Regneregler for ubestemte integraler

I dette lille tillæg skal vi se på en sætning, som angiver de regneregler, der gælder for ubestemte integraler (integraler uden grænser), samt give et bevis for sætningen. Da vi i beviset skal gøre brug af de tilsvarende regler for differentialkvotienter, så anføres de først uden bevis.

Sætning 1 (Regneregler for differentiable funktioner)

I a)-d) antages det, at funktionerne f og g er differentiable i x_0. k er en konstant. Endvidere antages det i d), at $g(x_0) \neq 0$. I e) antages det, at f er differentiabel i x_0 og g er differentiabel i $y_0 = f(x_0)$. Med disse antagelser er $f+g, k \cdot f, f \cdot g, f/g$ og $f \circ g$ differentiable med følgende differentialkvotienter:

a) $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$

b) $(k \cdot f)'(x_0) = k \cdot f'(x_0)$

c) $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$

d) $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x_0) = \dfrac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$

e) $(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$

Bemærkning 2

Med ord siger sætningen følgende: a) Man differentierer en sum af to funktioner ved at differentiere funktionerne hver for sig og lægge sammen. b) Når man ganger en proportionalitetsfaktor k på en funktion f, så kan dens differentialkvotient fås ved at ”sætte proportionalitetsfaktoren k udenfor”. c) Differentialkvotienten af et produkt af to funktioner fås som den første funktion differentieret gange med den anden funktion uændret plus den første funktion uændret gange den anden funktion differentieret. e) Differentialkvotienten af en sammensat funktion fås som den ydre funktion differentieret med den indre funktion indsat gange den indre funktion differentieret.

Definition 3

Funktionen $F(x)$ siges at være en *stamfunktion* til funktionen $f(x)$, hvis $F'(x) = f(x)$. Med det *ubestemte integral* af en funktion $f(x)$ vil vi forstå en vilkårlig valgt stamfunktion til $f(x)$.

Sætning 4

Givet to differentiable funktioner F_1 og F_2. Da gælder:

Der findes en konstant k, så $F_2(x) = F_1(x) + k \iff F_1'(x) = F_2'(x)$

Bevis: Vi viser først sætningen mod højre $(\Rightarrow)$:

$$F_2'(x) = \left(F_1(x)+k\right)' = \left(F_1(x)\right)' + \left(k\right)' = F_1'(x)+0 = F_1'(x)$$

Dernæst sætningen mod venstre $(\Leftarrow)$: Her må vi vide, at differentialkvotienterne er ens. Indfør en hjælpefunktion $h(x) = F_2(x) - F_1(x)$. Vi differentierer hjælpefunktionen:

$$h'(x) = \left(F_2(x) - F_1(x)\right)' = F_2'(x) - F_1'(x) = 0$$

En differentiabel funktion, som er defineret på hele *R*, og som overalt har differentialkvotient 0, kan kun være konstant (Overvej fx grafens mulige udseende). Der findes altså en konstant *k*, så $h(x) = F_2(x) - F_1(x) = k$, dvs. $F_2(x) = F_1(x)+k$.

□

Sætning 4 godtgør, at hvis en funktion er stamfunktion til en given funktion, så er enhver funktion, som fremkommer ved at lægge en konstant til den oprindelige stamfunktion, også en stamfunktion. Sætning 4 fra højre mod venstre fortæller også, at der ikke er andre stamfunktioner! Nu til reglerne for ubestemte integraler.

Sætning 5 (Regneregler for ubestemte integraler)

I a) og b) antager vi, at *f* og *g* er kontinuerte funktioner. *k* er en konstant. I c) og d) antages det, at *g* er differentiabel med kontinuert afledet samt at *f* er kontinuert. Da gælder:

a) $\int \left(f(x)+g(x)\right)dx \;=\; \int f(x)dx + \int g(x)dx$

b) $\int k\cdot f(x)dx \;=\; k\cdot \int f(x)dx$

c) $\int f(x)\cdot g(x)\,dx \;=\; F(x)\cdot g(x) - \int F(x)\cdot g'(x)\,dx$

d) $\int f(g(x))\cdot g'(x)\,dx \;=\; F(g(x)) \;=\; \int f(t)dt\Big|_{t=g(x)}$

Bevis for sætning 5: Af definitionen på det ubestemte integral, ser vi, at det er tilstrækkelig at vise, at hvis man differentierer højresiden i ligningen, så får man integranden på venstre side, altså ”indmaden” af integralet på venstre side. Vi gør undervejs brug af reglerne for differentiable funktioner, angivet i sætning 1.

