v_0 på et vandret underlag. Spørgsmålet er hvilken banekurve dette punkt gennemløber og med hvilken hastighed og fart.



Det viser sig, at P's bevægelse kan beskrives ved nedenstående parameterfremstilling, når x-aksen anbringes langs vejen og y-aksen vinkelret derpå således, at P til tiden $t=0$ befinder sig i origo, altså $(0,0)$.

(2) $$\vec{r}(t)=\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = R\cdot\begin{pmatrix} \omega\cdot t-\sin(\omega\cdot t) \\ 1-\cos(\omega\cdot t) \end{pmatrix}, \quad \text{hvor } v_0=\omega\cdot R$$

hvor ω er vinkelhastigheden i hjulet. Parameterfremstillingen vil blive udledt til slut i denne opgave. Foreløbigt kan du begynde at løse opgaverne herunder.

a) Lad $R=0{,}7$ og $v_0=5$. Benyt formlen $v_0=R\cdot\omega$ til at bestemme vinkelhastigheden ω i bevægelsen. Afbild derefter banekurven for vektorfunktionen (2) for $0\le t\le 3$.

b) Bestem et udtryk for *hastigheden* $\vec{v}(t)=\vec{r}\,'(t)$.

c) Bestem et udtryk for *farten* $v(t)=|\vec{v}(t)|$.

d) Bestem det første tidspunkt efter start, hvor punktet P rører jorden. Det svarer til ét omløb.

e) Omløbstiden fås af formlen $T=2\pi/\omega$ (Overvej!). Udregn T ved hjælp af formlen.

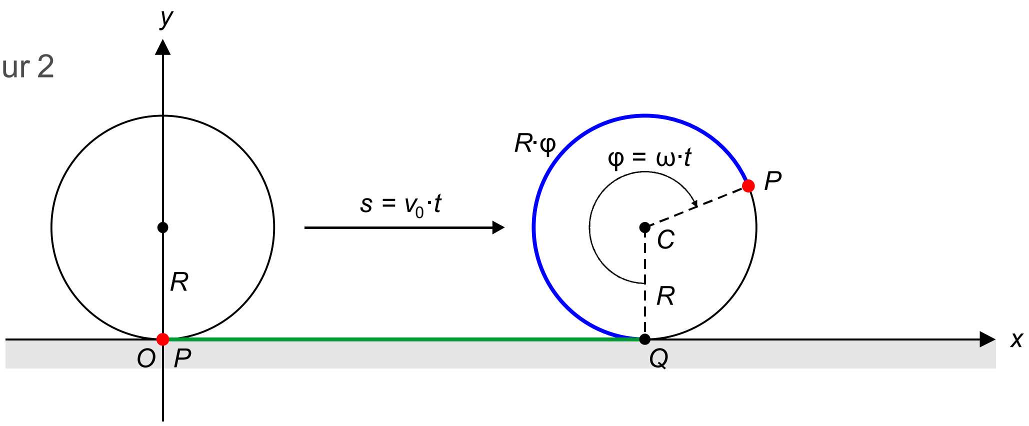
f) Vis, at punktet P har fart 0 til tidspunktet T. Hvordan ser banekurven ud omkring dette tidspunkt?

g) (Svær) Forsøg at forstå udledningen af parameterfremstillingen på næste side.

Udledning af parameterfremstilling

På figur 2 herunder er hjulet afbildet til tidspunkt $t = 0$ til venstre. Vi ser, at punktet P befinder sig i (0,0). Tiden t senere, er hjulet i den position, som er vist til højre på figur 2. Centrum C af cirklen har bevæget sig stykket $s = v_0 \cdot t$. Da vi antager, at der foregår *ren rulning* (ingen glidning), vil cirkelbuen QP, som er tegnet blå på figuren, have samme længde som linjestykket OQ, som er markeret med grøn farve. Vinklen φ kan skrives som $\varphi = \omega \cdot t$, hvor ω er den konstante vinkelhastighed for hjulet. Havde cirklen haft radius 1, ville længden af den blå cirkelbue have været lig med φ, pr. definition af begrebet radiantal. Nu er radius imidlertid R, så vi ganger blot med R og får, at længden af den blå cirkelbue er lig med $R \cdot \varphi$. Når længden af det grønne stykke, $s = v_0 \cdot t$, sættes lig med længden af den blå cirkelbue, får vi endeligt, at $v_0 \cdot t = R \cdot \varphi = R \cdot \omega \cdot t$, dvs. $v_0 = R \cdot \omega$. Dermed har vi sammenhængen mellem hjulets fart fremad og hjulets vinkelhastighed.

