Differentialligninger
- separation af variable

Der er en særlig familie af differentialligninger, nemlig dem, som kaldes *separable*. En sådan differentialligning kan løses ved hjælp af en elegant metode kaldet *separation af variable-metoden*. Det skal vi se på i det følgende og blandt andet bruge metoden til at udlede den fuldstændige løsning til den logistiske differentialligning.

Definition 1

En differentialligning kaldes *separabel*, hvis den kan skrives på formen

(1) $$\frac{dy}{dx} = g(y) \cdot h(x)$$

hvor h er en funktion, som er kontinuert i et interval I og g er en funktion, som er kontinuert i et interval J. Desuden skal $g(y) \neq 0$ for alle $y \in J$.

Sætning 2

Løsningerne $y = f(x)$ til differentialligningen (1) er netop de samme som løsningerne $y = f(x)$ til ligningen

(2) $$\int \frac{1}{g(y)} dy = \int h(x)\,dx$$

Bemærkning 3

Hvis vi ubekymret betragter dy/dx som en brøk mellem to størrelser dy og dx, så kan vi gange med dx og dividere med $g(y)$ på begge sider af lighedstegnet i (1), så vi opnår alt med y på venstre side og alt med x på højre side af lighedstegnet:

$$\frac{dy}{dx} = g(y) \cdot h(x) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{g(y)} dy = h(x)\,dx \quad \Leftrightarrow \quad \int \frac{1}{g(y)} dy = \int h(x)\,dx$$

I sidste trin har vi sat det ubestemte integral på begge sider. Sådan kan man huske formlen. Men det er formelt set "snyd", for dy/dx er en differentialkvotient, som er en helhed, ikke en brøk mellem to størrelser. Senere i dette tillæg vil vi se et stringent bevis for sætning 2. Først skal vi dog se sætning 2 anvendt på et eksempel.

□

Eksempel 4

Betragt differentialligningen $\frac{dy}{dx} = y \cdot x^2$.

Vi kan sætte $g(y) = y$ og $h(x) = x^2$. Begge funktioner er defineret i hele *R*. Men for at der skal være tale om en separabel differentialligning, skal vi også have $g(y) = y \neq 0$. Det står dog ikke som betingelse i vores differentialligning. Derfor vælger vi at behandle tilfældet $y = 0$ og tilfældet $y \neq 0$ hver for sig.

I. Tilfældet $y = 0$:

Vi undersøger ved simpel indsættelse, om nulfunktionen $y = f(x) = 0$ er en løsning. Venstresiden: Differentialkvotienten af nulfunktionen er klart 0. Højresiden: $0 \cdot x^2 = 0$. Da begge sider giver 0 for alle *x*, er nulfunktionen altså en løsning.

II. Tilfældet $y \neq 0$:

Nu har vi en separabel differentialligning, hvor vi kan benytte sætning 2. Vi skal løse:

$$\int \frac{1}{y}\, dy = \int x^2\, dx$$

Vi finder stamfunktionerne til hver af integranderne og husker en arbitrær konstant c_1 på en af siderne:

$$\ln(|y|) = \tfrac{1}{3}x^3 + c_1 \quad \Leftrightarrow \quad e^{\ln(|y|)} = e^{\frac{1}{3}x^3 + c_1} \quad \Leftrightarrow \quad |y| = e^{\frac{1}{3}x^3} \cdot e^{c_1}$$

hvor vi i første skridt har taget den naturlige eksponentialfunktion på begge sider. I andet skridt har vi udnyttet, at virkningen af den naturlige eksponentialfunktion og den naturlige logaritmefunktion ophæver hinanden. Endvidere er en potensregel brugt på højre side af lighedstegnet. Nu sætter vi $c_2 = e^{c_1}$. Når c_1 gennemløber alle reelle tal, vil c_2 gennemløbe alle *positive* reelle tal, dvs. $c_2 \in R^+$. Dermed bliver sidste ligning til:

$$|y| = c_2 \cdot e^{\frac{1}{3}x^3} \quad \Leftrightarrow \quad y = \pm c_2 \cdot e^{\frac{1}{3}x^3}$$

hvor vi har brugt, at det, der står under numerisktegnet, altså *y*, må være lig med plus eller minus det, der står på højre side. Man kan nu udskifte $\pm c_2$ med en ny arbitrær konstant c_3. Når c_2 gennemløber alle positive tal, vil c_3 gennemløbe alle reelle tal, undtagen 0. Vi har altså fundet samtlige løsninger til

$$f(x) = c_3 \cdot e^{\frac{1}{3}x^3} \quad \text{hvor } c_3 \neq 0$$

Vi er nu færdige med tilfælde II.