a) $\left(\int f(x)dx + \int g(x)dx\right)' = \left(\int f(x)dx\right)' + \left(\int g(x)dx\right)' = f(x)+g(x)$

b) $\left(k\cdot \int f(x)dx\right)' = k\cdot \left(\int f(x)dx\right)' = k\cdot f(x)$

c) $\left(F(x)\cdot g(x) - \int F(x)\cdot g'(x)\,dx\right)' = \left(F(x)\cdot g(x)\right)' - \left(\int F(x)\cdot g'(x)\,dx\right)'$

$= F'(x)\cdot g(x) + F(x)\cdot g'(x) - F(x)\cdot g'(x) = f(x)\cdot g(x)$

d) $\left(F(g(x))\right)' = F'(g(x))\cdot g'(x) = f(g(x))\cdot g'(x)$

□

Stamfunktioner til standardfunktioner

$f(x)$	$F(x)$
k	$k \cdot x$
$x^n ,\ n \neq -1$	$\frac{1}{n+1} x^{n+1}$
$1/x$	$\ln(x)$
a^x	$\dfrac{1}{\ln(a)} \cdot a^x$
e^x	e^x
e^{kx}	$\frac{1}{k} \cdot e^{kx}$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$
$\cos(x)$	$\sin(x)$
$\ln(x)$	$x \cdot \ln(x) - x$

Eksempel 6

For at finde en stamfunktion til funktionen $f(x) = 4x^2 + \sqrt{x}$, benytter vi tabellen ovenfor samt regneregel a) og b) fra sætning 5. Vi får:

$$\int \left(4x^2 + \sqrt{x}\right) dx \;=\; \int 4 \cdot x^2 dx + \int \sqrt{x}\, dx \;=\; 4 \cdot \int x^2 dx + \int x^{1/2} dx$$
$$=\; 4 \cdot \tfrac{1}{2+1} \cdot x^{2+1} + \tfrac{1}{1/2+1} \cdot x^{1/2+1} \;=\; \tfrac{4}{3} x^3 + \tfrac{2}{3} x^{3/2}$$

Eksempel 7

Vi ønsker at bestemme en stamfunktion til $x \cdot \sin(x)$. Det er oplagt, at vi her må gøre brug af regel c) i sætning 5. Den kaldes også for *partiel integration*:

$$\begin{aligned}\int x \cdot \sin(x)\, dx \;&=\; x \cdot (-\cos(x)) - \int (-\cos(x)) \cdot 1\, dx \\ &=\; -x \cdot \cos(x) + \int \cos(x)\, dx \\ &=\; -x \cdot \cos(x) + \sin(x)\end{aligned}$$

Bemærk, at man i formlen for partiel integration får et nyt integral at løse på højre side. Det skulle gerne være nemmere at løse end det integral, vi startede med. Derfor er det vigtigt, at man vælger $f(x)$ og $g(x)$ fornuftigt. Her sættes $f(x) = \sin(x)$ og $g(x) = x$, for på højre side skal vi differentiere $g(x)$, og det giver jo $g'(x) = 1$. Samtidigt har vi $F(x) = -\cos(x)$.

Eksempel 8

Vi vil bestemme en stamfunktion til funktionen $8x \cdot \sqrt{2x^2 + 3}$.

Det viser sig, at der ikke er noget håb i at forsøge at løse opgaven ved hjælp af partiel integration (regel c)), for der er et problem med den sammensatte funktion $\sqrt{2x^2+3}$, uanset om vi kalder den for *f* eller *g*. Derimod kan regel d), også kaldet *integration ved substitution*, anvendes. Man ser nemlig, at hvis man differentierer "indmaden" $2x^2+3$, så får man næsten det, der står foran kvadratrodstegnet – der skal blot justeres lidt med en konstant. Hvis vi derfor sætter $f(y)=\sqrt{y}$ og $g(x)=2x^2+3$, har vi $F(y)=\frac{2}{3}\cdot y^{3/2}$ (se eksempel 6) og $g'(x)=4x$, hvorved $f(g(x))\cdot g'(x)=(\sqrt{2x^2+3})\cdot 4x$. Højresiden i formlen d) bliver $F(g(x))=\frac{2}{3}\cdot(2x^2+3)^{3/2}$. Alt i alt:

$$\int 8x\cdot\sqrt{2x^2+3}\,dx \;=\; 2\cdot\int \underbrace{4x}_{g'(x)}\cdot\underbrace{\sqrt{2x^2+3}}_{f(g(x))}\,dx \;=\; 2\cdot\underbrace{\tfrac{2}{3}(2x^2+3)^{3/2}}_{F(g(x))} \;=\; \tfrac{4}{3}\cdot(2x^2+3)^{3/2}$$

