Projektion af vektor på vektor

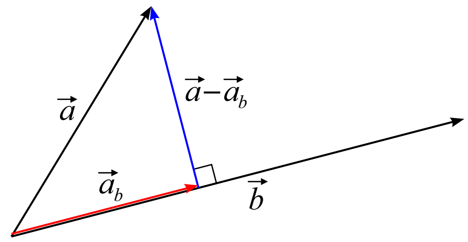
Nedenstående er et alternativt og smartere bevis for formlen for projektionen af en vektor på en vektor, end det bevis, der er givet i lærebogen. Det smukke i nedenstående er, at det kun gør brug af de algebraiske egenskaber for vektorer. Sætning er uafhængig af, om der er tale om vektorer i planen eller i rummet.

Sætning

Lad $\vec{b}$ være en egentlig vektor. Projektionen af en vektor $\vec{a}$ på vektoren $\vec{b}$ er givet ved følgende udtryk:

(1) $$\vec{a}_b = \left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\right)\cdot\vec{b}$$

Bevis: Projektionen $\vec{a}_b$ af $\vec{a}$ på $\vec{b}$ er klart ensrettet med sidstnævnte vektor, dvs. der findes en konstant *t*, så $\vec{a}_b = t\cdot\vec{b}$. Projektionsvektoren er endvidere karakteriseret ved, at differensvektoren $\vec{a}-\vec{a}_b$ enten er nulvektor eller står vinkelret på $\vec{b}$.



Det er ensbetydende med, at skalarproduktet mellem $\vec{a}-\vec{a}_b$ og $\vec{b}$ er 0. Denne observation kan vi bruge til at bestemme konstanten *t*:

$$(\vec{a}-\vec{a}_b)\cdot\vec{b}=0 \quad\Leftrightarrow\quad (\vec{a}-t\cdot\vec{b})\cdot\vec{b}=0 \quad\Leftrightarrow\quad \vec{a}\cdot\vec{b}-t\cdot\vec{b}\cdot\vec{b}=0$$

$$\Leftrightarrow\quad \vec{a}\cdot\vec{b}-t\cdot|\vec{b}|^2=0 \quad\Leftrightarrow\quad t = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}$$

Hvis vi indsætter denne værdi for *t* i udtrykket $\vec{a}_b = t\cdot\vec{b}$, fås den ønskede formel.

□

Bemærkning: Det komplicerede udtryk i parentesen i (1) er blot et tal! Skalarproduktet i tælleren er nemlig et tal, og det samme er længden af $\vec{b}$ opløftet til 2. potens.

Eksempel

Bestem projektionen af $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ på $\vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix}$.

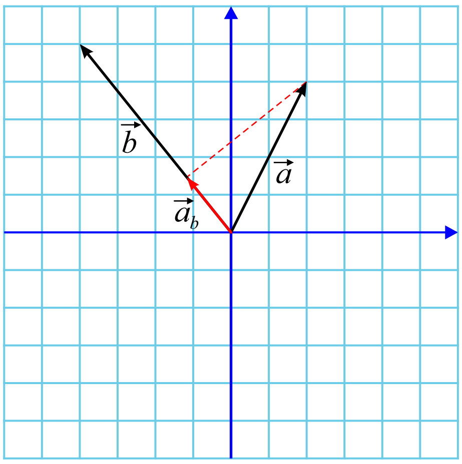
Løsning: Lad os først regne opgaven i hånden: Først udregnes skalarproduktet mellem de to vektorer og dernæst længden af $\vec{b}$ i 2. potens:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \;=\; \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix} \;=\; 2 \cdot (-4) + 4 \cdot 5 \;=\; 12$$

$$|\vec{b}|^2 \;=\; \left(\sqrt{(-4)^2 + 5^2}\right)^2 \;=\; \left(\sqrt{41}\right)^2 \;=\; 41$$

Heraf fås ved indsættelse i (1):

$$\vec{a}_b \;=\; \left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2}\right) \cdot \vec{b} \;=\; \frac{12}{41} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} \frac{-48}{41} \\ \frac{60}{41} \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} -1\frac{7}{41} \\ 1\frac{19}{41} \end{pmatrix}$$



I Maple kan man løse opgaven således:

restart

with(*Gym*) :

$\vec{a} := \langle 2, 4 \rangle : \quad \vec{b} := \langle -4, 5 \rangle :$

$$proj\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \begin{bmatrix} -\frac{48}{41} \\ \frac{60}{41} \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{at 5 digits}} \begin{bmatrix} -1.1707 \\ 1.4634 \end{bmatrix}$$