

Anvendelser af differentialregning



© Erik Vestergaard

© Erik Vestergaard, Haderslev, november 2022. Lille ændring maj 2024.

Kontakt: vestergaard@matematiksider.dk

Billedliste

Side 11: Pierre François Verhulst. [Public Domain] Wikimedia Commons.

Side 20: (Usain Bolt in the starting blocks).

Photo Credit: Nick J. Webb (<https://www.flickr.com/photos/nickwebb/7734416998>)

Creative Commons by 4.0.

Side 23: ©iStock.com/Elkor (del af flyvinge ses i atmosfæren)

1. Indledning

Differentialregning er et af de absolut mest nyttige områder indenfor matematikken. Det skyldes at rigtig mange problemstillinger fra den virkelige verden kan formuleres ved hjælp af funktioner, og som bekendt er differentialregning et uundværligt redskab til at analysere funktioner. Vi skal i det følgende se på en række eksempler. Til sidst vil der desuden være en del opgaver, som læseren kan give sig i kast med.

2. Optimering

En oplagt anvendelse af differentialregning vil være blandt en række løsninger til et givet problem at finde den løsning, som i en eller anden forstand er *optimal*.

Eksempel 1

Vi får som opgave at konstruere en dåse til flåede tomater med følgende krav: Dåsen skal være cylinderformet og skal have et volumen på 450 cm^3 . Desuden ønsker producenten at bruge så lidt metal som muligt. Hvad skal radius og højde i dåsen være?



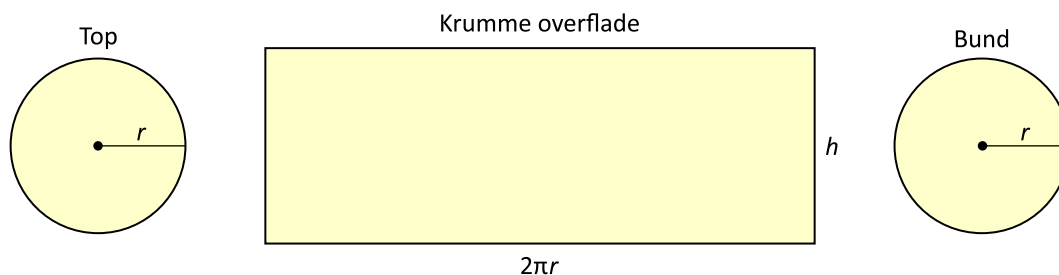
Løsning: Det sidste krav om mindst muligt metal tolker vi ved, at dåsens overfladeareal skal minimeres. I det følgende betegner vi højden af dåsen med h og radius i top og bund-cirklen med r . Desuden underforstår vi enheden cm for længde, cm^2 for areal og cm^3 for rumfang. Vi skal løse opgaven i en række trin.

Trin 1

Rumfanget af en cylinder er som bekendt $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$. At rumfanget skal være 450 cm^3 giver os *bindingen* $\pi \cdot r^2 \cdot h = 450$. Højden kan da udtrykkes ved radius: $h = 450/(\pi \cdot r^2)$.

Trin 2

Overfladearealet af dåsen er summen af arealerne af de to cirkler i bunden og toppen samt den *krumme* overflade. Når man folder den krumme overflade ud, får man et rektangel med en højde, som er lig med dåsens højde og en bredde, som er lig med omkredsen af cirklen i top og bund:



Overfladearealet er dermed lig med $2 \cdot \pi \cdot r^2 + 2\pi r \cdot h$. Ifølge trin 1 kan vi udskifte h med udtrykket $450/(\pi \cdot r^2)$:

$$2 \cdot \pi \cdot r^2 + 2\pi r \cdot h = 2\pi \cdot r^2 + 2\pi r \cdot \frac{450}{\pi \cdot r^2} = 2\pi \cdot r^2 + \frac{900}{r}$$

Vi har altså overfladearealet som funktion af kun én variabel, nemlig radius r .

$$(1) \quad \text{Over}(r) = 2\pi \cdot r^2 + \frac{900}{r}$$

Før i går videre skal vi have overvejet definitionsområdet. Det er klart, at vi må kræve, at $r \geq 0$, da man ikke kan have en negativ radius. Der er derimod ingen øvre grænse på r i dette tilfælde. Det ses af udtrykket for h . En meget stor radius vil blot resultere i en meget høj dåse med meget lille radius.

Trin 3

Vi skal have undersøgt funktionen i (1). Først undersøger vi for vandrette tangenter. Vores CAS-værktøj giver følgende løsninger:

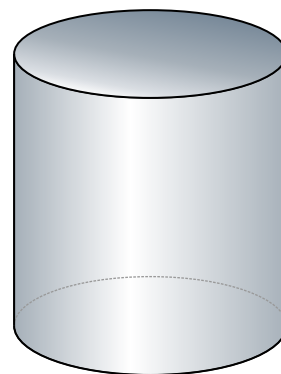
$$(2) \quad \text{Over}'(r) = 0 \Leftrightarrow r = 4,152830592$$

Som sædvanlig bestemmer vi værdien af den afledede i mellemliggende punkter. Vi vælger 1 og 5: $\text{Over}'(1) = -887,4$ og $\text{Over}'(5) = 26,83$. Da vi har at gøre med en kontinuert differentiable funktion, får vi følgende fortegnslinje for f' :

r	0	4,153	
$\text{Over}'(r)$	i.d.	-	0
$\text{Over}(r)$		↘	↗

Det ser straks, at funktionen har såvel et lokalt som et globalt maksimum i $r = 4,153$ med værdi $\text{Over}(4,152830592) = 325,0794777$. Indsættes den nævnte værdi for r i udtrykket for h fås: $h = 450/(\pi \cdot 4,152830592^2) = 8,305661182$.