Figur 2



For at udlede en parameterfremstilling for punktet P's bevægelse, observerer vi, at bevægelsen kan opfattes som sammensat af en parallelforskydning (translation) mod højre og en roterende bevægelse. Formlen for en jævn cirkelbevægelse har vi allerede udledt i opgave 1a). Her regnede vi dog vinklen θ fra den positive del af x-aksen i positiv omløbsretning, mens vinklen φ regnes fra punktet Q i modsat omløbsretning. Vi ser, at sammenhængen mellem de to vinkler er $\theta = \frac{3}{2}\pi - \varphi$. Hvis vi indsætter dette udtryk for θ i formlen fra opgave 1a), får vi:

(3) $$\overrightarrow{CP} = \begin{pmatrix} R \cdot \cos(\theta) \\ R \cdot \sin(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \cdot \cos(\frac{3}{2}\pi - \varphi) \\ R \cdot \sin(\frac{3}{2}\pi - \varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -R \cdot \sin(\varphi) \\ -R \cdot \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

Herefter mangler vi blot at bruge indskudsreglen:

(4)

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CP} = \begin{pmatrix} R \cdot \varphi \\ R \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -R \cdot \sin(\varphi) \\ -R \cdot \cos(\varphi) \end{pmatrix} = R \cdot \begin{pmatrix} \varphi - \sin(\varphi) \\ 1 - \cos(\varphi) \end{pmatrix} = R \cdot \begin{pmatrix} \omega \cdot t - \sin(\omega \cdot t) \\ 1 - \cos(\omega \cdot t) \end{pmatrix}$$

hvor vi har sat R udenfor. Det ønskede er dermed vist.

□

Bemærkning 2

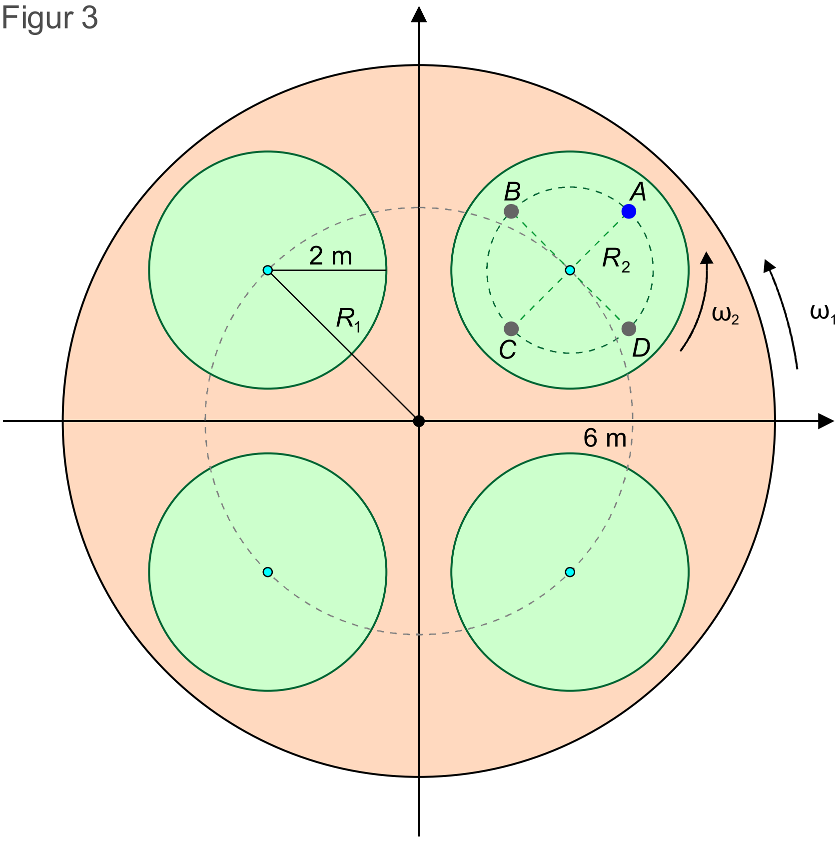
Egenskaben i spørgsmål f) kan oversættes til, at punktet P "lægges" ned på jorden med 0 fart! Det er netop succesen for hjulet i forhold til andre former for bevægelse. En slæde, som bevæger sig hen ad et vandret underlag, vil derimod blive udsat for *gnidning* på grund af, at én flade bevæger sig i forhold til en anden, mens de er i kontakt. Ideelt set er der intet tab ved et hjuls bevægelse. I praksis er der dog en lille *rullemodstand*, som skyldes, at hjulet deformeres en lille smule i berøring med jorden.