Hvis vi et øjeblik finder på at sætte $c_3 = 0$ i det sidste udtryk, så fås $f(x) = 0$, hvilket var vores løsning fra tilfælde I. Dermed ser vi vores snit til at kombinere løsningerne fra de to tilfælde på en elegant måde. Vi ser, at den fuldstændige løsning til den oprindelige differentialligning kan skrives som

$$f(x) = c \cdot e^{\frac{1}{3}x^3} \quad \text{hvor } c \in R$$

□

Eksempel 5

Betragt differentialligningen $\frac{dy}{dx} = \frac{e^x}{2y}, \ y \neq 0$.

Den giver ifølge sætning 2 anledning til følgende:

$$\int 2y\,dy = \int e^x dx \quad \Leftrightarrow \quad y^2 = e^x + c \quad \Leftrightarrow \quad y = \sqrt{e^x + c} \ \vee \ y = -\sqrt{e^x + c}$$

hvor c er en arbitrær konstant. Hvis $c \geq 0$, så er begge funktioner defineret for alle $x \in R$, fordi udtrykket under kvadratrodsregnet da er positivt. Hvis $c < 0$ må vi sikre os, at $e^x + c > 0$, hvilket er det samme som $e^x > -c$ eller $x > \ln(-c)$.

□

Øvelse 6

Benyt separation af variable til at løse differentialligningen $\frac{dy}{dx} = 2xy$.

Øvelse 7

Benyt separation af variable til at løse differentialligningen $\frac{dy}{dx} = x \cdot e^{-y}$.

Øvelse 8

Vi har tidligere set, at den fuldstændige løsning til den eksponentielle vækst repræsenteret ved differentialligningen $y' = k \cdot y$, hvor k er en reel konstant, er lig med $f(x) = c \cdot e^{k \cdot x}$, hvor c er en arbitrær konstant. Benyt separation af variable metoden til at bevise det. *Hjælp*: Benyt $g(y) = y$ og $h(x) = k$.

Øvelse 9

Vi har tidligere set, at den fuldstændige løsning til den forskudte eksponentielle vækst repræsenteret ved differentialligningen $y' = b - a \cdot y$, hvor $a \neq 0$ og $b \in R$, er lig med $f(x) = \frac{b}{a} + c \cdot e^{-a \cdot x}$, hvor c er en arbitrær konstant. Benyt separation af variable metoden til at bevise det. *Hjælp*: Benyt $g(y) = b - a \cdot y$ og $h(x) = 1$. Bemærk, at $f(x) = \frac{a}{b}$ må undersøges for sig selv. Man får desuden brug for at foretage substitutionen $t = b - a \cdot y$ i et integral.

Bevis for sætning 2 :

Da h er kontinuert, har funktionen en stamfunktion, som vi vil kalder H :

(3) $$H(x) = \int h(x)\,dx \quad \text{dvs.} \quad H'(x) = h(x)$$

Da g er kontinuert og forskellig fra 0, vil også dens reciprokke funktion $1/g(y)$ være kontinuert. Derfor har sidstnævnte en stamfunktion, som vi vil kalde G :

(4) $$G(y)=\int \frac{1}{g(y)}\,dy \quad \text{dvs.} \quad G'(y)=\frac{1}{g(y)}$$

Tilbage til vores differentialligning, som vi omskriver:

(5) $$\frac{dy}{dx} = g(y)\cdot h(x) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{g(y)}\cdot\frac{dy}{dx} = h(x)$$

Antag, at $y=f(x)$ er en løsning til (5). Det betyder, at:

(6) $$\frac{1}{g(f(x))}\cdot f'(x) = h(x)$$

Ifølge (4) kan vi omskrive første led på venstre side på følgende måde:

(7) $$G'(f(x))\cdot f'(x) = h(x)$$

Her opdager vi til vores glæde, at venstre siden er differentialkvotienten for den sammensatte funktion $(G\circ f)(x)=G(f(x))$.