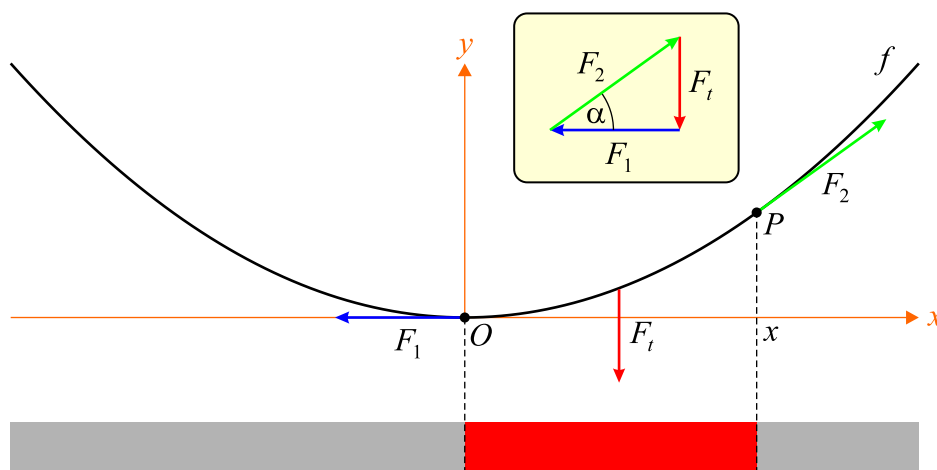
Det kan konkluderes, at det vil være fordelagtigt at lade dåsen have en radius på 4,15 cm og en højde på 8,30 cm. Det mindst mulige areal er dermed $325,1 \text{ cm}^2$. Derved vil producenten spare mest muligt på metallet. Det skal siges, at der her er set bort fra kanter og sammenføjn timer. At en producent ikke nødvendigvis vil vælge en sådan løsning (bemærk diameteren er lig med højden!) kan have mange årsager: Det kan være at hylder ikke er dimensioneret til formen, at det vil være sværere at åbne dåsen med så stor en radius, etc.



Bemærk fremgangsmåden i optimeringsopgaven i eksempel 1: I trin 1 knyttes en sammenhæng mellem to variable (binding). I trin 2 opskrives den funktion, som skal optimeres, idet man udnytter trin 1 til at eliminere den ene variabel, så man opnår en situation med blot én *uafhængig variabel*. Endelig undersøges funktionen for et maksimum/minimum.

Eksempel 2 (Hængebro)

Det viser sig, at de midterste bærekabler på en hængebro under idealiserede forudsætninger beskriver en parabelbue. Med differentialregningen til rådighed skal vi give et argument herfor. På figuren nedenfor kigger vi på det stykke kabel, som befinder sig mellem det nederste punkt O på bærekablet og et vilkårligt andet punkt P på bærekablet. Den del af bærekablet, som befinder sig til venstre for O , påvirker det angivne stykke kabel med en spænding eller snorkraft – ellers ville kabelstykket falde nedad. Vi kalder størrelsen af kraften, som klart er vandret, for F_1 . På samme måde er kabelstykket i punktet P påvirket af en snorkraft fra den del af kablet, som befinder sig til højre for kabelstykket. Denne kraft, som er tangent til bærekablet i P , kalder vi F_2 . Endelig er der den kraft, som stammer fra at bærekablet skal bære en del af vejbanen. Den del af vejbanen, der er tale om, er den del, som ligger umiddelbart under den betragtede bærekabelstykke. De andre dele af vejbanen bæres af andre dele af bærekablet. For at bærekablet befinder sig i ro kræves det, at de tre kræfter, der påvirker kabelstykket, opvejer eller udbalancerer hinanden. I vektorsprog kan det udtrykkes ved, at summen af vektorerne er lig med nulvektor.



Vi lægger et koordinatsystem ind, så O bliver origo og y -aksen sammenfaldende med bærekablets lodrette symmetriakse. På figuren er akserne farvet orange. Den funktion, hvis graf er bærekablet, betegner vi med f . Førstekoodinaten for kabelpunktet P betegner vi med x . Differentialkvotienten for en funktion i et punkt x er som bekendt hældningen af tangenten til grafen i punktet $P(x, f(x))$. Af delfiguren med trekanten får vi derfor:

$$(3) \quad f'(x) = \frac{F_t}{F_1} = \frac{m_\ell \cdot x \cdot g}{F_1} = \frac{m_\ell \cdot g}{F_1} \cdot x = k \cdot x$$

Her har vi ladet m_ℓ betegne massen af vejbanen pr. længdeenhed. Når der ganges med længden x af det med rødt markerede vejbanesegment, fås den samlede masse af vejbanesegmentet: $m_\ell \cdot x$. Når der yderligere ganges med tyngdeaccelerationen g , får man tyngdekraften på vejbanesegmentet: $F_t = m_\ell \cdot x \cdot g$. I (3) trækkes alt det udenfor, som er konstant og betegnes under ét med k . Ifølge (3) søger vi en funktion, hvis differentialkvotient er lig med $k \cdot x$. Vi kender svaret: $f(x) = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2 + c$, hvor c er en vilkårlig konstant. Der er ikke andre løsninger, som det vil komme til at blive klart, når vi kommer til integral-

regningen. Da grafen skal passere igennem $(0,0)$, har vi $\frac{1}{2} \cdot k \cdot 0^2 + c = 0 \Leftrightarrow c = 0$. Derfor er løsningen til problemet

$$(4) \quad f(x) = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2$$

Umiddelbart har vi i udledningen antaget at x er positiv, men på grund af symmetrien er det klart, at (3) holder for alle x . Bærekablerne hænger altså i en parabelbue, eller hvad? Ja ideelt set. Vi har dog gjort nogle antagelser i udledningen ovenfor:

- 1) Bærekablet har ingen masse
- 2) Vejbanen er vandret
- 3) Vejbanen har konstant masse pr. meter

Ingen af dem er nok opfyldt præcist. I tilfældet med Storebæltsbroen kan man for eksempel se på fotoet, at 2) ikke holder helt. Punkt 1) holder selvfølgelig ikke. Jo mindre bærekablet vejer i forhold til vejbanen, jo mere præcist vil tilnærmelsen med en parabel dog være. Punkt 3) er måske opfyldt ret godt, selv om der visse steder på broen er specialinstallationer. Under alle omstændigheder, så er parabelbuen en ret god approksimation til den kurve, bærekablet danner. Vi har opstillet og løst en *matematisk model*. Den kan selvfølgelig *forfines*, så man tager hensyn til ovenstående punkter. Det vil bare gøre modellen alt for kompliceret til at blive gennemgået her. Sandsynligvis vil den kræve stor computerkraft at løse numerisk. Det er sikkert sådan, man har gjort i virkeligheden, da Storebæltsbroen blev projekteret. Eksemplet er en indikation af matematikkens store styrke: at den kan hjælpe mennesket til at forudse ting, før de bliver realiseret. I et af mine andre tillæg: *Tema: Broer, kæder og kurvefit*, kan den interesserede læser udføre et lille forsøg med et kabel/kæde både belastet, som i tilfældet med en hængebro, og ubelastet, som i tilfældet med en frithængende kæde.