Opgave 3 (Forlystelse)

I en forlystelsespark har man konstrueret en forlystelse bestående af en roterende cirkelskive, hvorpå der roterer fire mindre cirkelskiver. På hver af de små cirkelskiver er anbragt fire sæder til hver én person. Spørgsmålet er, hvilken kurve en person i et sæde vil opleve, når forlystelsen kører? Betragt i det følgende figur 3 nedenfor. Den store skive har radius 6 meter og roterer med vinkelhastigheden ω_1, regnet positiv i positiv omløbsretning. Hver af de små cirkelskiver har centrum på en cirkel (stiplet på figur), som er koncentrisk med den store cirkel, og som har radius $R_1 = 3{,}6\text{ meter}$. Til tiden $t = 0$ er centrene anbragt på radier med vinklerne $\pi/2$, $3\pi/2$, $5\pi/2$ og $7\pi/2$ i koordinatsystemet. Hver af de små cirkelskiver har radius 2 meter. På hver af de små cirkelskiver er sæderne anbragt på en koncentrisk cirkel med radius $R_2 = 1{,}4\text{ meter}$.

Til tiden $t = 0$ er sæderne anbragt på radier med vinklerne $\pi/2$, $3\pi/2$, $5\pi/2$ og $7\pi/2$ i forhold til centrum på den pågældende cirkelskive – regnet i forhold til koordinatsystemets x-akse. De små cirkelskiver roterer med en vinkelhastighed på ω_2, igen regnet positiv i positiv omløbsretning.

Figur 3



I det følgende vil vi regne på bevægelsen af det blå punkt A, når forlystelsen roterer. Det oplyses, at dette punkts bevægelse kan beskrives ved parameterfremstillingen:

(5) $$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} R_1 \cdot \cos(\omega_1 \cdot t + \frac{\pi}{4}) + R_2 \cdot \cos(\omega_2 \cdot t + \frac{\pi}{4}) \\ R_1 \cdot \sin(\omega_1 \cdot t + \frac{\pi}{4}) + R_2 \cdot \sin(\omega_2 \cdot t + \frac{\pi}{4}) \end{pmatrix}$$

Vi vil undersøge bevægelsen for følgende størrelser:

$$R_1 = 3{,}6 \quad R_2 = 1{,}4 \quad \omega_1 = 0{,}75 \quad \omega_2 = \text{-}1{,}25$$

Bemærk, at vinkelhastigheden regnes negativ, når rotationen er i negativ omløbsretning. Benyt dit CAS-værktøj til at løse:

a) Tegn banekurven for punktet A's bevægelse i tidsrummet $0 \le t \le 28$.

b) Bestem udtryk for *hastigheden* $\vec{v}(t)$ og farten $v(t)$.

c) Bestem udtryk for *accelerationen* $\vec{a}(t)$ og dens størrelse $a(t) = |\vec{a}(t)|$.

d) Tegn graferne for farten og accelerationens størrelse som funktion af tiden i hvert deres koordinatsystem.

e) Undersøg hvor i bevægelsen farten og accelerationens størrelse er størst. Stemmer det med din intuition?

f) Foretag eksperimenter med andre værdier for ω_1 og ω_2.

g) (Svær) Hvis du kan, så forsøg at argumentere for formlen (5).
Hjælp: Benyt indskudsreglen til at koble de to roterende bevægelser.