Differentiation af sammensat funktion

Lad *f* være en funktion, som er differentiabel i punktet y_0. For fast y_0 definerer vi funktionen

(1) $$\varepsilon(y) = \begin{cases} \dfrac{f(y)-f(y_0)}{y-y_0} - f'(y_0) & \text{for } y \neq y_0 \\ 0 & \text{for } y = y_0 \end{cases}$$

Løst sagt, så angiver funktionen ε forskellen mellem differenskvotienten og differentialkvotienten i y_0. I punktet $y = y_0$, hvor differenskvotienten ikke er defineret, sætter vi funktionen til at være 0. Af (1) får vi umiddelbart:

(2) $$f(y)-f(y_0) \;=\; \varepsilon(y)(y-y_0) + f'(y_0)(y-y_0)$$

som også gælder for $y = y_0$.

Sætning 1

Funktionen ε er kontinuert i punktet $y = y_0$.

Bevis: Vi skal vise, at $\varepsilon(y) \to \varepsilon(y_0)$ for $y \to y_0$. Dette fås umiddelbart, da $\varepsilon(y_0) = 0$ og $\dfrac{f(y)-f(y_0)}{y-y_0} - f'(y_0) \;\to\; f'(y_0) - f'(y_0) = 0$ for $y \to y_0$.

□

Sætning 2

Givet to funktioner *f* og *g*, hvor *f* er differentiabel i $y_0 = g(x_0)$ og *g* er differentiabel i x_0. Da er den sammensatte funktion $f \circ g$ differentiabel i x_0 med differentialkvotient givet ved

$$(f \circ g)'(x_0) \;=\; f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$$

Bevis: Vi skal vise, at differenskvotienten for $f \circ g$ i punktet x_0 har en grænseværdi for $x \to x_0$, og at denne grænseværdi er lig med $f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$.

(3) $$\frac{\Delta(f \circ g)}{\Delta x} = \frac{(f \circ g)(x) - (f \circ g)(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0}$$

Vi kan få et udtryk for tælleren i det sidste udtryk ved at anvende (2) med $y = g(x)$ og $y_0 = g(x_0)$:

(4) $$f(g(x)) - f(g(x_0)) \;=\; \varepsilon(g(x))(g(x) - g(x_0)) + f'(g(x_0))(g(x) - g(x_0))$$

Indsættes det i (3) fås

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta(f\circ g)}{\Delta x} &= \frac{\varepsilon(g(x))(g(x)-g(x_0))+f'(g(x_0))(g(x)-g(x_0))}{x-x_0} \\
&= \varepsilon(g(x))\cdot\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} + f'(g(x_0))\cdot\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} \\
&= \varepsilon(g(x))\cdot\frac{\Delta g}{\Delta x} + f'(g(x_0))\cdot\frac{\Delta g}{\Delta x}
\end{aligned} \tag{5}$$

hvor $\Delta g/\Delta x$ er differenskvotienten for g i punktet x_0. I sætningen er det forudsat, at g er differentiabel i x_0, så g er dermed også *kontinuert* i x_0. Altså gælder $g(x)\to g(x_0)$ for $x\to x_0$. Da epsilonfunktionen ε er kontinuert i $y_0=g(x_0)$, ifølge sætning 1, så haves $\varepsilon(g(x))\to\varepsilon(g(x_0))=\varepsilon(y_0)=0$ for $x\to x_0$. Da g desuden er differentiabel i x_0, haves at $\Delta g/\Delta x \;\to\; g'(x_0)$. Dermed ses (5) at have en grænseværdi:

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta(f\circ g)}{\Delta x} &= \varepsilon(g(x))\cdot\frac{\Delta g}{\Delta x} + f'(g(x_0))\cdot\frac{\Delta g}{\Delta x} \\
&\xrightarrow[x\to x_0]{} 0\cdot g'(x_0) + f'(g(x_0))\cdot g'(x_0) = f'(g(x_0))\cdot g'(x_0)
\end{aligned}$$

Dermed har vist, at den sammensatte funktion er differentiabel i x_0 med differentialkvotient $f'(g(x_0))\cdot g'(x_0)$.

□