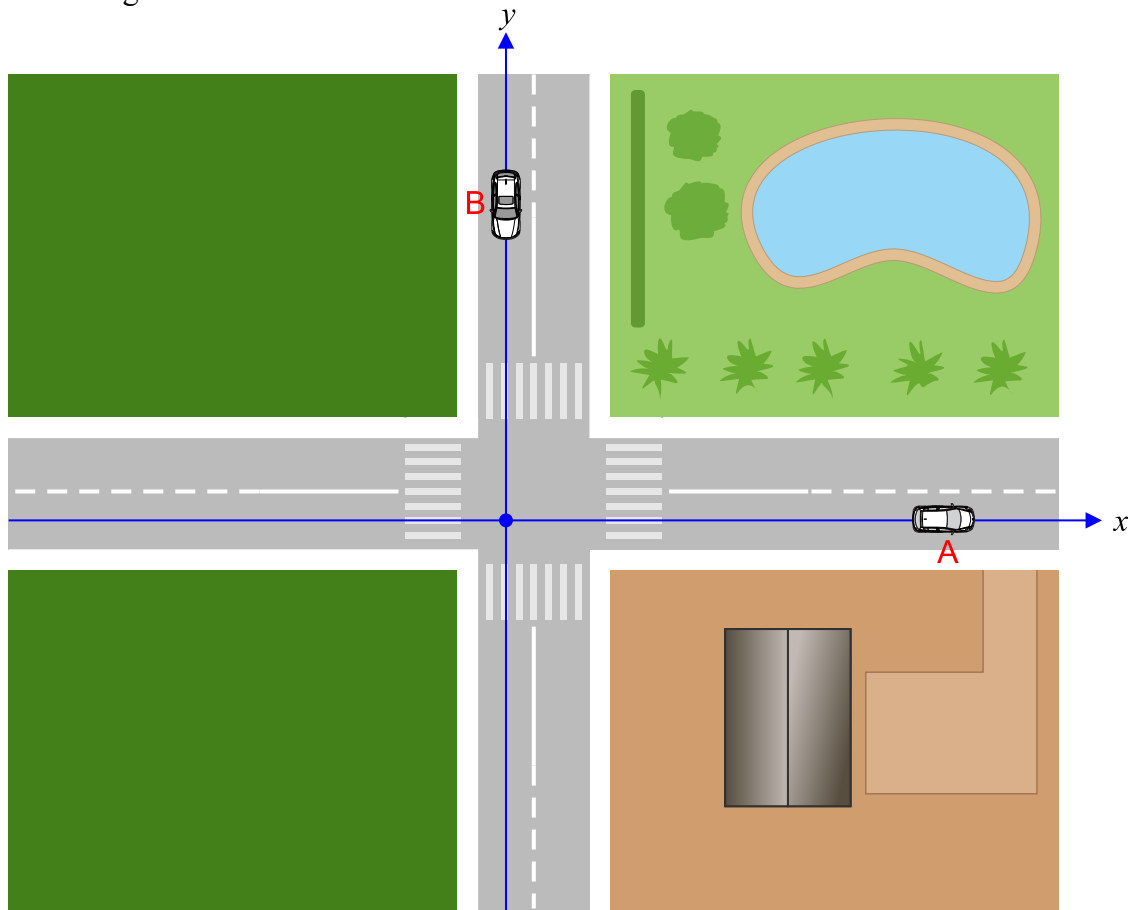


Storebæltsbroens to midterste hængeskaber hænger tilnærmelsesvist i en parabelbue

Eksempel 3

En bil A kører på en lige vej, der forløber nord-syd, mens en anden bil B kører på en lige vej, der forløber vest-øst. De to veje står altså vinkelret på hinanden. Situationen er beskrevet på figuren nedenfor. Der er lagt et koordinatsystem ind, så x -aksen peger mod øst og går igennem bil A's bane, mens y -aksen peger mod nord og går igennem bil B's bane. Klokkens 12.00 er bil A 10 km vest for det afbildede kryds, hvor koordinatsystemets begyndelsespunkt (origo) er, og bilen kører med farten 70 km/t mod øst. På samme tidspunkt er bil B 15 km nord for krydset, og bilens fart mod syd er 80 km/t. Vi nulstiller stopuret kl. 12.00.

- Vis at bil A's position på x -aksen kan beskrives ved funktionen $X(t) = -10 + 70 \cdot t$, hvor t angiver stopurets visning i timer og positionen regnet i km. Vis tilsvarende, at bil B's position på y -aksen kan beskrives ved funktionen $Y(t) = 15 - 80 \cdot t$.
- Hvor på akserne er de to biler efter 3 minutters kørsel? Hvad er afstanden mellem de to biler da i fugleflugtslinje?
- Bestem det tidspunkt, hvor afstanden i fugleflugtslinje mellem de to biler er mindst mulig.



Løsning:

- Tilbagelagt strækning fås som bekendt ved at gange hastighed med tid, dvs. bil A har til tidspunktet t tilbagelagt strækningen $70 \cdot t$. Resultatet fås i km, da hastigheden er i km/t og tiden i timer. Men bil A starter på x -aksen 10 km til venstre for origo. Derfor

vil $X(t) = -10 + 70 \cdot t$ være den funktion, som beskriver bil A's position til tidspunktet t . Det overlades til læseren at argumentere for stedfunktionen for bil B.

- b) 3 minutter svarer til 0.05 time. Derfor sætter vi denne værdi ind i stedfunktionerne:

$$X(0,05) = -10 + 70 \cdot 0,05 = -6,5$$

$$Y(0,05) = 15 - 80 \cdot 0,05 = 11$$

Dermed har bil A x -koordinaten $-6,5$ og bil B y -koordinaten 11 efter 3 minutter. Afstanden i fugleflugtslinje fås ved at benytte Pythagoras' sætning:

$$d = \sqrt{(-6,5)^2 + 11^2} = 12,78$$

Bilerne er altså $12,78$ km fra hinanden efter 3 minutter.

