En ligning for tangenten

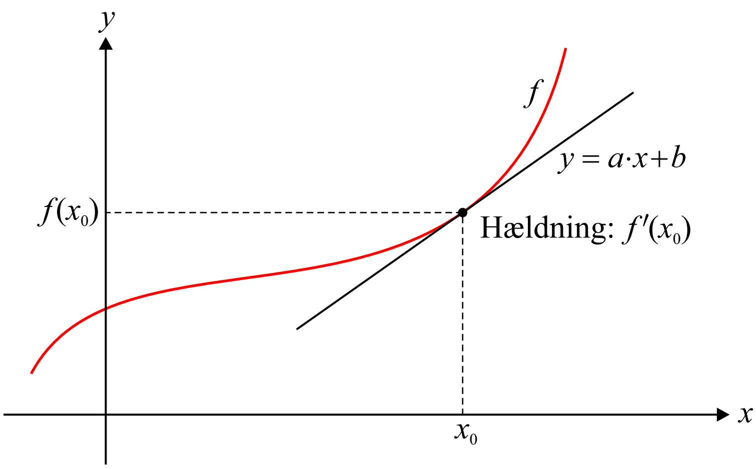
Vi vil i dette lille tillæg udlede en ligning for tangenten til grafen for en differentiabel funktion i et punkt og give et eksempel på udregning.

Sætning

Lad f være en funktion, som er differentiabel i punktet x_0. Da har tangenten til grafen for f i punktet $P(x_0, f(x_0))$ følgende ligning:

(1) $$y = f'(x_0)\cdot(x-x_0)+f(x_0)$$

Bevis: En (ikke lodret) linje har som bekendt en ligning på formen $y = a\cdot x + b$, hvor a er hældningskoefficienten og b er skæringen med y-aksen.



Da hældningen af tangenten til grafen for f i punktet $x = x_0$ er lig med $f'(x_0)$, har vi straks a, dvs. vi har:

(2) $$y = f'(x_0)\cdot x + b$$

For at bestemme b udnytter vi, at tangenten rører grafen for f i punktet $(x_0, f(x_0))$. Hvis vi indsætter punktet i (2), får vi:

(3) $$f(x_0) = f'(x_0)\cdot x_0 + b \quad \Leftrightarrow \quad f(x_0) - f'(x_0)\cdot x_0 = b$$

Dette udtryk for b indsætter vi i (2) og får:

(4) $$\begin{aligned} y &= f'(x_0)\cdot x + f(x_0) - f'(x_0)\cdot x_0 \\ &= f'(x_0)\cdot(x-x_0)+f(x_0) \end{aligned}$$

hvor vi i sidste skridt har sat $f'(x_0)$ udenfor parentes, da det er fælles faktor i første og sidste led. Dermed er det ønskede vist.

$\square$

Eksempel

Lad $f(x)=\frac{1}{2}x^3-x^2-3x+8$. Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet $P(2, f(2))$.

Løsning: Vi starter med at differentiere funktionen:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3\cdot\tfrac{1}{2}x^{3-1}-2\cdot x^{2-1}-3 \\ &= \tfrac{3}{2}x^2-2x-3 \end{aligned}$$

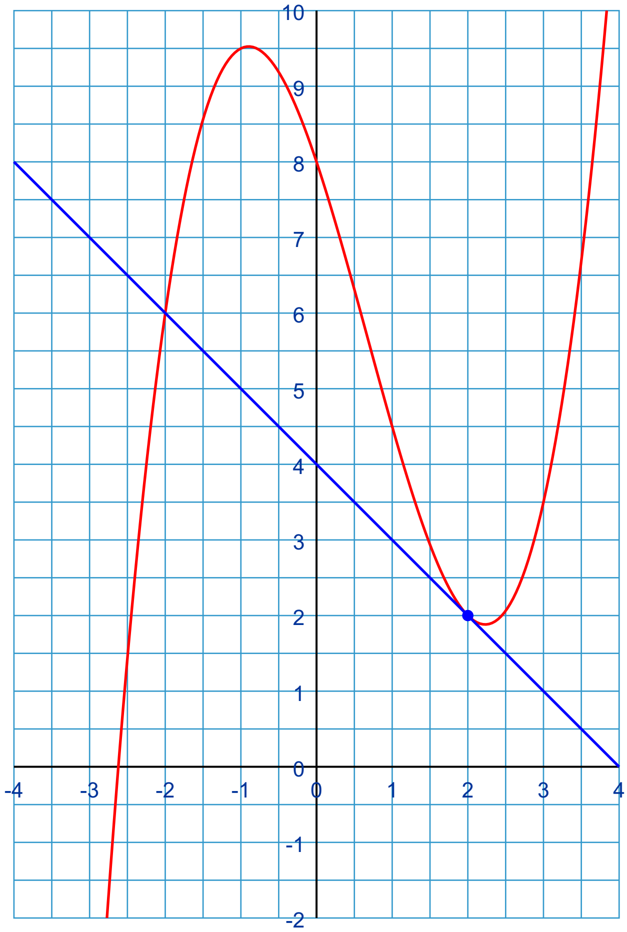
Vi får brug for både funktionsværdien og dens afledede i $x_0=2$:

$$\begin{aligned} f(2) &= \tfrac{1}{2}\cdot 2^3-2^2-3\cdot 2+8 \;=2 \\ f'(2) &= \tfrac{3}{2}\cdot 2^2-2\cdot 2-3 \;=\; -1 \end{aligned}$$

Tangentens ligning fås af (1):

$$\begin{aligned} y &= f'(x_0)\cdot(x-x_0)+f(x_0) \\ &= f'(2)\cdot(x-2)+f(2) \\ &= -1\cdot(x-2)+2 \\ &= -x+2+2 \\ &= -x+4 \end{aligned}$$

Dermed har tangenten ligningen: $y=-x+4$. Det passer pænt med figuren til højre.



□

Bemærkning

Tangenten er graf for en lineær funktion, som kaldes det *approksimerende førstegradspolynomium* i punktet x_0. I eksemplet ovenfor er det approksimerende førstegradspolynomium $t(x)=-x+4$. Det har den egenskab, at det er det polynomium af grad 1, som bedst tilnærmer (approksimerer) funktionen omkring $x_0=2$. I stedet for at sige polynomium af grad 1, kan man vælge at sige lineære funktion!