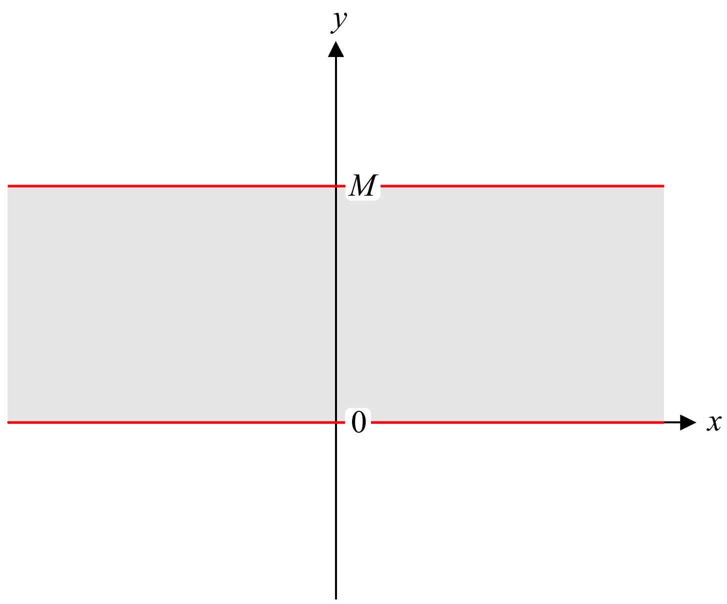
Logistisk vækst – et bevis

I dette tillæg vil vi kigge på følgende differentialligning for den logistiske vækst:

(1) $$y' = a \cdot y \cdot (M - y)$$

hvor M og a er positive konstanter. Man ser straks ved indsættelse, at de konstante funktioner $f(x) = 0$ og $f(x) = M$ begge er løsninger, idet både venstre og højre side i differentialligningen giver 0 her. Graferne for disse to løsninger er indtegnet med rødt i x-y-koordinatsystemet nedenfor. Man kan vise, at der igennem hvert punkt i x-y-planen går netop én løsningskurve til (1). Derfor må alle andre løsningskurver til (1) enten ligge i området, hvor $y > M$, $0 < y < M$ eller $y < 0$. I sætning 4 på næste side vil vi kun koncentrere os om løsningerne i området $0 < y < M$, som er markeret med gråt nedenfor. Før vi kan fremsætte sætningen, skal vi dog bevise et par lemmaer (hjælpesætninger).



Lemma 1 (Fremstilling i partialbrøker)

$$\frac{M}{y \cdot (M - y)} = \frac{1}{y} + \frac{1}{M - y}$$

Bevis: Vi regner på højresiden og ser, om vi kan få venstresiden. Først ser vi, at vi kan bruge $y \cdot (M - y)$ som fællesnævner, derefter forlænger vi hver brøk, så vi får denne fællesnævner:

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{M - y} = \frac{1 \cdot (M - y)}{y \cdot (M - y)} + \frac{1 \cdot y}{y \cdot (M - y)} = \frac{M - y + y}{y \cdot (M - y)} = \frac{M}{y \cdot (M - y)}$$

□

Lemma 2

For $0 < y < M$ gælder: $\displaystyle\int \frac{1}{M-y}\,dy \;=\; -\ln(M-y)$

Bevis: Man kan selvfølgelig anvende integration ved substitution, men det er nemmere bare at differentiere højresiden og vise, at det giver integranden, altså udtrykket under integraltegnet.

$$\left(-\ln(M-y)\right)' \;=\; -\left(\ln(M-y)\right)' \;=\; -\frac{1}{M-y}\cdot(-1) \;=\; \frac{1}{M-y}$$

hvor vi har benyttet reglen for differentiation af sammensat funktion.

