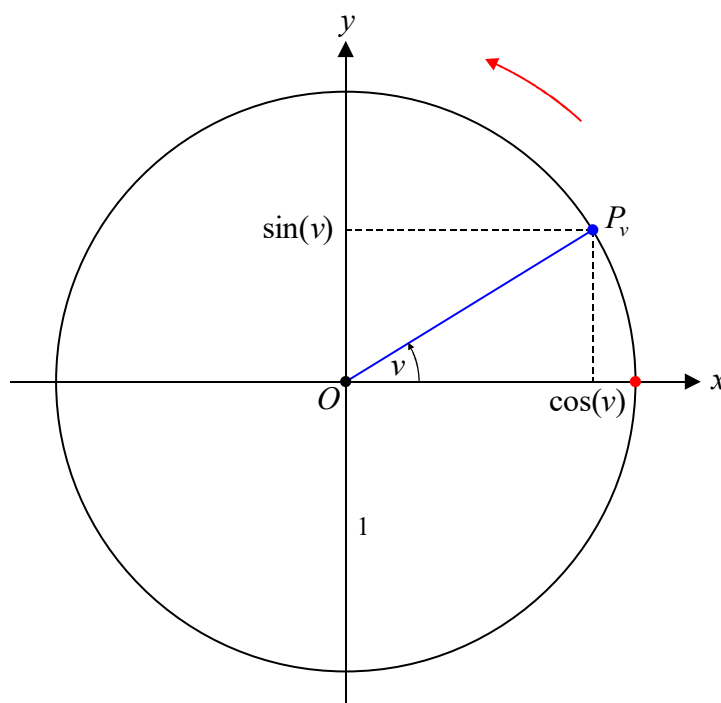


Trigonometri

Generelle definitioner via enhedscirkel

I et tidligere dokument *Trigonometri - Definitioner via retvinklet trekant* definerede vi sinus, cosinus og tangens for vinkler mellem 0 og 90° via en retvinklet trekant. I dette dokument skal vi give en anden definition af de trigonometriske funktioner, som sætter os i stand til at tage sinus og cosinus til alle mulige vinkler, også negative, samt tangens til næsten alle vinkler. Vi tager udgangspunkt i en *enhedscirkel*, som er en cirkel med radius 1 med centrum i koordinatsystemets begyndelsespunktet $(0,0)$, også kaldes *origo* og betegnet med O .



Definition 1

Lad v være en vinkel, som har vinkelspids i origo O og hvis ene (højre) ben falder sammen med den positive del af x -aksen. Vinklen regnes positiv, hvis det andet (venstre) ben er drejet i *positiv omløbsretning* (mod uret) og negativ, hvis det andet ben er drejet i *negativ omløbsretning* (med uret). *Retningspunktet* P_v hørende til vinklen v defineres som skæringspunktet mellem venstre ben og enhedscirklen. Da defineres:

$$\cos(v) = x\text{-koordinaten til retningspunktet } P_v$$

$$\sin(v) = y\text{-koordinaten til retningspunktet } P_v$$

$$\tan(v) = \frac{\sin(v)}{\cos(v)}, \text{ hvor } v \neq 90^\circ + p \cdot 180^\circ, p \in \mathbb{Z}.$$

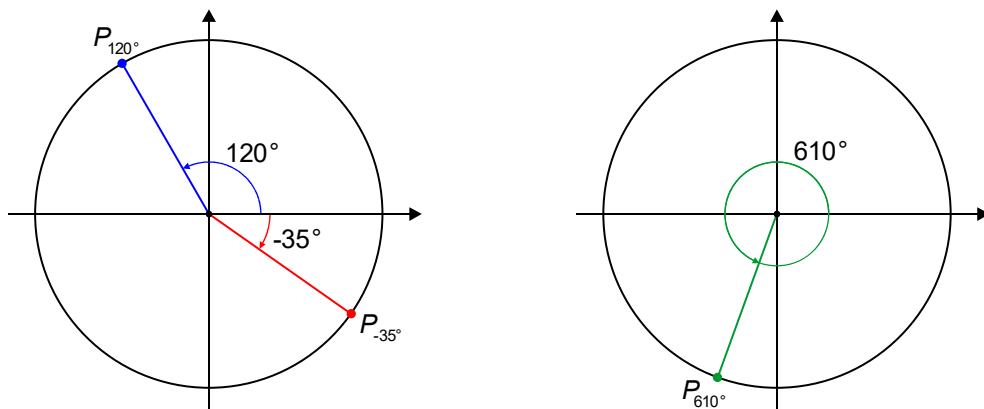
NB! Positiv omløbsretning er angivet med en rød pil på figuren.