- c) I forlængelse af b) kan vi udregne et udtryk for afstanden mellem bilerne som funktion af tiden t :

$$d(t) = \sqrt{(X(t))^2 + (Y(t))^2} = \sqrt{(-10 + 70 \cdot t)^2 + (15 - 80 \cdot t)^2}$$

Funktionen er defineret for $t \in [0, \infty[$. Ved hjælp af et CAS-værktøj undersøger vi for vandrette tangenter for funktionens graf:

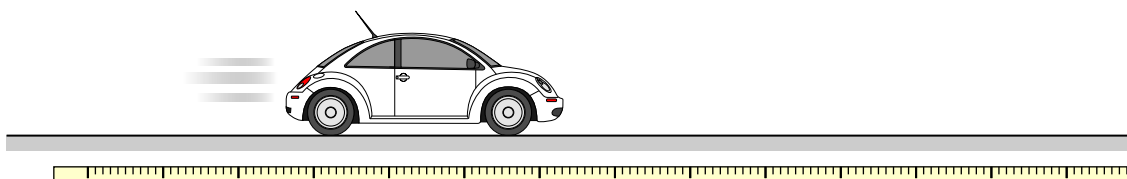
$$d'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0,1681415929$$

Det overlades til læseren at vise, at der er tale om et lokalt og globalt minimum her. Vi konkluderer, at bilerne har den mindste indbyrdes afstand, når der er gået $0,16814$ time eller $10,088$ minutter. Det giver i øvrigt en mindste afstand mellem bilerne på $d(0,1681415929) = 2,351802170$, altså $2,35$ km.

□

3. Vækst og væksthastighed

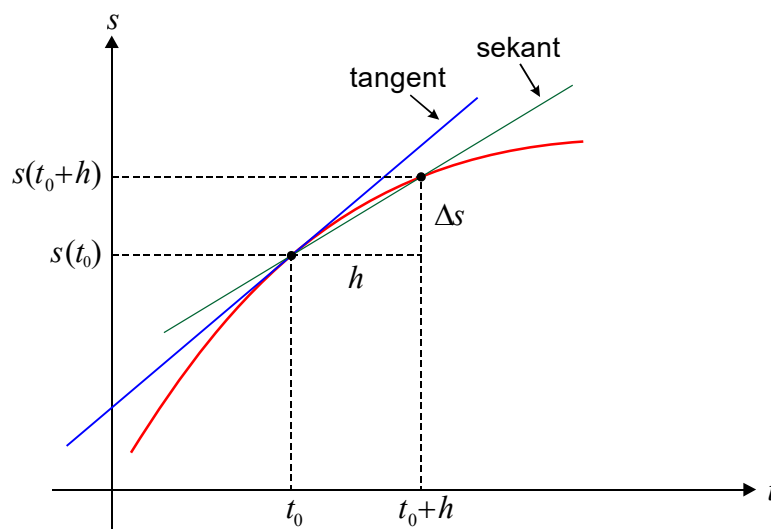
Vækst er et meget anvendt ord i mange sammenhænge i samfundet og i naturvidenskaben. Differentialregningen kan være med til at kaste lys over dette begreb, også på en mere præcis måde. Begrebet *væksthastighed* eller bare *hastighed*, kan måske nemmest beskrives ved at tage udgangspunkt i en bil, som kører ud af en lige landevej. Et målebånd er anbragt langs vejen, så man til ethvert tidspunkt t kan registrere bilens position s . Dermed har man en stedfunktion $s(t)$.



Hvis bilen *ikke* vender rundt i tidsrummet mellem t_0 og $t_0 + h$, så angiver følgende brøk bilens *gennemsnitshastighed* i tidsrummet, regnet med fortegn:

$$(5) \quad \frac{\Delta s}{h} = \frac{s(t_0) - s(t_0 + h)}{h}$$

Det er netop den størrelse, vi kalder *differenskvotienten* for funktionen $s(t)$ i t_0 . Altså forskellen i position divideret med forskellen i tid. Grafisk set angiver differenskvotienten hældningen af sekanten mellem grafpunkterne $(t_0, s(t_0))$ og $(t_0 + h, s(t_0 + h))$.



Hvis vi lader h nærme sig til 0, vil differenskvotienten nærme sig til *differentialkvotienten* $s'(t_0)$ i t_0 – hvis altså $s(t)$ er differentiabel i t_0 . Altså:

$$(6) \quad s'(t_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta s}{h} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{s(t_0 + h) - s(t_0)}{h} \right)$$

og grafisk set er differentialkvotienten hældningen af tangenten i t_0 . I den aktuelle situation kan differentialkvotienten fortolkes som bilens *øjeblikshastighed* eller bare *hastighed* til tidspunktet t_0 . Hvis $s(t)$ er en differentiabel funktion, har man hastigheden til ethvert tidspunkt: $v(t) = s'(t)$. Hvis *hastighedsfunktionen* $v(t)$ også er differentiabel, kan man gentage proceduren, dvs. differentiere igen. Herved får man *accelerationsfunktionen*:

$$(7) \quad a(t) = v'(t) = s''(t)$$

som er stedfunktionen differentieret to gange, også kaldet for *den anden afledede* af stedfunktionen. Accelerationsfunktionen er i en vis forstand "hastigheden af hastigheden". Generelt set har den anden afledede af en funktion også en vigtig grafisk fortolkning, ligesom den første afledede har. Vi kigger på det i blandt andet eksempel 6 længere fremme i dokumentet. I det følgende skal vi se flere forskellige eksempler på, hvor begrebet hastighed eller væksthastighed kommer i spil.

Eksempel 4 (Det frie fald)

Et godt eksempel fra fysik er *det frie fald*. Lad os sige, at en bold slippes fra en vis højde, og at man i stil med bileksemplet anbringer et målebånd lodret, så nulpunktet på målebåndet er der, hvor bolden slippes, og i øvrigt måler positivt nedefter. Da siger fysikken, at stedfunktionen kan beskrives ved følgende stedfunktion:

$$(8) \quad s(t) = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

hvor $g = 9,82 \text{ m/s}^2$ er tyngdeaccelerationen. At bolden "slippes" (ikke kastes) hentyder til at begyndelseshastigheden er 0 m/s. Vi kan nu beregne boldens hastighed til ethvert tidspunkt:

$$(9) \quad v(t) = s'(t) = g \cdot t$$

Vi ser, at boldens hastighed vokser *proportionalt* med tiden. Man kan tage skridtet videre og bestemme accelerationsfunktionen:

$$(10) \quad a(t) = v'(t) = s''(t) = g$$

Accelerationen er altså konstant! Sagt på en anden måde, så vokser hastigheden med den konstante værdi 9,82 m/s for hvert sekund, der går.

