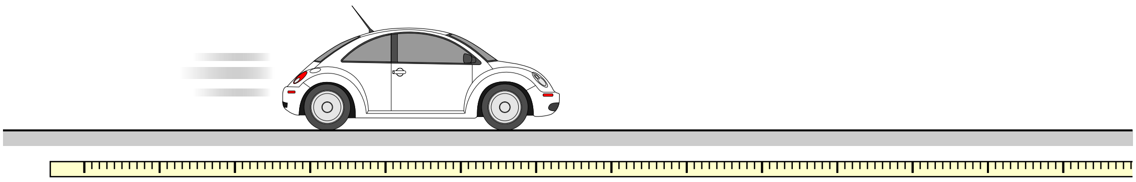
Vækst og væksthastighed

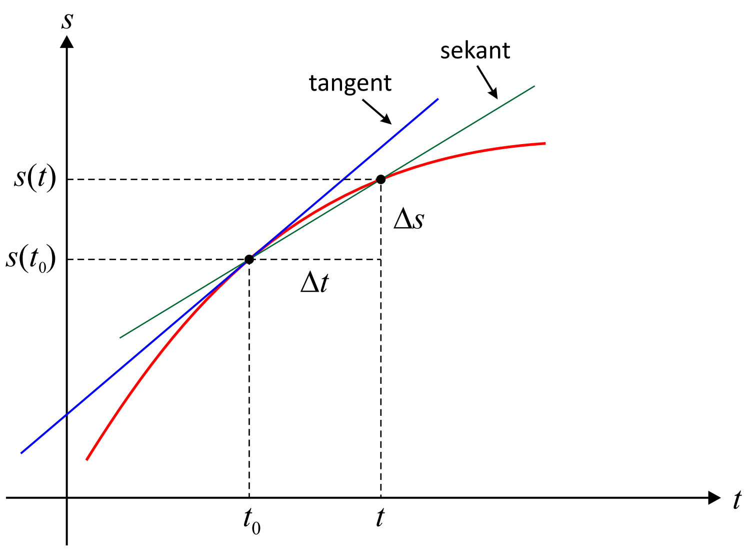
Vækst er et meget anvendt ord i mange sammenhænge i samfundet og i naturvidenskaben. Differentialregningen kan være med til at kaste lys over dette begreb, også på en mere præcis måde. Begrebet *væksthastighed* eller bare *hastighed*, kan måske nemmest beskrives ved at tage udgangspunkt i en bil, som kører ud af en lige landevej. Et målebånd er anbragt langs vejen, så man til ethvert tidspunkt t kan registrere bilens position s. Dermed har man en stedfunktion $s(t)$.



Hvis bilen ikke vender rundt i tidsrummet mellem t og t_0, så angiver nedenstående brøk bilens *gennemsnitshastighed* i tidsrummet, regnet med fortegn:

(1) $$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}$$

Det er netop den størrelse, vi kalder *differenskvotienten* for funktionen $s(t)$ i t_0. Grafisk set angiver den hældningen af sekanten mellem grafpunkterne $(t_0, s(t_0))$ og $(t, s(t))$.



Hvis vi lader t nærme sig til t_0, vil differenskvotienten nærme sig til *differentialkvotienten* $s'(t_0)$ i t_0, såfremt $s(t)$ er differentiabel i t_0. Altså:

(2) $$s'(t_0) = \lim_{t\to t_0}\left(\frac{\Delta s}{\Delta t}\right) = \lim_{t\to t_0}\left(\frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}\right)$$

og grafisk set er differentialkvotienten hældningen af tangenten i t_0. I den aktuelle situation kan differentialkvotienten fortolkes som bilens *øjeblikshastighed* eller bare *hastighed* til tidspunktet t_0. Hvis $s(t)$ er en differentiabel funktion, har man hastigheden til ethvert tidspunkt: $v(t)=s'(t)$. Hvis *hastighedsfunktionen* $v(t)$ også er differentiabel, kan man gentage proceduren, dvs. differentiere igen. Herved får man *accelerationsfunktionen*:

(3) $$a(t)=v'(t)=s''(t)$$

som er stedfunktionen differentieret to gange, også kaldet for *den anden afledede* af stedfunktionen. Accelerationsfunktionen er i en vis forstand "hastigheden af hastigheden", altså den hastighed, hvormed hastigheden ændrer sig. I det følgende skal vi se flere forskellige eksempler på, hvor begrebet hastighed eller væksthastighed kommer i spil.