Alternativ løsningsmetode

Man kan undertiden miste overblikket i ovenstående, så en alternativ måde er at indføre en ny variabel *t*. Det skal her være problembarnet under kvadratrodstegnet:

$t=g(x)=2x^2+3$. Heraf $dt=g'(x)\cdot dx=4x\cdot dx$, hvorved $dx=\dfrac{1}{4x}\cdot dt$. Vi får:

$$\int 8x\cdot\sqrt{2x^2+3}\,dx \;=\; \int 8x\cdot\sqrt{t}\cdot\frac{1}{4x}dt \;=\; \int 2\cdot\sqrt{t}\,dt \;=2\cdot\tfrac{2}{3}\cdot t^{3/2} \;=\; \tfrac{4}{3}\cdot t^{3/2} \;=\; \tfrac{4}{3}\cdot(2x^2+3)^{3/2}$$

Bemærk, at vi skal tilbage til den oprindelige variabel *x* til sidst. Variablen *t* var blot en hjælp til at komme frem til resultatet.

Bemærkning 9

Det skal nævnes, at vi kun var i stand til at bestemme integralet i eksempel 8, fordi differentialkvotienten af den indre funktion, bortset fra en justeringskonstant, også figurerer i integralet. Havde sidstnævnte ikke været der, ville integralet blive langt sværere at løse. Det kan for eksempel nævnes, at

$$\int \sqrt{2x^2+3}\,dx \;=\; \tfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left[\,x\cdot\sqrt{x^2+\tfrac{3}{2}} \;+\; \tfrac{3}{2}\cdot\ln\left|x+\sqrt{x^2+\tfrac{3}{2}}\right|\,\right]$$

I dette tilfælde skal der helt andre metoder til, som vi ikke kan komme ind på her. I andre tilfælde kan det ubestemte integral slet ikke angives ved de standardfunktioner, man kender, og så må man ofte ty til en *numerisk* (tilnærmet) løsning. Det er altså langt sværere at bestemme integraler end det er at bestemme differentialkvotienter.

Eksempel 10

Find en stamfunktion til $3x^2\cdot\cos(x^3+6)$. Sæt $g(x)=x^3+6$. Den indre funktion differentieret giver $g'(x)=3x^2$, som netop er det, der står foran. Derfor er vi på hjemmebane og kan benytte sætning 5d). Sæt $f(y)=\cos(y)$, så $F(y)=\sin(y)$. Da haves:

$$\int \underbrace{3x^2}_{g'(x)}\cdot\underbrace{\cos(x^3+6)}_{f(g(x))}\,dx \;=\; \underbrace{\sin(x^3+6)}_{F(g(x))}$$

Opgaver

Opgave 1

Bestem følgende integraler:

a) $\int (6x^2 - 4)\,dx$

b) $\int 4 \cdot e^{2x} dx$

c) $\int x \cdot \sqrt{x}\,dx$

d) $\int (8x - 2)\,dx$

Opgave 2

Bestem følgende integraler:

a) $\int 2x \cdot e^x dx$

b) $\int x \cdot \cos(x)\,dx$

c) $\int x^2 \cdot e^x\,dx$. *Hjælp*: Benyt sætning 5c) to gange

d) $\int (2x+1) \cdot \frac{1}{x}\,dx$

Opgave 3

Bestem følgende integraler:

a) $\int 3x^2 \cdot \sqrt{x^3 - 1}\,dx$

b) $\int \sin(2x+7) dx$

c) $\int x \cdot (x^2 - 1)^4\,dx$

d) $\int \frac{1}{4x+5}\,dx$

e) $\int \frac{4x}{x^2+1}\,dx$

f) $\int \frac{\cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,dx$

g) $\int 20x \cdot (5x^2 + 4)^{-2} dx$

h) $\int e^{3x+1} dx$