□

Eksempel 5 (Vægtudvikling af en nyfødt)

Tabellen nedenfor indeholder (indirekte) data fra WHO. Der er tale om median-vægten af drengebørn for hver måned i løbet af drengenes første to leveår.

Tid (mdr.)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Vægt (kg)	3,35	4,45	5,58	6,39	7,00	7,50	7,92	8,28	8,60	8,90	9,19	9,41	9,62

Tid (mdr.)	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	
Vægt (kg)	9,85	10,10	10,32	10,52	10,73	10,93	11,16	11,36	11,57	11,75	11,95	12,18	

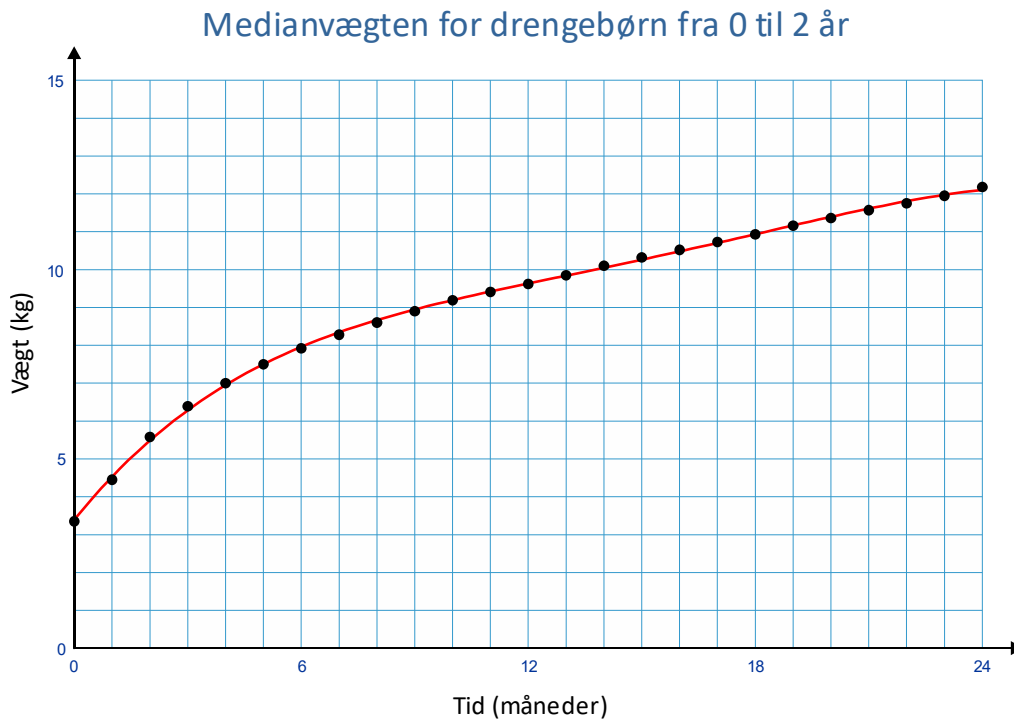
Vi vil bestemme den hastighed, hvormed drengene tager på i vægt til tidspunkterne 1 mdr. og 18 mdr. Man kunne anvende numerisk differentiation her, men vi vil i stedet foretage et fit af data med et polynomium af grad 4, og derefter differentiere denne funktion med henblik på at bestemme væksthastigheder. Et CAS-værktøj giver følgende resultat, når man beder om at det foretager et fit med et polynomium af grad 4:

$$f(t) = -0,000073629 \cdot t^4 + 0,0046006 \cdot t^3 - 0,10449 \cdot t^2 + 1,2387 \cdot t + 3,3904$$

Herefter er det blot at indsætte tidspunkterne i hastighedsfunktionen, dvs. den afledede:

$$f'(1) = 1,0432083882 \quad \text{og} \quad f'(18) = 0,231224503$$

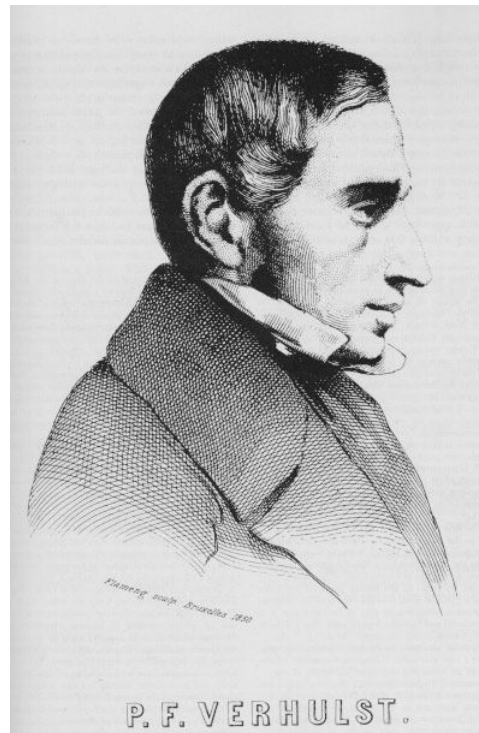
Vi konkluderer, at drengenes vægt til tidspunktet 1 måned vokser med 1,04 kg/mdr., mens væksthastigheden er 0,23 kg/mdr. til tidspunktet 18 måneder. Grafen nedenfor viser også, at væksthastigheden er klart størst lige efter fødslen.



□

Eksempel 6 (Logistisk vækst - bakteriekultur)

Den eksponentielle vækst er velkendt. Den overordnede begrundelse for, at den ofte forekommer i forbindelse med forskellige populationers udvikling er, at der her er tale om en *konstant procentvis vækst*. Men vi ved også, at populationer ikke kan vokse i det uendelige. Den erkendelse havde den belgiske matematiker *Pierre François Verhulst* (1804-1849) også gjort sig, da han en vinterdag i 1833 sad på sit studerekammer i Bruxelles. For at gøre en lang historie kort, så ledte Verhulst efter en funktion, som bedst kan beskrive udviklingen af en population, når resurserne gradvist udtømmes. Han kom frem til den funktion, som vi i dag kalder for en *logistisk udvikling*.