Bemærkning 2

Kravet i definitionen for $\tan(v)$ er, at nævneren i brøken ikke må give 0. Derfor er tangens ikke defineret for vinkler, som er 90° plus evt. et helt multiplum af 180° .

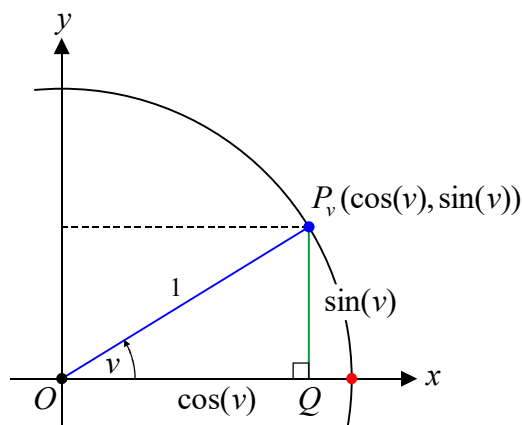
Eksempel 3

Lad os se på et par eksempler på vinkler og deres retningspunkter. På figuren til venstre er angivet retningspunktet for både vinklen 120° og -35° . Bemærk, at vinklen altid regnes ud fra den positive del af x -aksen. Desuden bemærkes, at da vinklen 120° er positiv, drejes i positiv omløbsretning (mod uret), mens der drejes i negativ omløbsretning (med uret) for at komme til retningspunktet for -35° . Endelig er på den højre figur vist retningspunktet for vinklen 610° . En så stor positiv vinkel betyder, at man drejer mere end én omgang rundt i positiv omløbsretning. Vi har nemlig: $610^\circ = 360^\circ + 250^\circ$.



□

Vi har i dette dokument set en *udvidet* definition af de trigonometriske funktioner i forhold til den definition, vi gav i det tidligere omtalte dokument, hvor vi definerede sinus, cosinus og tangens i en retvinklet trekant. Vi må her sikre os, at de to definitioner stemmer overens for vinkler v mellem 0 og 90° . Heldigvis er det nemt klaret. Betragt igen figuren med enhedscirklen for $0 < v < 90^\circ$. Retningspunktet P_v har $(\cos(v), \sin(v))$ som koordinater. Vi kan nemt tegne en retvinklet trekant $OQ P_v$. De to kateder har længderne henholdsvis $\cos(v)$ og $\sin(v)$, mens længden af hypotenusen er 1, fordi den er radius i en enhedscirkel. Det giver anledning til følgende to ligninger, som viser, at den nye definition stemmer overens med den gamle, når $0 < v < 90^\circ$:



$$\frac{\text{hosliggende katete}}{\text{hypotenusen}} = \frac{\cos(v)}{1} = \cos(v)$$

$$\frac{\text{modstående katete}}{\text{hypotenusen}} = \frac{\sin(v)}{1} = \sin(v)$$

Opgave 1

Benyt figuren med enhedscirklen på næste side til at aflæse værdierne for sinus og cosinus for vinklerne nedenfor og udfyld skemaet. *Hjælp:* Find retningspunkterne for hver af vinklerne og aflæs dets koordinater. Læg desuden mærke til *symmetrier*! Vi ser nærmere på sådanne i opgave 2 ...

