Logistisk vækst – eksempel med bakteriekultur

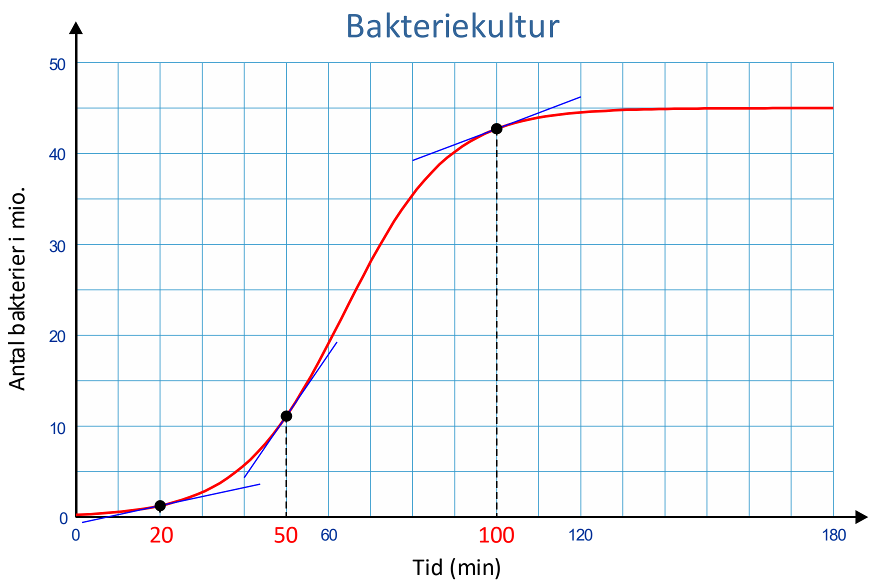
Den eksponentielle vækst er velkendt. Den overordnede begrundelse for, at den ofte forekommer i forbindelse med forskellige populationers udvikling er, at der her er tale om en *konstant procentvis vækst*. Men vi ved også, at populationer ikke kan vokse i det uendelige. Den erkendelse havde den belgiske matematiker *Pierre François Verhulst* (1804-1849) også gjort sig, da han en vinterdag i 1833 sad på sit studerekammer i Bruxelles. Du kan læse mere om denne spændende historie i [1]. For at gøre en lang historie kort, så ledte Verhulst efter en funktion, som bedst kan beskrive udviklingen af en population, når resurserne gradvist udtømmes. Han kom frem til den funktion, som vi i dag kalder for en *logistisk udvikling*. Funktionen kan se ud på lidt forskellig måde, blandt andet således:

Pierre François Verhulst (1804-1849)
[Public Domain] Wikimedia Commons.

(1) $$N(t) = \frac{M}{1+c\cdot e^{-a\cdot M\cdot t}}$$

Funktionen har tre frie parametre. Hvis man har en række dataværdier indeholdende populationsstørrelser til forskellige tidspunkter, kan man for eksempel bruge et CAS-værktøj til at foretage en logistisk regression, med henblik på at afgøre, om datapunkterne tilnærmelsesvist følger en logistisk kurve eller ej. I det følgende vil vi blot antage, at en bakteriekulturs udvikling kan beskrives med den logistiske forskrift (1) med følgende parametre: $M = 45\cdot 10^6$, $c = 175$ og $a = 1{,}8\cdot 10^{-9}$. Tiden t regnes i minutter.

(2) $$N(t) = \frac{45\cdot 10^6}{1+175\cdot e^{-0{,}081\cdot t}}$$



På forrige side er grafen for den logistiske vækst tegnet. Vi ser, at bakteriekulturen godt kan se ud til at vokse tilnærmelsesvist eksponentielt i begyndelsen. Derefter flader kurven ud som en følge af de begrænsede resurser. Det kan være mangel på føde, plads eller lignende. På figuren er tangenterne til grafen til tidspunkterne 20, 50 og 100 minutter indtegnet. Tangenternes hældning angiver væksthastighederne til de pågældende tidspunkterne. I et CAS-værktøj finder vi nemt:

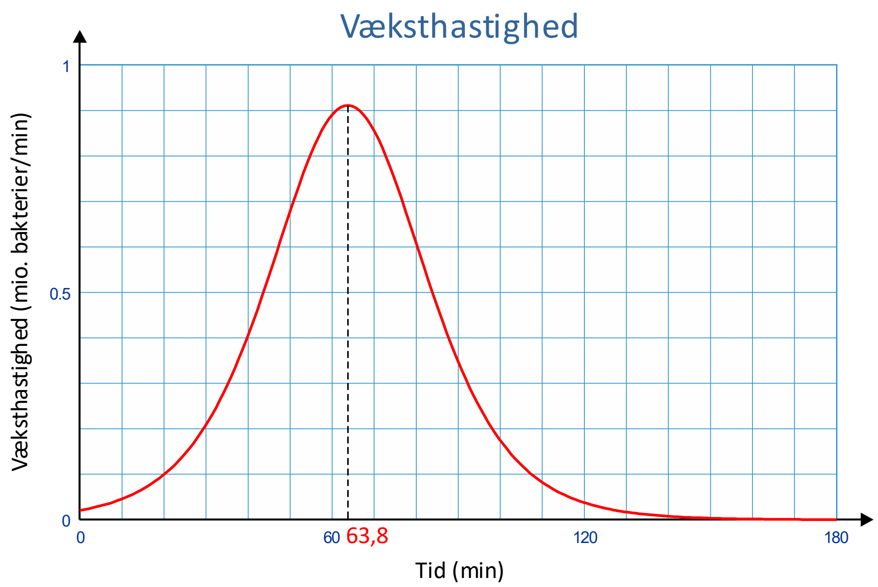
$$N'(20) = 99424{,}05747\,; \quad N'(50) = 677899{,}7752\,; \quad N'(100) = 174580.2430$$

Det fortæller os, at til tidspunktet 20 min. er væksthastigheden ca. 99000 bakterier/min., mens den til tidspunkterne 50 min. og 100 min. er henholdsvis ca. 678000 bakterier/min og ca. 175000 bakterier/min.