Pierre François Verhulst (1804-1849)

Du kan læse mere om den spændende historie om Verhulst i følgende lille bog:

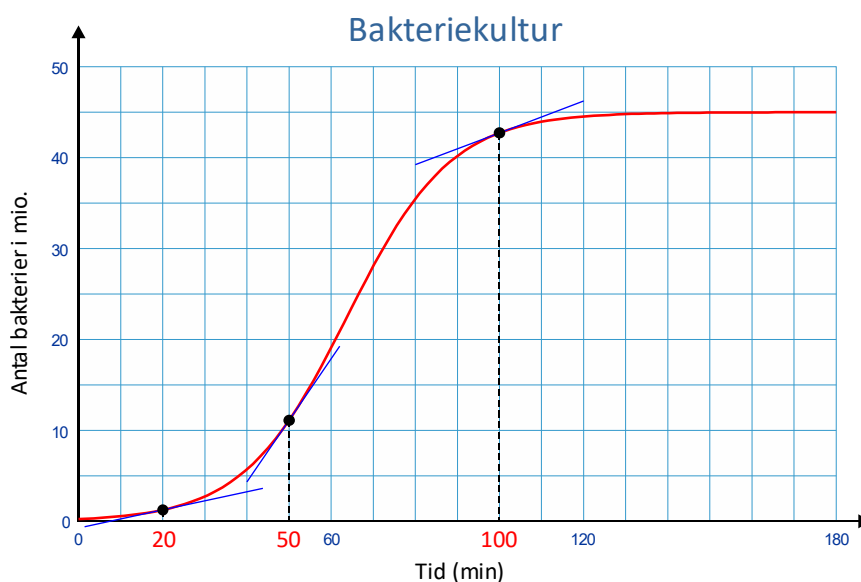
Kristian Danielsen og Henrik Kragh Sørensen. *Vækst i nationens tjeneste – Hvordan Verhulst fik beskrevet logistisk vækst*. Matematiklærerforeningen, 1. udgave, 2014.

Funktionen kan se ud på lidt forskellig måde, blandt andet således:

$$(11) \quad N(t) = \frac{M}{1 + c \cdot e^{-a \cdot M \cdot t}}$$

Funktionen har tre frie parametre, nemlig a , c og M . Hvis man har en række dataværdier indeholdende populationsstørrelser til forskellige tidspunkter, kan man for eksempel bruge et CAS-værktøj til at foretage en logistisk regression, med henblik på at afgøre, om datapunkterne tilnærmelsesvist følger en logistisk kurve eller ej. I det følgende vil vi blot antage, at en bakteriekulturs udvikling kan beskrives med den logistiske forskrift (11) med følgende parametre: $M = 45 \cdot 10^6$, $c = 175$ og $a = 1,8 \cdot 10^{-9}$. Tiden t regnes i minutter.

$$(12) \quad N(t) = \frac{45 \cdot 10^6}{1 + 175 \cdot e^{-0,081 \cdot t}}$$



Ovenfor er grafen for den logistiske vækst tegnet. Vi ser, at bakteriekulturen godt kan se ud til at vokse tilnærmelsesvist eksponentielt i begyndelsen. Derefter flader kurven ud som en følge af de begrænsede resurser. Det kan være mangel på føde, plads eller lignende. På figuren er tangenterne til grafen til tidspunkterne 20, 50 og 100 minutter indtegnet på figuren. Tangenternes hældning angiver væksthastigheden. I et CAS-værktøj finder vi nemt:

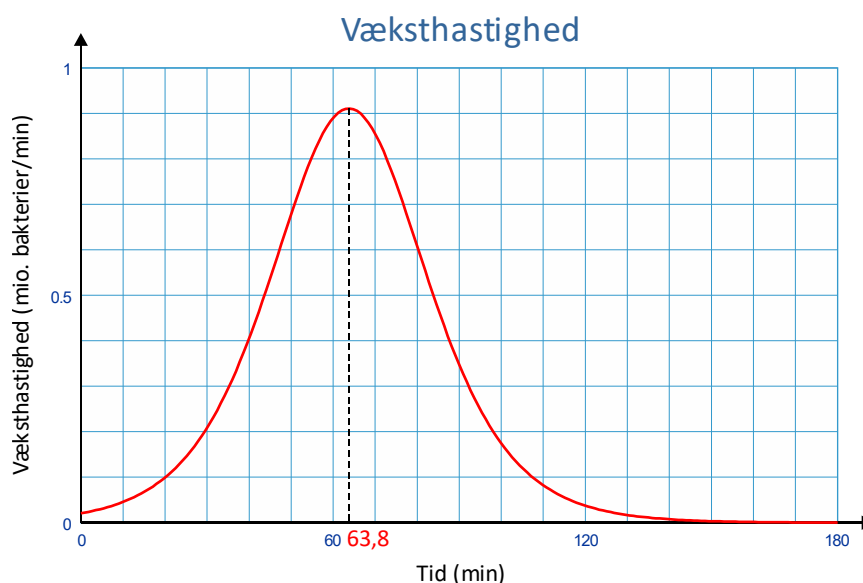
$$N'(20) = 99424,05747; \quad N'(50) = 677899,7752; \quad N'(100) = 174580,2430$$

Det fortæller os, at til tidspunktet 20 min. er væksthastigheden ca. 99000 bakterier/min., mens den til tidspunkterne 50 min. og 100 min. er henholdsvis ca. 678000 bakterier/min og ca. 175000 bakterier/min.

Men der må være et tidspunkt, hvor væksthastigheden $v(t) = N'(t)$ er størst. Til dette tidspunkt må grafen for væksthastighedsfunktionen have vandret tangent. Derfor differentierer vi igen: $v'(t) = N''(t)$ og løser for, hvornår størrelsen er 0:

$$v'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 63,76278980$$

Det overlades til læseren at vise, at der er tale om et lokalt og globalt maksimum for hastighedsfunktionen $v(t)$. Sagt på en anden måde: Bakteriekulturen vokser hurtigst til tidspunktet $t_{\max} = 63,8$ min. Vi kan tegne grafen for væksthastigheden:



Dette eksempel lærer os desuden noget om den *anden afledede*. Væksthastigheden topper, når accelerationen er 0! Fra tiden 0 og indtil $t_{\max}$ vokser væksthastigheden, hvilket kan ses ved at hældningskoefficienterne for tangenterne til grafen for $N(t)$ (graf på forrige side) vokser. Efter tidspunktet $t_{\max}$ vil væksthastigheden aftage, hvilket ses ved at hældningskoefficienterne for tangenterne aftager. Lidt mere løst kan man udtrykke det sådan: Før tidspunktet $t_{\max}$ drejer tangenterne til grafen for $N(t)$ i positiv omløbsretning, mens tangenterne drejer i negativ omløbsretning, når tiden passerer $t_{\max}$. Lige til tidspunktet $t_{\max}$ har grafen for $N(t)$ det, som undertiden kaldes for en *skrå vendetangent*.