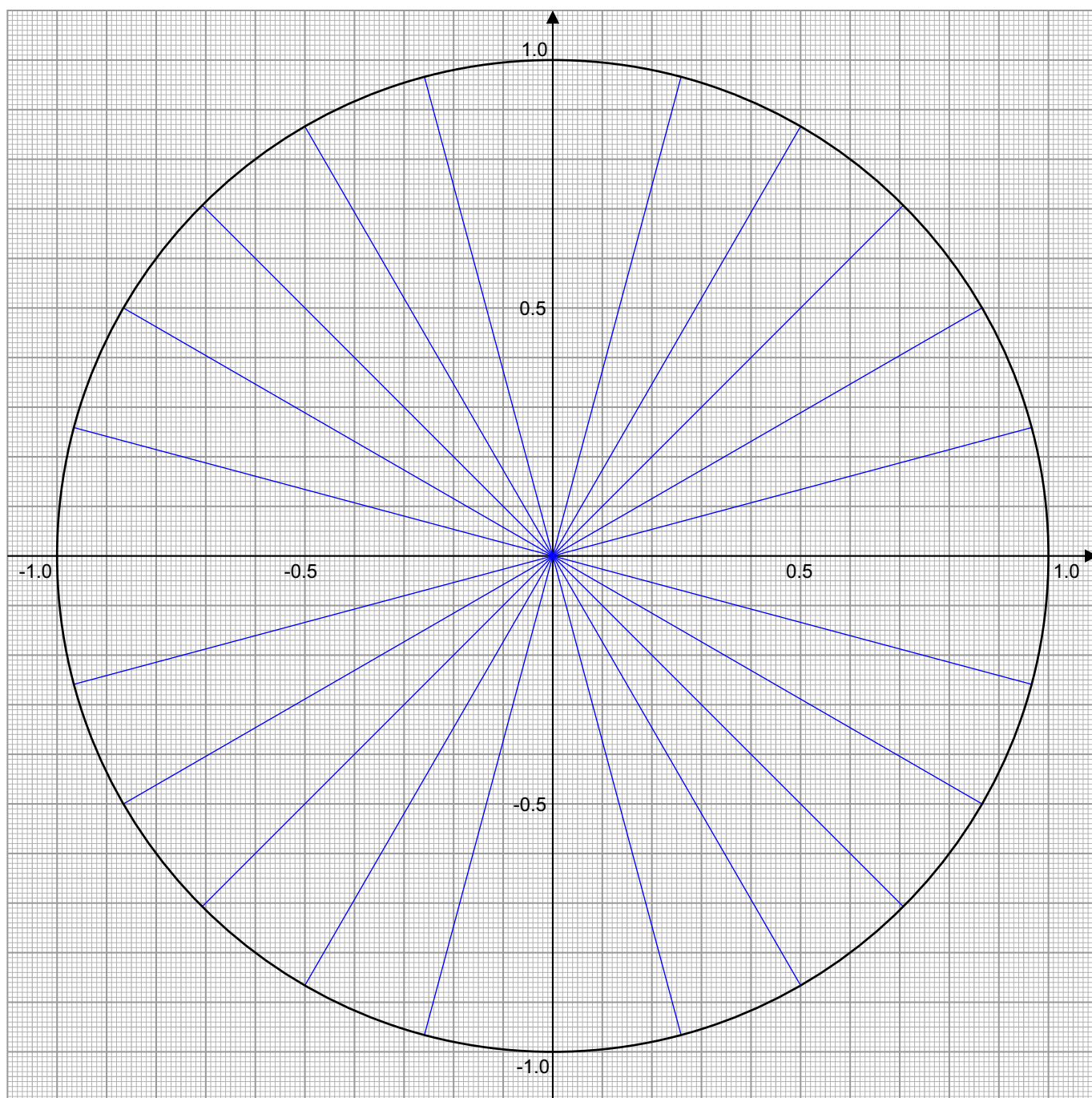
Vinkel v (grader)	0	15	30	45	60	75
$\cos(v)$						
$\sin(v)$						

Vinkel v (grader)	90	105	120	135	150	165
$\cos(v)$						
$\sin(v)$						

Vinkel v (grader)	180	195	210	225	240	255
$\cos(v)$						
$\sin(v)$						

Vinkel v (grader)	270	285	300	315	330	345
$\cos(v)$						
$\sin(v)$						

Aflæse cosinus og sinus til vinkler



Opgave 2

Der gælder en lang række relationer (formler) mellem trigonometriske funktioner. Prøv at gøre rede for følgende:

- a) $\sin(-v) = -\sin(v)$
- b) $\cos(-v) = \cos(v)$
- c) $\sin(v + 180^\circ) = -\sin(v)$
- d) $\cos(180^\circ - v) = -\cos(v)$

Hjælp: Tegn først en enhedscirkel. Vælg dernæst en vilkårlig (ikke trivial) vinkel v . Afsæt retningspunkterne for de vinkler, som er i spil på henholdsvis venstre og højre side i formelen. For at indse a) skal du for eksempel tegne retningspunkterne P_v og P_{-v} for en eller anden selvvalgt vinkel v . Hvad ser du af symmetrier?

