Formel for vinklen mellem to vektorer

Formålet med dette lille tillæg er at bevise den velkendte sætning 3 på næste side omhandlende vinklen mellem to vektorer, vel at mærke uden brug af cosinus-relationerne. Sidstnævnte kommer tværtimod som en konsekvens. Først nogle hjælpesætninger.

> **Sætning 1**
>
> Lad $\vec{a}, \vec{b}$ og $\vec{c}$ være vilkårlige vektorer i planen og lad t være et reelt tal. Da gælder:
>
> a) $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$ (kommutative lov)
>
> b) $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$ (distributive lov)
>
> c) $\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|^2$
>
> d) $(t\cdot\vec{a})\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot(t\cdot\vec{b}) = t\cdot(\vec{a}\cdot\vec{b})$

Bevis: Vi viser nogle udvalgte.

b) Vi regner på venstresiden og højresiden hver for sig, idet vi indfører koordinater:

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) &= \begin{pmatrix}a_x\\a_y\end{pmatrix}\cdot\left(\begin{pmatrix}b_x\\b_y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}c_x\\c_y\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}a_x\\a_y\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}b_x+c_x\\b_y+c_y\end{pmatrix}\\ &= a_x\cdot(b_x+c_x)+a_y\cdot(b_y+c_y) = a_x\cdot b_x+a_x\cdot c_x+a_y\cdot b_y+a_y\cdot c_y\end{aligned}$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c} = \begin{pmatrix}a_x\\a_y\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}b_x\\b_y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a_x\\a_y\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}c_x\\c_y\end{pmatrix} = a_x\cdot b_x+a_y\cdot b_y+a_x\cdot c_x+a_y\cdot c_y$$

Vi ser, at det giver det samme. Vi kan altså uden videre "prikke" en vektor på en sum af to vektorer ved at "prikke" ind på hver vektor for sig og lægge sammen.

c) Som før regner vi i koordinater på højre og venstre side af lighedstegnet:

$$\vec{a}\cdot\vec{a} = \begin{pmatrix}a_x\\a_y\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a_x\\a_y\end{pmatrix} = a_x\cdot a_x+a_y\cdot a_y = a_x^2+a_y^2$$

$$|\vec{a}|^2 = \left(\sqrt{a_x^2+a_y^2}\right)^2 = a_x^2+a_y^2$$

Igen får vi det samme.

d) Vi viser, at det første udtryk er lig med det sidste udtryk:

$$\begin{aligned}(t\cdot\vec{a})\cdot\vec{b} &= \left(t\cdot\begin{pmatrix}a_x\\a_y\end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix}b_x\\b_y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}t\cdot a_x\\t\cdot a_y\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}b_x\\b_y\end{pmatrix}\\ &= (t\cdot a_x)\cdot b_x+(t\cdot a_y)\cdot b_y = t\cdot a_x\cdot b_x+t\cdot a_y\cdot b_y\end{aligned}$$

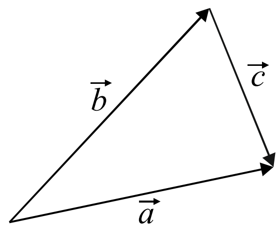
$$t\cdot(\vec{a}\cdot\vec{b}) = t\cdot\left(\begin{pmatrix}a_x\\a_y\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}b_x\\b_y\end{pmatrix}\right) = t\cdot(a_x\cdot b_x+a_y\cdot b_y) = t\cdot a_x\cdot b_x+t\cdot a_y\cdot b_y$$

Resten af påstandene overlades til læseren. □

Sætning 2

Skalarproduktet mellem to vektorer er uafhængigt af koordinatsystem.

Bevis: Lad $\vec{a}$ og $\vec{b}$ være to vektorer i planen. Da kan vi definere differensvektoren $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$ og derefter benytte sætning 1:



(1)
$$\begin{aligned} \vec{c}\cdot\vec{c} &= (\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b}) = \vec{a}\cdot\vec{a} - \vec{a}\cdot\vec{b} - \vec{b}\cdot\vec{a} + \vec{b}\cdot\vec{b} \\ &= \vec{a}\cdot\vec{a} - \vec{a}\cdot\vec{b} - \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}\cdot\vec{b} \\ &= \vec{a}\cdot\vec{a} - 2\cdot\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}\cdot\vec{b} \end{aligned}$$

hvilket ved brug af sætning 1c) fører til:

(2)
$$|\vec{c}|^2 = |\vec{a}|^2 - 2\cdot\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{b}|^2 \quad\Leftrightarrow\quad \vec{a}\cdot\vec{b} = \tfrac{1}{2}\cdot\left(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{c}|^2\right)$$

Vi ser, at skalarproduktet udelukkende afhænger af *længderne* af de tre vektorer. Et skift af koordinatsystem vil dermed ikke ændre på skalarproduktet.

□

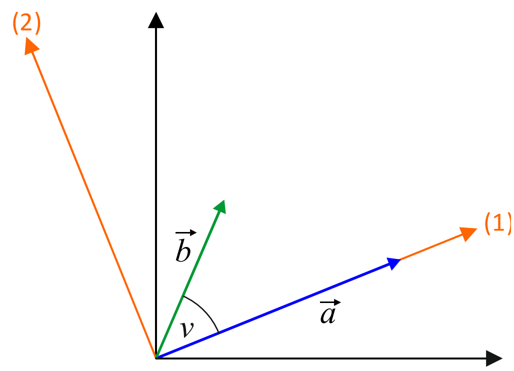
Sætning 3 (Vinklen mellem to vektorer)

Lad $\vec{a}$ og $\vec{b}$ være to egentlige vektorer i planen. Da gælder

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(v) \quad\Leftrightarrow\quad \cos(v) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$$

hvor v er vinklen mellem de to vektorer.