Når tiden går mod uendelig, vil populationens størrelse nærme sig til M . Det fremgår direkte af (50), idet leddet $e^{-a \cdot M \cdot t}$ vil nærme sig til 0, når $t \rightarrow \infty$. Vi har altså:

$$(13) \quad N(t) = \frac{M}{1 + c \cdot e^{-a \cdot M \cdot t}} \rightarrow M \quad \text{for } t \rightarrow \infty$$

Oversat til vores eksempel betyder det, at bakteriekulturen vil nærme sig til 45 mio. bakterier over tid, hvilket stemmer fint overens med grafen for $N(t)$ to sider tidligere.

I øvrigt kan man vise den overraskende egenskab for en logistisk vækst, at væksthastigheden er størst, når populationen har nået halvdelen af sin grænse, altså:

$$(14) \quad N(t_{\max}) = \frac{1}{2} M$$

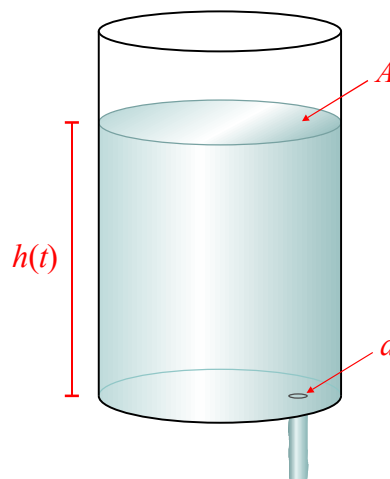
Lad os slutte eksemplet her og blot gøre læseren opmærksom på, at den logistiske vækst er en vigtig model, som ofte benyttes i biologien.

Eksempel 7 (Tømning af beholder)

En cylindrisk beholder med tværsnitsarealet A er fyldt med vand. Vandet løber ud af et lille cirkulært hul med tværsnitsareal a i bunden. Ved at anvende massebevarelse og bevarelse af den mekaniske energi kan man vise, at vandstanden $h(t)$ i beholderen som funktion af tiden t er givet ved forskriften:

$$(15) \quad h(t) = \left(\sqrt{h_0} - \frac{1}{2} k \cdot t \right)^2$$

hvor h_0 er begyndelseshøjden, g er tyngdeaccelerationen og $k = a/A \cdot \sqrt{2g}$.



I det følgende kigger vi på et eksempel, hvor starthøjden er 45 cm, beholderens indre diameter er 40 cm, og diameteren af udløbshullet er 3 cm. Det giver følgende værdier for de forskellige størrelser, underforstået regnet i SI-enheder:

$$A = \pi \cdot R^2 = \pi \cdot 0,20^2 = 0,1256637062$$

$$a = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot 0,015^2 = 0,0007068583472$$

$$h_0 = 0,45$$

$$g = 9,82$$

Efter omskrivning giver (15) anledning til følgende forskrift for vandstanden:

$$h(t) = (0,6708203932 - 0,01246416739 \cdot t)^2$$

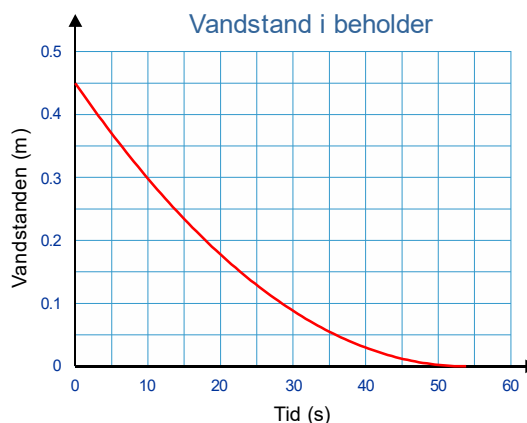
Hastighederne til tidspunkterne 10 s og 40 s:

$$h'(10) = -0,01361532597 \quad \text{og} \quad h'(40) = -0,00429399784$$

Til tidspunktet 10 s aftager vandstanden altså med 1,36 cm/s, mens vandstanden til tidspunktet 40 s kun aftager med 0,42 cm/s. Vi kan også tegne en graf for vandstanden som funktion af tiden. Først bruger vi dog *solve*-funktionen i vores CAS-værktøj til at bestemme, hvornår beholderen er tom:

$$h(t) = 0 \Leftrightarrow t = 53,81991209.$$

Beholderen vil altså være tom efter godt 54 sekunder.



□

Eksempel 8 (Økonomi)

Differentialregning finder også anvendelser indenfor økonomi. En producent vil nok i høj grad kigge på sin fortjeneste, når denne foretager valg. Hvor mange enheder skal man producere? Umiddelbart kunne man tro, at det bare gælder om at producere så meget som muligt, for så må fortjenesten vel også vokse tilsvarende? Men det er ikke så nemt endda. Omkostningerne pr. enhed er for eksempel ikke konstante. Normalt vil det være sådan, at omkostningerne pr. enhed aftager på grund af stordriftsfordele; men produceres tilstrækkelig mange enheder, kan omkostningerne også pludseligt vokse pr. enhed, hvis der for eksempel opstår råvaremangel. Så er der indtægterne. Her er prisfastsættelsen pr. enhed vigtig. Normalt vil man kunne sætte prisen pr. enhed ned, hvis man producerer mange enheder. Sker det, vil man tjene mindre pr. enhed, men det kan være, at man derved kan sælge flere varer. *Efterspørgslen* vil således normalt afhænge af enhedsprisen. For at gøre en lang historie kort, vil vi i det følgende definere nogle funktioner, som repræsenterer enhedsprisen, indtægterne, omkostningerne og fortjenesten. De er alle funktioner af antal producerede enheder x . Funktionerne kan virke lidt vilkårlige, og man kan sagtens diskutere hvor realistiske de vil være i en konkret situation, hvor der er så mange ting i spil, så man ikke vil være i stand til at putte det hele ind i en matematisk formel. Alligevel illustrerer analysen nogle mekanismer i en virksomheds økonomi. Det kan give nogle kvalifikative fingerpeg om hvilke størrelser, man skal kigge på, for at optimere sin produktion. Derfor er der også en del matematik involveret, når man læser økonomi på universitetet.