Opgave 3

Den *trigonometriske grundligning*, undertiden kaldet "idiot-formlen", siger følgende:

$$(\cos(v))^2 + (\sin(v))^2 = 1$$

Gør rede for formlens rigtighed ved at betragte figuren nederst side 2 og benytte en meget velkendt formel i en retvinklet trekant ...

Opgave 4

- a) For hvilke vinkler v gælder $\sin(v) = 0$? *Hjælp:* Tag første en tur på enhedscirklen i positiv omløbsretning: Hvilke retningspunkter har en y -værdi, som er 0? Hvilke vinkler svarer det til. Tag herefter også en tur i negativ omløbsretning.
- b) For hvilke vinkler v gælder $\sin(v) = 1$?
- c) Hvorfor kan sinus og cosinus aldrig blive større end 1 eller mindre end 1?
- d) For hvilke vinkler v gælder $\cos(v) = 0$?

NB! For vinkler, hvor $\cos(v) = 0$, er tangens ikke defineret!

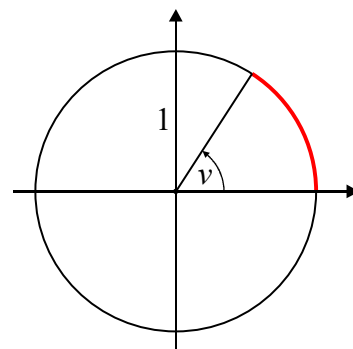
Opgave 5

For hvilke vinkler v gælder $\sin(v) = \cos(v)$? Hvad er tangens lig med for denne vinkel?

Opgave 6 (Vinkler i radianer)

Det er alment kendt, at vinkler kan regnes i *grader*, og at der på en hel omgang går 360 grader, skrevet 360° . Man kender ikke med sikkerhed begrundelsen for at vælge tallet 360 - det fortæller sig i historien. Der er nogle, som mener, at det kan have at gøre med babylonerne, som anvendte et 60-talsystem. Tallet 360 er i øvrigt ikke så tosset, for det har rigtig mange divisorer: 360, 180, 120, 90, 72, 60, 45, 40, 36, 30, 24, 20, 18, 15, 12, 10, 9, 8, 6, 5, 4, 3, 2, 1. Andre vinkelbegreber har været forsøgt, herunder *nygrader*, hvor der går 400 på en runde. Der er imidlertid et vinkelbegreb, som har en mere matematisk fundering, nemlig begrebet *radianer*. Det er defineret ved at der går 2π på en runde.

Nærmere bestemt er vinklen i radiantal defineret som længden af den cirkelbue på enhedscirklen, som vinklen spænder over, regnet med fortegn – dvs. positiv i positiv omløbsretning og negativ i negativ omløbsretning. Buen er vist med rødt på figuren til højre. Dette vinkelbegreb er matematisk set meget mere logisk end gradtal, hvilket især kommer til gode i differentialregningen, hvor der for eksempel gælder følgende smukke relation mellem to af de trigonometriske funktioner: $(\sin(x))' = \cos(x)$, hvis x vel at mærke regnes i radianer. Havde man anvendt et andet vinkelbegreb, skulle man have ganget højresiden med en uskøn konstant!



I det følgende skal du udfylde de tomme felter i nedenstående tabel for oversættelse af vinkler i gradtal og vinkler i radiantal.

Grader	Radianer
360	2π
180	
	$\frac{1}{2}\pi$
	$\frac{1}{3}\pi$
45	
30	
15	
1	
	$\frac{3}{2}\pi$
	0
-90	$-\frac{1}{2}\pi$
720	
	20π
-180	
	1
	1,8236

NB! Overvej hvad man skal gange med, når man går mod højre, altså fra gradtal til radiantal? Samme spørgsmål når man går mod venstre fra radiantal til gradtal.