□

Bemærkning 3

Bemærk, at betingelsen $0 < y < M$ sikrer, at vi ikke behøver sætte numerisk tegn om udtrykket $M-y$, da $\ln|M-y| \;=\; \ln(M-y)$. Det udnytter vi også i næste sætning.

□

Sætning 4 (Løsning til logistisk differentialligning)

Givet den logistiske differentialligning $y' = a\cdot y\cdot(M-y)$, hvor a og M er positive konstanter. Samtlige løsninger, som opfylder $0 < y < M$, er da på formen:

$$f(x) \;=\; \frac{M}{1+c\cdot e^{-M\cdot a\cdot x}}$$

hvor $c \in R^{+}$ er en arbitrær konstant.

Bevis: Vi skal benytte *separation af variable metoden*.

$$\frac{dy}{dx} \;=\; a\cdot y\cdot(M-y)$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{1}{y\cdot(M-y)}\,dy \;=\; a\cdot dx$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{M}{y\cdot(M-y)}\,dy \;=\; M\cdot a\cdot dx$$

Der ganges med M på begge sider.

(fortsættes) ...

(fortsat)...

$\Updownarrow$

$$\int \frac{M}{y\cdot(M-y)}\,dy \;=\; \int M\cdot a\cdot dx$$

$\Updownarrow$

$$\int\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{M-y}\right)dy \;=\; \int M\cdot a\cdot dx$$

Lemma 1 benyttes.

$\Updownarrow$

$$\int \frac{1}{y}\,dy + \int \frac{1}{M-y}\,dy \;=\; \int M\cdot a\cdot dx$$

Sumreglen for integraler benyttes.

$\Updownarrow$

$$\ln(y) - \ln(M-y) \;=\; M\cdot a\cdot x + c_1$$

Lemma 2 bruges m.m.

$\Updownarrow$

$$-\ln(y) + \ln(M-y) \;=\; -M\cdot a\cdot x - c_1$$

Der ganges med -1 på begge sider af ligହedstegnet, så alle led skifter fortegn. c_1 er en arbitrær reel konstant.

$\Updownarrow$

$$\ln\left(\frac{M-y}{y}\right) \;=\; -M\cdot a\cdot x - c_1$$

En logaritmeregel bruges.

$\Updownarrow$

$$\frac{M-y}{y} \;=\; e^{-M\cdot a\cdot x - c_1}$$

Den naturlige eksponentialfunktion tages på begge side …

$\Updownarrow$

$$\frac{M}{y} - \frac{y}{y} \;=\; e^{-M\cdot a\cdot x}\cdot e^{-c_1}$$

Der sættes på hver sin brøkstreg og en potensregel benyttes.

$\Updownarrow$

$$\frac{M}{y} - 1 \;=\; c\cdot e^{-M\cdot a\cdot x}$$

Vi indfører den nye arbitrære konstant $c = e^{-c_1}$, som dog kun gennemløber alle positive tal (Overvej).

$\Updownarrow$

$$\frac{M}{y} \;=\; 1 + c\cdot e^{-M\cdot a\cdot x}$$

$\Updownarrow$

$$M \;=\; y\cdot\left(1 + c\cdot e^{-M\cdot a\cdot x}\right)$$

Vi ganger med y på begge sider.

$\Updownarrow$

$$\frac{M}{1 + c\cdot e^{-M\cdot a\cdot x}} \;=\; y$$

Vi dividerer med parentesen på begges sider.

Hvorved det ønskede er vist.

□

Eksempel 5

Betragt den logistiske differentialligning: $y' = 0{,}00001 \cdot y \cdot (3000 - y)$. Bestem den løsning, som opfylder $f(0) = 500$.