Eksempel 1 (Det frie fald)

Et godt eksempel fra fysik er *det frie fald*. Lad os sige, at en bold slippes fra en vis højde, og at man i stil med bileksemplet anbringer et målebånd lodret, så nulpunktet på målebåndet er der, hvor bolden slippes, og i øvrigt måler positivt opefter. Da siger fysikken, at stedfunktionen kan beskrives ved følgende stedfunktion:

(4) $$s(t)=-\tfrac{1}{2}\cdot g\cdot t^2$$

hvor $g=9{,}82\ \mathrm{m/s^2}$ er tyngdeaccelerationen. At bolden "slippes" (ikke kastes) hentyder til at begyndelseshastigheden er 0 m/s. Vi kan nu beregne boldens hastighed til ethvert tidspunkt:

(5) $$v(t)=s'(t)=-g\cdot t$$

Vi ser, at boldens hastighed ændrer sig *proportionalt* med tiden. Man kan tage skridtet videre og bestemme accelerationsfunktionen:

(6) $$a(t)=v'(t)=s''(t)=-g$$

Accelerationen er altså konstant! Sagt på en anden måde, så ændrer hastigheden sig med den konstante værdi –9,82 m/s for hvert sekund, der går.

Eksempel 2 (Vægtudvikling af en nyfødt)

Tabellen på næste side indeholder (indirekte) data fra WHO. Der er tale om median-vægten af drengebørn for hver måned i løbet af drengenes første to leveår.

Tid (mdr.)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Vægt (kg)	3,35	4,45	5,58	6,39	7,00	7,50	7,92	8,28	8,60	8,90	9,19	9,41	9,62

Tid (mdr.)	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	
Vægt (kg)	9,85	10,10	10,32	10,52	10,73	10,93	11,16	11,36	11,57	11,75	11,95	12,18	

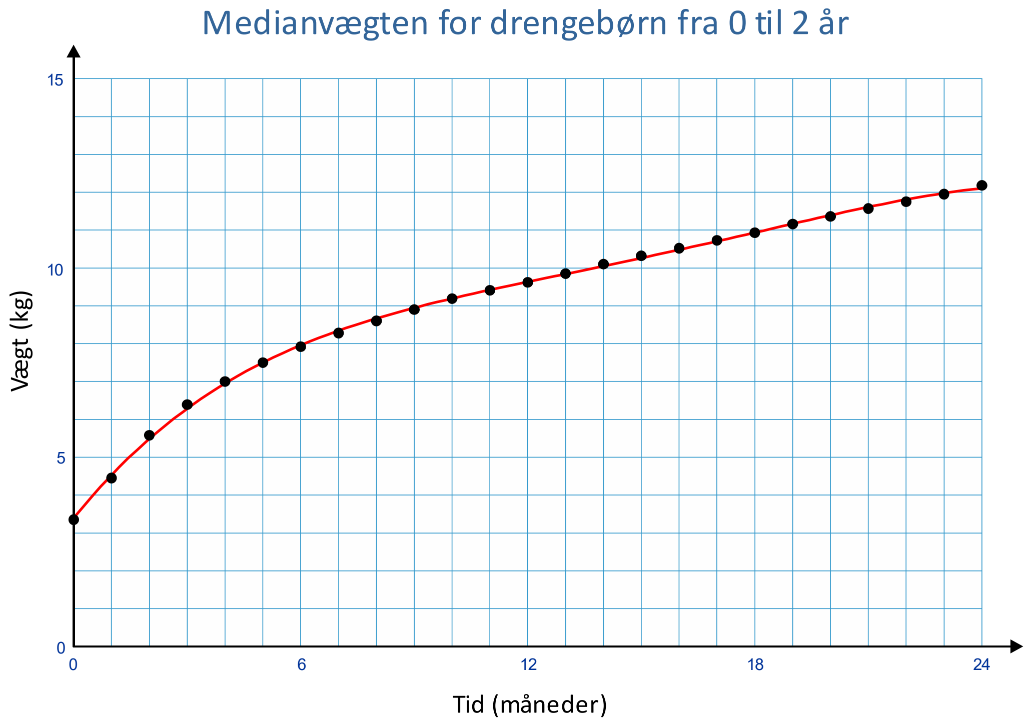
Vi vil bestemme den hastighed, hvormed drengene tager på i vægt til tidspunkterne 1 mdr. og 18 mdr. Man kunne anvende numerisk differentiation her, men vi vil i stedet foretage et fit af data med et polynomium af grad 4, og derefter differentiere denne funktion med henblik på at bestemme væksthastigheder. Et CAS-værktøj giver følgende resultat, når man beder om at det foretager et fit med et polynomium af grad 4:

$$f(t) = -0{,}000073629 \cdot t^4 + 0{,}0046006 \cdot t^3 - 0{,}10449 \cdot t^2 + 1{,}2387 \cdot t + 3{,}3904$$

Herefter er det blot at indsætte tidspunkterne i hastighedsfunktionen, dvs. den afledede:

$$f'(1) = 1{,}0432083882 \quad \text{og} \quad f'(18) = 0{,}231224503$$

Vi konkluderer, at drengenes vægt til tidspunktet 1 måned vokser med 1,04 kg/mdr., mens væksthastigheden er 0,23 kg/mdr. til tidspunktet 18 måneder. Grafen nedenfor viser også, at væksthastigheden er klart størst lige efter fødslen.



□

Eksempel 3 (Økonomi)

Differentialregning finder også anvendelser indenfor økonomi. En producent vil nok i høj grad kigge på sin fortjeneste, når denne foretager valg. Hvor mange enheder skal man producere? Umiddelbart kunne man tro, at det bare gælder om at producere så meget som muligt, for så må fortjenesten vel også vokse tilsvarende? Men det er ikke så nemt endda. Omkostningerne pr. enhed er for eksempel ikke konstante. Normalt vil det være sådan, at omkostningerne pr. enhed aftager på grund af stordriftsfordele; men produceres tilstrækkelig mange enheder, kan omkostningerne også pludseligt vokse pr. enhed, hvis der for eksempel opstår råvaremangel. Så er der indtægterne. Her er prisfastsættelsen pr. enhed vigtig. Normalt vil man kunne sætte prisen pr. enhed ned, hvis man producerer mange enheder. Sker det, vil man tjene mindre pr. enhed, men det kan være, at man derved kan sælge flere varer. *Efterspørgslen* vil således normalt afhænge af enhedsprisen. For at gøre en lang historie kort, vil vi i det følgende definere nogle funktioner, som repræsenterer enhedsprisen, indtægterne, omkostningerne og fortjenesten. De er alle funktioner af antal producerede enheder x. Funktionerne kan virke lidt vilkårlige, og man kan sagtens diskutere hvor realistiske de vil være i en konkret situation, hvor der er så mange ting i spil, så man ikke vil være i stand til at putte det hele ind i en matematisk formel. Alligevel illustrerer analysen nogle mekanismer i en virksomheds økonomi. Det kan give nogle kvalifikative fingerpeg om hvilke størrelser, man skal kigge på, for at optimere sin produktion. Derfor er der også en del matematik involveret, når man læser økonomi på universitetet.

x : Antal producerede enheder

Enhedsprisen som funktion af antal enheder: $enhedspris(x) \;=\; \dfrac{3200-6x}{3}$

Indtægterne er dermed (overvej): $ind(x) \;=\; x \cdot enhedspris(x) \;=\; x \cdot \left(\dfrac{3200-6x}{3}\right)$