Men der må være et tidspunkt, hvor væksthastigheden $v(t) = N'(t)$ er størst. Til dette tidspunkt må grafen for væksthastighedsfunktionen have vandret tangent. Derfor differentierer vi en gang til: $v'(t) = N''(t)$ og løser for, hvornår størrelsen er 0:

$$v'(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = 63{,}76278980$$

Det overlades til læseren at vise, at der er tale om et lokalt og globalt maksimum for hastighedsfunktionen $v(t)$. Sagt på en anden måde: Bakteriekulturen vokser hurtigst til tidspunktet $t_{\max} = 63{,}8 \text{ min.}$ Vi kan tegne grafen for væksthastigheden:



Dette eksempel lærer os desuden noget om den *anden afledede*. Væksthastigheden topper, når accelerationen er 0! Fra tiden 0 og indtil $t_{\max}$ vokser væksthastigheden, hvilket kan ses ved at hældningskoefficienterne for tangenterne til grafen for $N(t)$ (grafen på forrige side) vokser. Efter tidspunktet $t_{\max}$ vil væksthastigheden aftage, hvilket ses ved at hældningskoefficienterne for tangenterne aftager. Lidt mere løst kan man udtrykke det sådan: Før tidspunktet $t_{\max}$ drejer tangenterne til grafen for $N(t)$ i positiv omløbsretning, mens tangenterne drejer i negativ omløbsretning, når tiden passerer $t_{\max}$. Lige til tidspunktet $t_{\max}$ har grafen for $N(t)$ det, som undertiden kaldes for en *skrå vendetangent*.

Når tiden går mod uendelig, vil populationens størrelse nærme sig til M. Det fremgår direkte af (1), idet leddet $e^{-a \cdot M \cdot t}$ vil nærme sig til 0, når $t \to \infty$. Vi har altså:

(3) $$N(t) = \frac{M}{1 + c \cdot e^{-a \cdot M \cdot t}} \to M \quad \text{for } t \to \infty$$

Oversat til vores eksempel betyder det, at bakteriekulturen vil nærme sig til 45 mio. bakterier over tid, hvilket stemmer fint overens med grafen for $N(t)$ to sider tidligere.

I øvrigt kan man vise den overraskende egenskab for en logistisk vækst, at væksthastigheden er størst, når populationen har nået halvdelen af sin grænse, altså:

(4) $$N(t_{\max}) = \tfrac{1}{2} M$$

Lad os afslutte eksemplet her og blot gøre læseren opmærksom på, at den logistiske vækst er en vigtig model, som ofte benyttes i biologien.

Opgave (Influenza-epidemi)

Den logistiske vækst (1) fra eksemplet ovenfor kan under visse forudsætninger benyttes som en rimelig model til at beskrive udviklingen af antal sygdomsramte ved en influenza-epidemi i en landsby. Det antages, at sygdommen ikke er dødelig. Det oplyses, at der i en by med 5000 indbyggere til tiden 0 er 1 person med influenza. Efter 5 dage er der i alt 6 influenza-ramte.

a) Vis at antal influenza-ramte kan beskrives ved følgende funktion:

$$N(t) = \frac{5000}{1 + 4999 \cdot e^{-0{,}35855 \cdot t}}$$

hvor t er tiden regnet i dage og $N(t)$ angiver antal influenza-ramte. *Hjælp*: Udnyt at antal influenza-ramte må konvergere mod 5000, når tiden går imod uendelig – dvs. at alle i byen før eller senere vil blive ramt. M er med andre ord 5000. Udnyt dernæst de to andre oplysninger til at bestemme de to øvrige konstanter c og a i den logistiske vækst (1) fra eksemplet.

b) Benyt forskriften fra a) til at bestemme antal influenza-ramte efter 30 dage.

c) Hvornår er 4000 indbyggere i byen ramt af influenza?

d) Bestem den hastighed, hvormed folk smittes til tidspunktet 20 dage.

e) Bestem det tidspunkt, hvor indbyggere smittes hurtigst.

f) Tegn grafen for $N(t)$ i intervallet $0 \le t \le 50$.

g) Overvej hvilke forudsætninger der mon ligger til grund for modellen? Hvad kan for eksempel forhindre at modellen holder stik? Prøv desuden at give et bud på, hvorfor det er rimeligt, at grafen fra f) ser ud som den gør. Tænk på smittespredningen …

[1] Kristian Danielsen og Henrik Kragh Sørensen. *Vækst i nationens tjeneste – Hvordan Verhulst fik beskrevet logistisk vækst*. Matematiklærerforeningen, 1. udgave, 2014.