Løsning: Vi har $a = 0{,}00001$ og $M = 3000$. Ifølge sætning 4 er den fuldstændige løsning til differentialligningen med betingelsen $0 < y < M$ følgende:

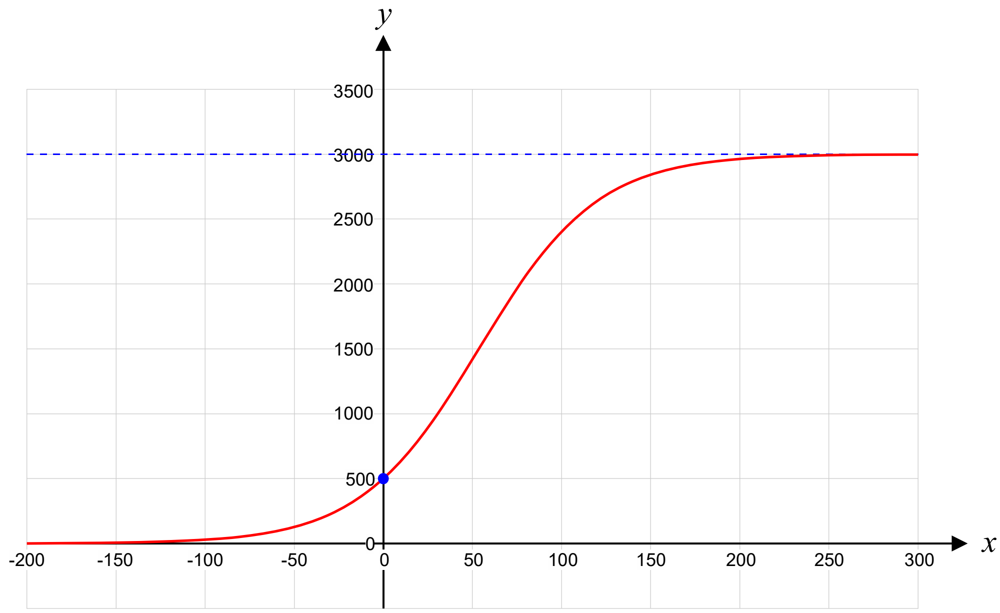
(2) $$f(x) \;=\; \frac{M}{1 + c \cdot e^{-M \cdot a \cdot x}} \;=\; \frac{3000}{1 + c \cdot e^{-3000 \cdot 0{,}00001 \cdot x}} \;=\; \frac{3000}{1 + c \cdot e^{-0{,}03x}}$$

Vi indsætter nu begyndelsesbetingelsen for at bestemme c.

$$500 \;=\; \frac{3000}{1 + c \cdot e^{-0{,}03 \cdot 0}} \quad \Leftrightarrow \quad 500 \;=\; \frac{3000}{1 + c} \quad \Leftrightarrow \quad 500 \cdot (1 + c) = 3000$$

$$\Leftrightarrow \quad 500 + 500c = 3000 \quad \Leftrightarrow \quad 500c = 2500 \quad \Leftrightarrow \quad c = \frac{2500}{500} = 5$$

Dvs. vi har den partikulære løsning: $f(x) \;=\; \dfrac{3000}{1 + 5 \cdot e^{-0{,}03x}}$. Grafen er vist herunder.



□

Bemærkning 6 (Ekstra for de interesserede)

Ovenfor har vi kun betragtet de løsninger, som opfylder betingelsen $0 < y < M$. Man kan vise, at den fuldstændige løsning til differentialligningen $y' = a \cdot y \cdot (M - y)$, uden denne ekstra betingelse er på formen

$$f(x) = 0 \quad \vee \quad f(x) \;=\; \frac{M}{1 + c \cdot e^{-M \cdot a \cdot x}}$$

hvor $c \in R$ (altså ikke bare mængden af positive tal).

Dog skal det nævnes, at hvis c i udtrykket til højre er negativ, skal definitionsmængden indskrænkes, fordi nævneren i udtrykket ovenfor da kan give 0. Grafer for partikulære løsninger skal pr. definition altid være sammenhængende, så man vælger som definitionsmængde det interval, hvori det angivne punkts x-koordinat befinder sig. Udover den konstante løsning $f(x)=0$ haves også den konstante løsning $f(x)=M$, svarende til $c=0$.