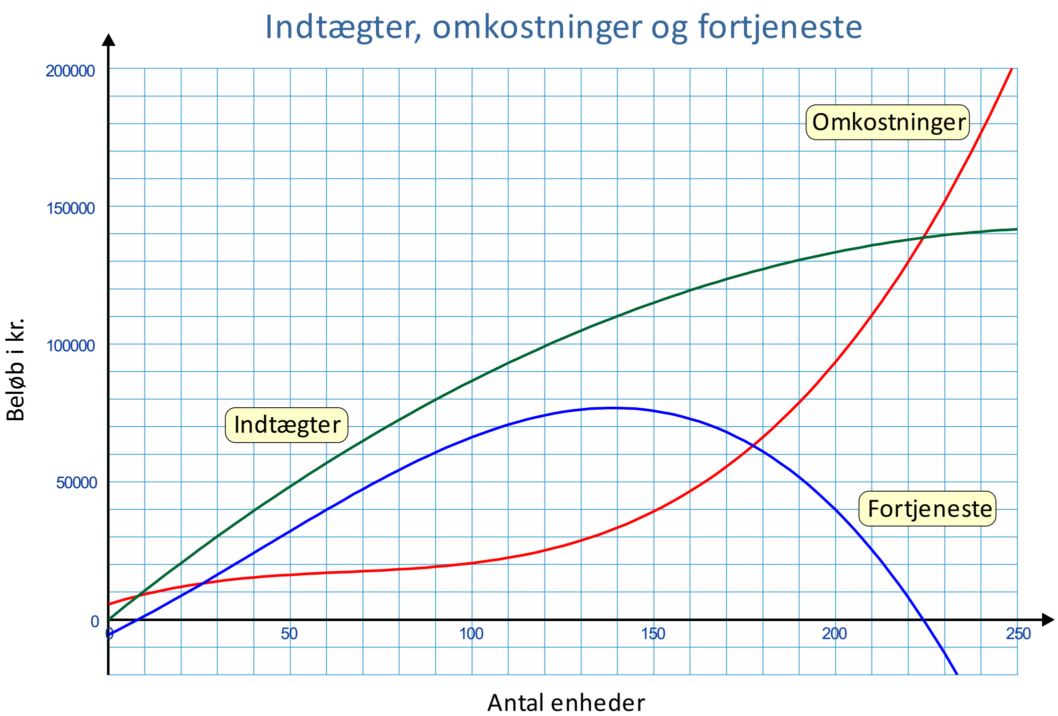
Omkostningsfunktionen sættes til: $om(x) \;=\; 0{,}028 \cdot x^3 - 5{,}5 \cdot x^2 + 420 \cdot x + 5500$

Fortjenesten: $F(x) \;=\; ind(x) - om(x) \;=\; -0{,}028 \cdot x^3 + 3{,}5 \cdot x^2 + \dfrac{1940}{3} \cdot x - 5500$

Lad os udregne differentialkvotienten af fortjeneste-funktionen i $x = 100$. CAS-værktøjet giver: $F'(100) = 506{,}67$. Hastigheden, hvormed fortjenesten vokser ved en produktion af 100 enheder, er dermed ca. 507 kr./enhed. Det indikerer, at det kan betale sig at producere mere, hvis man ønsker en større fortjeneste. Men hvilken produktionsstørrelse giver da den største fortjeneste? For at besvare det, undersøger vi for vandrette tangenter:

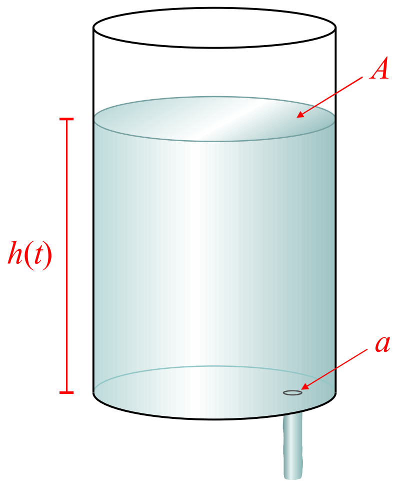
$$F'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -55{,}46481026 \;\vee\; x = 138{,}7981436$$