Bevis: I sætning 2 så vi, at der ikke sker noget med skalarproduktet, hvis vi skifter koordinatsystem. Det udnytter vi nu på den måde, at vi drejer det oprindelige koordinatsystem, så første basisvektor i det nye koordinatsystem kommer til at blive ensrettet med $\vec{a}$. Sidstnævnte vektor vil altså i det nye (orange) koordinatsystem få koordinaterne



$$\vec{a} = \begin{pmatrix} |\vec{a}| \\ 0 \end{pmatrix}$$

I forhold til det nye koordinatsystem vil $\vec{b}$ have retningsvinklen v, hvis man skal dreje i den positive omløbsretning for at komme fra $\vec{a}$ til $\vec{b}$. I modsat fald er retningsvinklen $-v$. Lad os foreløbigt sige, at det første er tilfældet. Fra en tidligere sætning ved vi dermed, at $\vec{b}$ kan skrives således:

$$\vec{b} = |\vec{b}| \cdot \begin{pmatrix} \cos(v) \\ \sin(v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\vec{b}| \cdot \cos(v) \\ |\vec{b}| \cdot \sin(v) \end{pmatrix}$$

Når vi tager skalarproduktet af de to vektorer fås:

(3) $$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} |\vec{a}| \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} |\vec{b}| \cdot \cos(v) \\ |\vec{b}| \cdot \sin(v) \end{pmatrix} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(v) + 0 \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(v) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(v)$$

Her ser vi samtidigt, at det er ligegyldigt, om retningsvinklen var v eller $-v$, for der gælder nemlig som bekendt: $\cos(-v) = \cos(v)$. Ligningen (1) vil altså gælde uanset hvad. Det ønskede er dermed bevist.

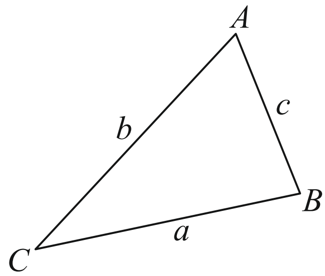
□

Sætning 4 (Cosinus-relationen)

I en vilkårlig trekant gælder cosinus-relationen:

(4) $$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(C)$$

Bevis: Fås mere eller mindre direkte ud fra (2) og sætning 3. Her svarer v til C i trekanten, og længderne af vektorerne er sidelængderne i trekanten. Detaljerne overlades til læseren.



□

Bemærkninger 5

Man kalder også cosinusrelationen for den "udvidede Pythagoras' sætning". Hvorfor mon det? På grund af symmetri i problemet er det klart, at ombytter man bogstaverne, så får man også gyldige formler. Der er i alt tre cosinusrelationer. Ikke mere om det her. En helt anden ting er, at det er forholdsvist klart, at sætning 3 umiddelbart kan udvides til også at gælde for vektorer i rummet eller højere dimensioner (overvej!).

Sætning 6

Lad $\vec{a}$ og $\vec{b}$ være to egentlige vektorer. Da gælder:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} \perp \vec{b}$$

Bevis: Vi har følgende:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(v) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos(v) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad v = 90° \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} \perp \vec{b}$$

hvor vi i første ensbetydende tegn har benyttet sætning 3 og i andet ensbetydende tegn har benyttet nulreglen. Endelig følger det tredje ensbetydende tegn af, at vinklen mellem to vektorer altid er højst 180°.

□

Bemærkning 7

En andet ord for at to vektorer står vinkelret på hinanden er, at de er *ortogonale*. Bemærk, at man kun kan tale om, at to vektorer er ortogonale, hvis ingen af dem er nulvektor!

Opgaver

Opgave 1

Benyt regnereglerne i sætning 1 til at reducere følgende udtryk:

a) $\vec{a}\cdot(2\vec{b}-3\vec{a})+\vec{b}\cdot(\vec{b}-2\vec{a})$

b) $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})$

c) $\vec{a}\cdot(3\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c})-(\vec{b}-\vec{a})\cdot\vec{c}-2\vec{a}\cdot\vec{b}$

Opgave 2

Udnyt sætning 6 til at bestemme det tal *t*, som gør følgende to vektorer ortogonale:

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} \text{ og } \vec{b}=\begin{pmatrix}-2\\t\end{pmatrix}$$

Opgave 3

Bestem det tal *t*, som gør følgende to vektorer ortogonale:

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}t-1\\2\end{pmatrix} \text{ og } \vec{b}=\begin{pmatrix}1\\2t\end{pmatrix}$$

Opgave 4

Benyt sætning 3 til at vise at følgende to udsagn gælder:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}>0 \quad\Leftrightarrow\quad \angle(\vec{a},\vec{b}) \text{ er spids}$$
$$\vec{a}\cdot\vec{b}<0 \quad\Leftrightarrow\quad \angle(\vec{a},\vec{b}) \text{ er stump}$$

hvor $\angle(\vec{a},\vec{b})$ hentyder til vinklen mellem de to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$.