Hvis vi for eksempel kigger på differentialligningen fra eksempel 5, men med begyndelsesbetingelsen $f(0)=4000$, så får vi følgende værdi for c ved indsættelse:

$$4000 = \frac{3000}{1+c\cdot e^{-0,03\cdot 0}} \quad\Leftrightarrow\quad 4000 = \frac{3000}{1+c} \quad\Leftrightarrow\quad 4000\cdot(1+c)=3000$$
$$\Leftrightarrow\quad 4000+4000c=3000 \quad\Leftrightarrow\quad 4000c=-1000 \quad\Leftrightarrow\quad c=-0.25$$

hvilket giver den partikulære løsning: $f(x) = \dfrac{3000}{1-0,25\cdot e^{-0,03x}}$.

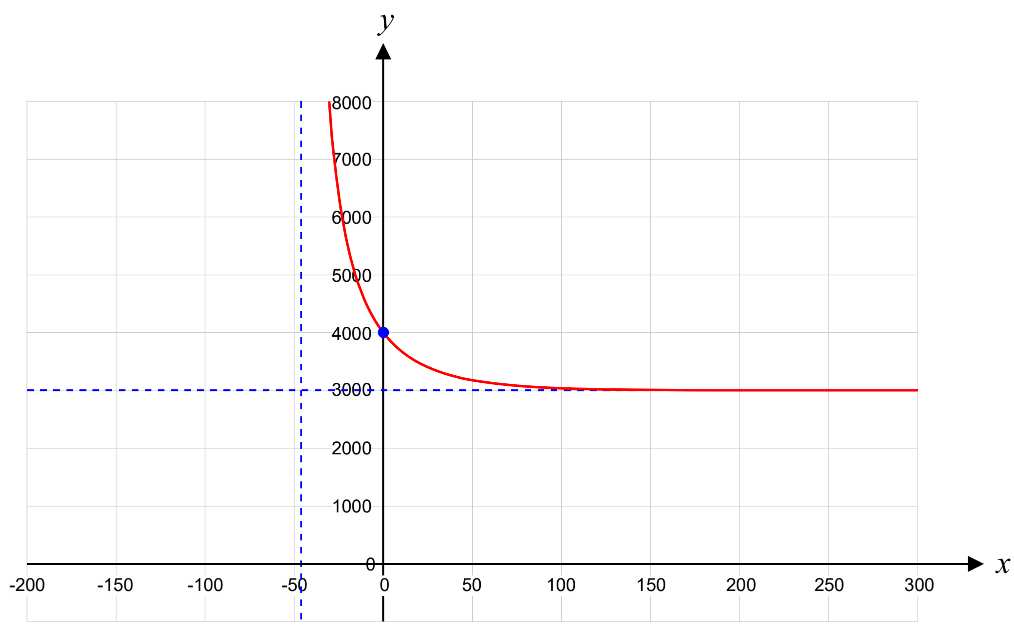
For at bestemme definitionsmængden undersøger vi, hvornår nævneren giver 0:

$$1-0,25\cdot e^{-0,03x}=0 \quad\Leftrightarrow\quad 1=0,25\cdot e^{-0,03x} \quad\Leftrightarrow\quad 4=e^{-0,03x}$$
$$\Leftrightarrow\quad \ln(4)=-0,03x \quad\Leftrightarrow\quad x = \frac{\ln(4)}{-0,03} = -46,20981203$$

Værdien adskiller R i de to intervaller $]-\infty;-46,2[$ og $]-46,2;\infty[$. Da begyndelsespunktet ligger i det sidstnævnte interval, har vi den partikulære løsning:

$$f(x) = \frac{3000}{1-0,25\cdot e^{-0,03x}} \quad \text{for} \quad x>-46,2$$

Løsningskurven ser således ud:



□