Da x skal være ikke-negativ, er svaret altså, at der er vandret tangent til grafen for fortjeneste-funktionen, når $x = 138{,}7981436$. Det overlades til læseren at vise, at der her er tale om et lokalt og globalt maksimum for $F(x)$. Det er med andre ord optimalt at producere ca. 139 enheder, hvis man vil optimere fortjenesten. Lad os afslutningsvist plotte graferne for indtægtsfunktionen, omkostningsfunktionen og fortjeneste-funktionen i samme koordinatsystem:



Eksempel 4 (Tømning af beholder)

En cylindrisk beholder med tværsnitsarealet A er fyldt med vand. Vandet løber ud af et lille cirkulært hul med tværsnitsareal a i bunden. Ved at anvende massebevarelse og bevarelse af den mekaniske energi kan man vise, at vandstanden $h(t)$ i beholderen som funktion af tiden t er givet ved forskriften:



(7) $$h(t) = \left(\sqrt{h_0} - \tfrac{1}{2}k \cdot t\right)^2$$

hvor h_0 er begyndelseshøjden, g er tyngdeaccelerationen og $k = a/A \cdot \sqrt{2g}$.

I det følgende kigger vi på et eksempel, hvor starthøjden er 45 cm, beholderens indre diameter er 40 cm, og diameteren af udløbshullet er 3 cm. Det giver følgende værdier for de forskellige størrelser, underforstået regnet i SI-enheder:

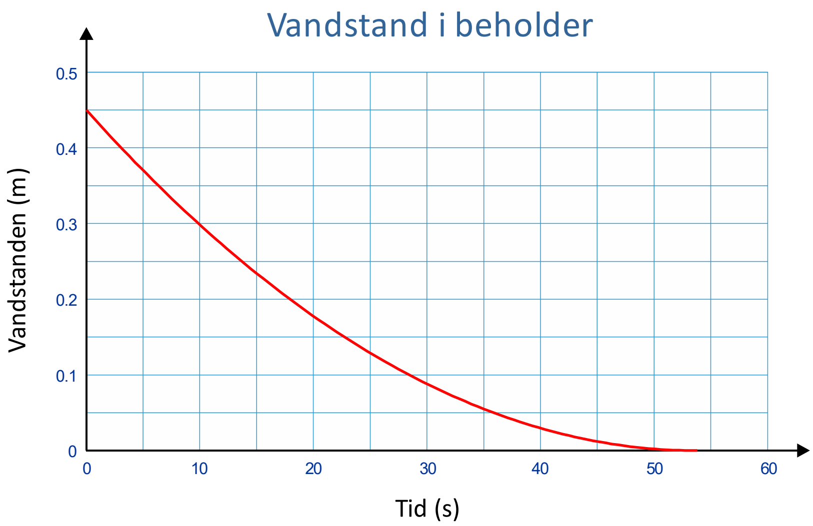
$$A = \pi \cdot R^2 = \pi \cdot 0{,}20^2 = 0{,}1256637062$$
$$a = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot 0{,}015^2 = 0{,}0007068583472$$
$$h_0 = 0{,}45$$
$$g = 9{,}82$$

Efter omskrivning giver (54) anledning til følgende forskrift for vandstanden:

$$h(t) = (0{,}6708203932 - 0{,}01246416739 \cdot t)^2$$

Hastighederne til tidspunkterne 10 s og 40 s:

$$h'(10) = -0{,}01361532597 \quad \text{og} \quad h'(40) = -0{,}00429399784$$



Til tidspunktet 10 s aftager vandstanden altså med 1,36 cm/s, mens vandstanden til tidspunktet 40 s kun aftager med 0,42 cm/s. Vi kan også tegne en graf for vandstanden som funktion af tiden. Først bruger vi dog *solve*-funktionen i vores CAS-værktøj til at bestemme, hvornår beholderen er tom:

$$h(t) = 0 \;\Leftrightarrow\; t = 53{,}81991209\,.$$

Beholderen er altså tom efter godt 54 sekunder.

