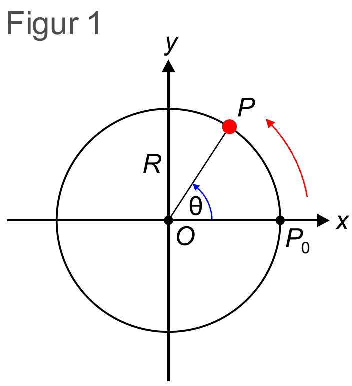
Vektorfunktioner – en forlystelse

I dette lille projekt skal vi se, hvordan vektorfunktioner kan benyttes til at beskrive bevægelsen i en forlystelse i en forlystelsespark. Før vi gør det, skal vi dog have styr på, hvordan man repræsenterer en jævn cirkelbevægelse matematisk set (opgave 1). Bemærk, at når man arbejder med trigonometriske funktioner, såsom cosinus og sinus, så er det almindeligt at vinkler regnes i radianer. Således også her.

Opgave 1 (Jævn cirkelbevægelse)

Betragt figur 1 til højre. Vi har givet en cirkel med radius R og centrum i $(0,0)$. Et punkt P befinder sig på cirklen og er specificeret ved en vinkel θ, som er vinklen fra vektoren $\overrightarrow{OP_0}$ til vektoren $\overrightarrow{OP}$. Bemærk, at vinkler regnes positive i positiv omløbsretning (mod uret) og negative i negativ omløbsretning.



a) Benyt definitionen af cosinus og sinus på en enhedscirkel til at redegøre for, hvorfor koordinaterne for P er givet ved $\left(R\cdot\cos(\theta), R\cdot\sin(\theta)\right)$.

Hvis vi vil have punktet P til at løbe rundt på cirklen, så skal vi have vinklen θ til at afhænge af tiden t. Vi kunne skrive vinklen som en funktion af t, for eksempel $\theta(t)$. Nu ønsker vi at studere en *jævn cirkelbevægelse*. Betegnelsen "jævn" hentyder her til, at vinklen ændrer sig jævnt. Man indfører typisk en såkaldt *vinkelhastighed* ω, som her skal være et fast tal. Hvis man regner tiden i sekunder, kan vinkelhastigheden få enheden s^{-1}. En vinkelhastighed på 0,32 s^{-1} betyder, at $\overrightarrow{OP}$ overstryger en vinkel på 0,32 (radianer) i løbet af ét sekund. Radianer er sat i parentes, for det er ikke nogen enhed. Man må godt bare skrive 0,32. Vi kan sætte $\theta(t)=\omega\cdot t$, hvis punktet starter i punktet P_0 til $t=0$, ellers skal der lægges en "startvinkel" til. En jævn cirkelbevægelse startende i punktet P_0 kan altså beskrives ved parameterfremstillingen:

(1) $$\vec{r}(t)=\begin{pmatrix} R\cdot\cos(\omega\cdot t) \\ R\cdot\sin(\omega\cdot t)\end{pmatrix}$$

I det følgende må du gerne benytte dit CAS-værktøj.

b) Bestem et udtryk for *hastigheden* $\vec{v}(t)=\vec{r}\,'(t)$.

c) Bestem et udtryk for *farten* $v(t)=|\vec{v}(t)|$. Vis at det simplificerer til $v(t)=\omega\cdot R$.

Betragt nu en jævn cirkelbevægelse med radius $R=5$ og vinkelhastighed $\omega=0.5$. Omløbstiden er da givet ved formlen $T=2\pi/\omega$ (Overvej!).

d) Benyt de angivne parametre til at udregne omløbstiden T og derefter tegne banekurven for vektorfunktionen i (1) i intervallet $0\le t\le T$.