(8) $$\left(G(f(x))\right)' = H'(x)$$

hvor vi samtidigt har udskiftet $h(x)$ med $H'(x)$, jf. (3). Vi trækker $H'(x)$ fra på begge sider og bruger derefter differensreglen for differentiation. Den siger, at man kan differentiere en differens mellem to funktioner ved at differentiere hver funktion for sig og derefter trække fra.

(9) $$\left(G(f(x))\right)' - H'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(G(f(x))-H(x)\right)' = 0$$

Men en funktion, hvis afledede er 0 for alle *x* (i et interval), er nødt til at være en konstant funktion. Vi har altså:

(10) $$G(f(x))-H(x)=k$$

for en eller anden konstant *k*. Ovenstående viser, at $y=f(x)$ er løsning til:

(11) $$G(y)-H(x)=k \quad \Leftrightarrow \quad G(y)=H(x)+k \quad \Leftrightarrow \quad \int\frac{1}{g(y)}\,dy=\int h(x)\,dx+k$$

som netop udtrykker (2). Bemærk, at konstanten er ligegyldig, da der er tale om et ubestemt integral. Bemærk desuden, at vi også kan komme baglæns: Hvis vi ved, at $y=f(x)$ er en løsning til (11), så er den også løsning til (5). Dermed er sætningen bevist.

□

Separation af variable-metoden kan bruges til at løse en hel del differentialligninger, herunder de tre velkendte typer $y'=k\cdot y$ (eksponentiel vækst), $y'=b-a\cdot y$ (forskudt eksponentiel vækst) samt $y'=y\cdot(b-a\cdot y)$ (logistisk vækst). For en ordens skyld skal det nævnes, at det *ikke* er alle differentialligninger, som kan separeres. Bare ét eksempel er:

(12) $$\frac{dy}{dx} = x+y$$

Højresiden kan ikke skrives som et produkt at en funktion i *y* og en funktion i *x*.

Lemma 10

Vi har følgende dekomposition i partialbrøker:

$$\frac{1}{y\cdot(b-a\cdot y)} = \frac{\frac{1}{b}}{y} + \frac{\frac{a}{b}}{b-a\cdot y}$$

Bevis: Vi undersøger, om der findes tal A og B, så:

(13) $$\frac{1}{y\cdot(b-a\cdot y)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{b-a\cdot y}$$

Som fællesnævner for de to brøker på højre side kan bruges $y\cdot(b-a\cdot y)$. Vi får:

$$\begin{aligned}\frac{1}{y\cdot(b-a\cdot y)} &= \frac{A}{y} + \frac{B}{b-a\cdot y}\\[2ex] &= \frac{A\cdot(b-a\cdot y)}{y\cdot(b-a\cdot y)} + \frac{y\cdot B}{y\cdot(b-a\cdot y)}\\[2ex] &= \frac{A\cdot(b-a\cdot y)+B\cdot y}{y\cdot(b-a\cdot y)}\\[2ex] &= \frac{A\cdot b-A\cdot a\cdot y+B\cdot y}{y\cdot(b-a\cdot y)}\\[2ex] &= \frac{A\cdot b+(B-A\cdot a)\cdot y}{y\cdot(b-a\cdot y)}\end{aligned}$$

hvor vi i anden linje har forlænget hver brøk, så vi får fællesnævneren. I tredje linje sættes på fælles brøkstreg. I fjerde linje ganges ind i parentes. I femte linje samles led med rene tal og led med y. Vi har samme nævner på venstre og højre side. Hvis brøkerne skal være ens, skal tællerne derfor være ens. Og det skal de vel at mærke være for *alle* y. Det betyder, at vi må have, at

(14) $$A\cdot b=1 \quad \text{og} \quad B-A\cdot a=0$$

Første ligning giver $A=\frac{1}{b}$. Anden ligning giver $B=A\cdot a=\frac{1}{b}\cdot a=\frac{a}{b}$.