□

Bemærkning 5

Bemærk, at hastigheden også har en enhed, nemlig enheden på y-aksen divideret med enheden på x-aksen!

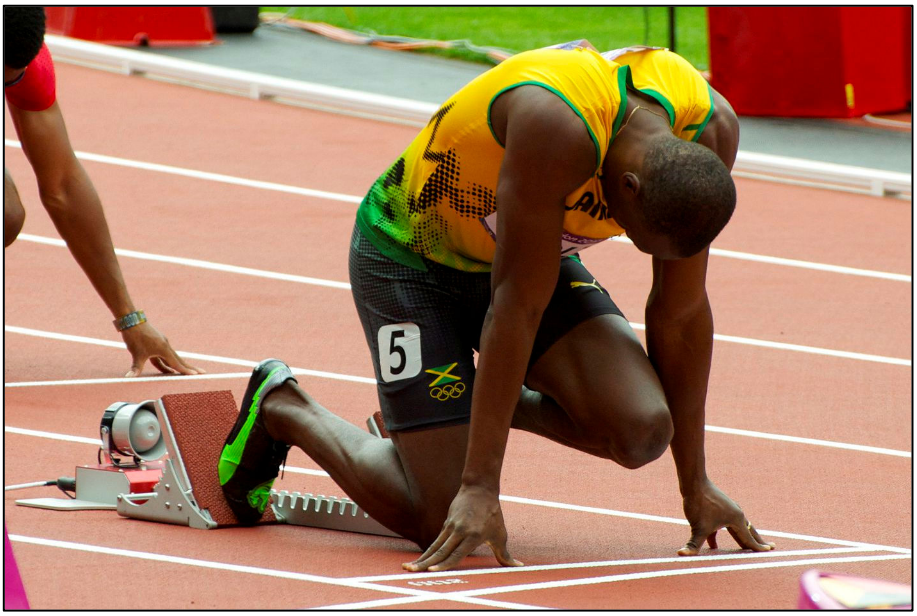
Opgaver

Opgave 1 (Usain Bolts verdensrekordløb)

Vi skal i denne opgave analysere det 100 meterløb, hvor Usain Bolt den 16. august 2009 satte verdensrekord. Tabellen på næste side indeholder en række data fra løbet i form af sammenhørende værdier af tid og tilbagelagt afstand.

Tid (s)	0,16	0,36	0,71	0,99	1,22	1,71	2,13	2,60	3,06	3,51	3,95	4,53
Afstand (m)	0,06	0,63	2,28	3,84	5,21	8,66	12,37	17,22	21,96	26,85	31,81	38,80

Tid (s)	5,10	5,59	6,09	6,57	7,10	7,52	8,03	8,31	8,77	9,10	9,58	
Afstand (m)	45,58	51,52	57,58	63,46	69,88	75,06	81,34	84,76	90,24	94,22	100	



a) Foretag i stil med hvad der blev gjort i eksempel 2 et fit med et fjerdegradspolynomium. Bestem forskriften for dette polynomium. Afbild punkter og polynomium i samme koordinatsystem. Hvor godt er fittet?
b) Bestem en forskrift for hastighedsfunktionen $v(t) = s'(t)$ og tegn en graf for den.
c) Bestem værdier for hastighederne til tidspunkterne 0,50 s og 7.00 s.

Grafen fra b) viser, at Usain Bolt omkring midtvejs opnår en lokal tophastighed, hvorefter hastigheden aftager lidt for til slut at vokse igen.

d) Bestem tidspunktet for, hvornår den lokale tophastighed opnås. Hvor langt er han da kommet? Hvad kan du sige om accelerationen til dette tidspunkt?
e) Bestem hastigheden lige, da han passerer 100 meter-mærket.