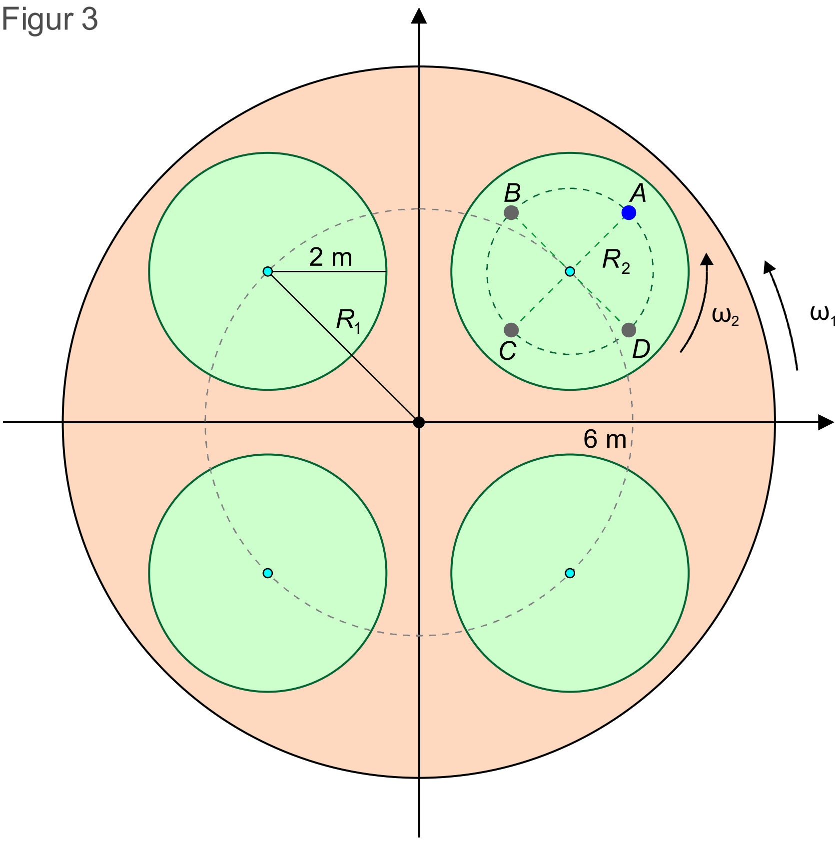
e) Hvor stor er farten i den jævne cirkelbevægelse.

Opgave 2 (Forlystelse)

I en forlystelsespark har man konstrueret en forlystelse bestående af en roterende cirkelskive, hvorpå der roterer fire mindre cirkelskiver. På hver af de små cirkelskiver er anbragt fire sæder til hver én person. Spørgsmålet er, hvilken kurve en person i et sæde vil opleve, når forlystelsen kører? Betragt i det følgende figur 3 nedenfor. Den store skive har radius 6 meter og roterer med vinkelhastigheden ω_1, regnet positiv i positiv omløbsretning. Hver af de små cirkelskiver har centrum på en cirkel (stiplet på figur), som er koncentrisk med den store cirkel, og som har radius $R_1 = 3{,}6$ meter. Til tiden $t = 0$ er centrene anbragt på radier med vinklerne π/2, 3π/2, 5π/2 og 7π/2 i koordinatsystemet. Hver af de små cirkelskiver har radius 2 meter. På hver af de små cirkelskiver er sæderne anbragt på en koncentrisk cirkel med radius $R_2 = 1{,}4$ meter.

Til tiden $t = 0$ er sæderne anbragt på radier med vinklerne π/2, 3π/2, 5π/2 og 7π/2 i forhold til centrum på den pågældende cirkelskive – regnet i forhold til koordinatsystemets x-akse. De små cirkelskiver roterer med en vinkelhastighed på ω_2, igen regnet positiv i positiv omløbsretning.

Figur 3



I det følgende vil vi regne på bevægelsen af det blå punkt A, når forlystelsen roterer. Det oplyses, at dette punkts bevægelse kan beskrives ved parameterfremstillingen:

(2) $$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} R_1 \cdot \cos(\omega_1 \cdot t + \frac{\pi}{4}) + R_2 \cdot \cos(\omega_2 \cdot t + \frac{\pi}{4}) \\ R_1 \cdot \sin(\omega_1 \cdot t + \frac{\pi}{4}) + R_2 \cdot \sin(\omega_2 \cdot t + \frac{\pi}{4}) \end{pmatrix}$$

Vi vil undersøge bevægelsen for følgende størrelser:

$$R_1 = 3{,}6 \quad R_2 = 1{,}4 \quad \omega_1 = 0{,}75 \quad \omega_2 = -1{,}25$$

Bemærk, at vinkelhastigheden regnes negativ, når rotationen er i negativ omløbsretning. Benyt dit CAS-værktøj til at løse:

a) Tegn banekurven for punktet A's bevægelse i tidsrummet $0 \le t \le 28$.

b) Bestem udtryk for *hastigheden* $\vec{v}(t)$ og farten $v(t)$.

c) Bestem udtryk for *accelerationen* $\vec{a}(t)$ og dens størrelse $a(t) = |\vec{a}(t)|$.

d) Tegn graferne for farten og accelerationens størrelse som funktion af tiden i hvert deres koordinatsystem.

e) Undersøg hvor i bevægelsen farten og accelerationens størrelse er størst. Stemmer det med din intuition?

f) Foretag eksperimenter med andre værdier for ω_1 og ω_2.

g) (Svær) Hvis du kan, så forsøg at argumentere for formlen (2).
Hjælp: Benyt indskudsreglen til at koble de to roterende bevægelser.