□

Sætning 11

Givet den logistiske differentialligning $y'=y\cdot(b-a\cdot y)$, hvor a og b er reelle konstanter med $a\neq 0$. Den fuldstændige løsning til differentialligningen er følgende:

$$f(x)=0 \quad \text{og} \quad f(x) = \frac{\frac{b}{a}}{1+c\cdot e^{-b\cdot x}}$$

hvor $c\in R$ er en arbitrær konstant.

Bevis: For det første ser vi ved simpel indsættelse på højre og venstre side i differentialligningen, at $y = f(x) = 0$ er en løsning. Det samme kan siges om $y = f(x) = \frac{b}{a}$. For at finde eventuelt andre løsninger kan vi herefter antage, at $y \neq 0$ og af $y \neq \frac{b}{a}$. Ved brug af separation af variable (sætning 2) med funktionerne $g(y) = y \cdot (b - a \cdot y)$ og $h(x) = 1$ ser vi, at vi følgende:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} = y \cdot (b - a \cdot y) \quad &\Leftrightarrow \quad \int \frac{1}{y \cdot (b - a \cdot y)} \, dy = \int 1 \cdot dx \\
&\Leftrightarrow \quad \int \left(\frac{\frac{1}{b}}{y} + \frac{\frac{a}{b}}{b - a \cdot y} \right) dy = \int 1 \cdot dx \\
&\Leftrightarrow \quad \tfrac{1}{b} \cdot \int \frac{1}{y} dy + \tfrac{a}{b} \cdot \int \frac{1}{b - a \cdot y} = x + c_1 \\
&\Leftrightarrow \quad \tfrac{1}{b} \cdot \ln|y| + \tfrac{a}{b} \cdot \left(-\tfrac{1}{a} \cdot \ln|b - a \cdot y| \right) = x + c_1 \\
&\Leftrightarrow \quad \tfrac{1}{b} \cdot \ln|y| - \tfrac{1}{b} \cdot \ln|b - a \cdot y| = x + c_1 \\
&\Leftrightarrow \quad \ln|b - a \cdot y| - \ln|y| = -b \cdot x - b \cdot c_1 \\
&\Leftrightarrow \quad \ln\left| \frac{b - a \cdot y}{y} \right| = -b \cdot x - b \cdot c_1 \\
&\Leftrightarrow \quad \left| \frac{b - a \cdot y}{y} \right| = e^{-b \cdot x - b \cdot c_1} \\
&\Leftrightarrow \quad \left| \frac{b}{y} - a \right| = e^{-b \cdot x - b \cdot c_1} \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{b}{y} - a = \pm e^{-b \cdot x - b \cdot c_1} \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{b}{y} = a \pm e^{-b \cdot c_1} \cdot e^{-b \cdot x} \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{\frac{b}{a}}{y} = 1 \pm \frac{e^{-b \cdot c_1}}{a} \cdot e^{-b \cdot x} \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{\frac{b}{a}}{y} = 1 + c \cdot e^{-b \cdot x} \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{y}{\frac{b}{a}} = \frac{1}{1 + c \cdot e^{-b \cdot x}} \\
&\Leftrightarrow \quad y = \frac{\frac{b}{a}}{1 + c \cdot e^{-b \cdot x}}
\end{aligned}$$

Trin 2: Lemma 10 er benyttet. Trin 4: Løs øvelse 12 nedenfor. Trin 5: Der ganges med $-b$ på begge sider af lighedstegnet. Trin 6: En logaritmeregel er benyttet. Trin 12: Der divideres med a på begge sider af lighedstegnet. Trin 13: Når c_1 gennemløber alle reelle tal, vil $\pm e^{-b\cdot c_1} / a$ gennemløbe alle tal undtagen 0. Vi kalder denne arbitrære konstant for c. Vi kan også godt tillade $c = 0$, for sætter vi det ind i det sidste udtryk, svarer det til løsningen $f(x) = \frac{b}{a}$, som vi allerede har undersøgt separat. Det ønskede er dermed bevist.

□

Øvelse 12

Benyt substitutionen $t = b - a \cdot y$ til at vise, at $\int \frac{1}{b - a \cdot y}\, dy \;=\; -\frac{1}{a} \cdot \ln|b - a \cdot y|$.