Opgave 2 (Newtons afkølingslov)

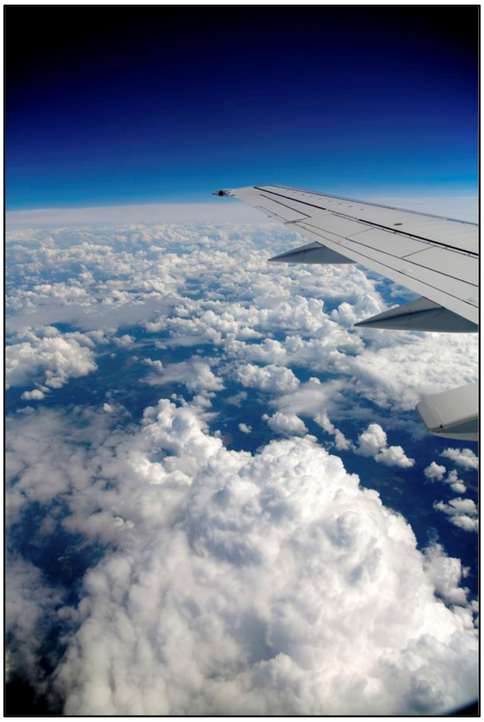
Newtons afkølingslov siger, at temperaturen af en væske i en beholder vil aftage med en hastighed, som er proportional med væskens temperaturforskel i forhold til omgivelserne. Man kan vise, at det giver anledning til, at temperaturen aftager som en *forskudt eksponentiel* funktion af tiden. I et konkret tilfælde har vi en kop kaffe, hvor kaffens temperatur udvikler sig på følgende måde:

$$T(t) \;=\; 54{,}6 \cdot e^{-0{,}047 \cdot t} + 23{,}3$$

hvor t er tiden regnet i minutter og funktionsværdien er temperaturen i °C.

a) Hvilken hastighed falder kaffens temperatur med til tidspunkterne henholdsvis 5 min. og 40 min.? Tegn desuden en graf for temperaturen som funktion af tiden.
b) Hvornår er den hastighed, hvormed kaffens temperaturen aftager, faldet til 1°C/min?
c) Hvad sker der med funktionen, når $t \to \infty$? Stemmer det med virkeligheden?

Opgave 3 (Tryk i atmosfæren)



Som bekendt aftager trykket p, når man bevæger sig opad i atmosfæren. I Troposfæren, som er den nederste del af atmosfæren, har man denne model for trykkets variation med højden:

$$p(h) \;=\; p_0 \cdot \exp\left(\frac{-M \cdot g \cdot h}{T_0 \cdot R}\right)$$

hvor g er tyngdeaccelerationen 9,82 m/s^2, T_0 er standardtemperaturen ved havniveau: 288,15 K, R er gaskonstanten 9,3145 J/(mol·K) og p_0 er almindeligt tryk ved havniveau: 101325 Pa, som er det samme som 1 atm. Højden h regnes i meter (m), og M er molarmassen for atmosfærisk(tør) luft: 0,02896 kg/mol. Trykket p fås i Pascal (Pa). Her skal det tilføjes, at der gælder: 1 atm = 101325 Pa.

a) Bestem den hastighed, hvormed trykket aftager med højden i højden 10 m. Samme spørgsmål i højden 6000 m. Giv desuden en sproglig fortolkning af værdierne.

b) Funktionen $p(h)$ er en eksponentielt aftagende funktion. Bestem halveringskonstanten for funktionen. Hvad fortæller den? Tegn desuden grafen for funktionen i området $0 \le h \le 12000$. Troposfæren på vores breddegrad har en tykkelse på 12 km.

c) Hvor lavt er trykket ifølge modellen på toppen af Mount Everest (højde: 8848 m)?

Billeder
Side 6: (Usain Bolt in the starting blocks).
Photo Credit: Nick J. Webb (https://www.flickr.com/photos/nickwebb/7734416998)
Creative Commons by 4.0.
Side 8: ©iStock.com/Elkor (del af flyvinge ses I atmosfæren)