x : Antal producerede enheder

Enhedsprisen som funktion af antal enheder: $enhedspris(x) = \frac{3200 - 6x}{3}$

Indtægterne er dermed (overvej): $ind(x) = x \cdot enhedspris(x) = x \cdot \left(\frac{3200 - 6x}{3} \right)$

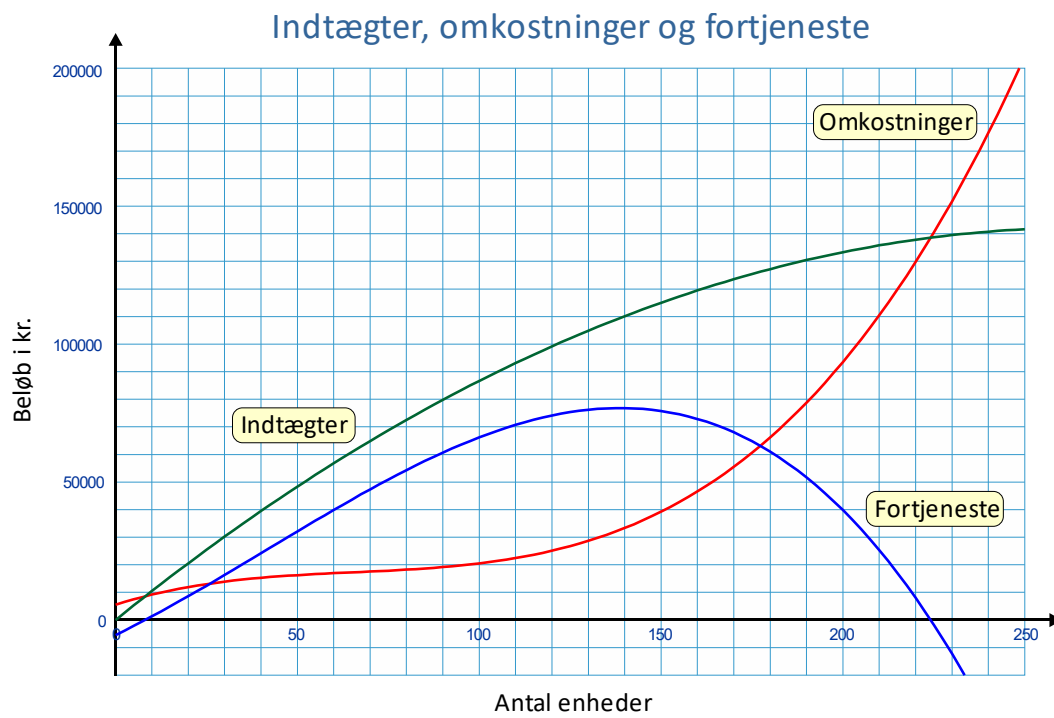
Omkostningsfunktionen sættes til: $om(x) = 0,028 \cdot x^3 - 5,5 \cdot x^2 + 420 \cdot x + 5500$

Fortjenesten: $F(x) = ind(x) - om(x) = -0,028 \cdot x^3 + 3,5 \cdot x^2 + \frac{1940}{3} \cdot x - 5500$

Lad os udregne differentialkvotienten af fortjeneste-funktionen i $x = 100$. CAS-værktøjet giver: $F'(100) = 506,67$. Hastigheden, hvormed fortjenesten vokser ved en produktion af 100 enheder, er dermed ca. 507 kr./enhed. Det indikerer, at det kan betale sig at producere mere, hvis man ønsker en større fortjeneste. Men hvilken produktionsstørrelse giver da den største fortjeneste? For at besvare det, undersøger vi for vandrette tangenter:

$$F'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -55,46481026 \vee x = 138,7981436$$

Da x skal være ikke-negativ, er svaret altså, at der er vandret tangent til grafen for fortjeneste-funktionen, når $x = 138,7981436$. Det overlades til læseren at vise, at der her er tale om et lokalt og globalt maksimum for $F(x)$. Det er med andre ord optimalt at producere ca. 139 enheder, hvis man vil optimere fortjenesten. Lad os afslutningsvist plotte graferne for indtægtsfunktionen, omkostningsfunktionen og fortjeneste-funktionen i samme koordinatsystem:



Den interesserede læser kan finde mere om økonomi i et andet af mine mindre tillæg:
Tema: Anvendelser af differentialregning i økonomi.

□

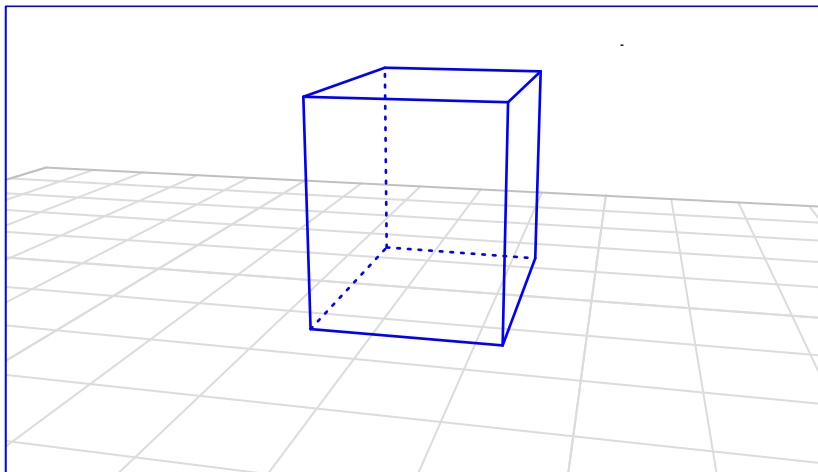
Opgaver

Opgaver med en stjerne forventes at være lidt sværere end de øvrige.

Opgave 1

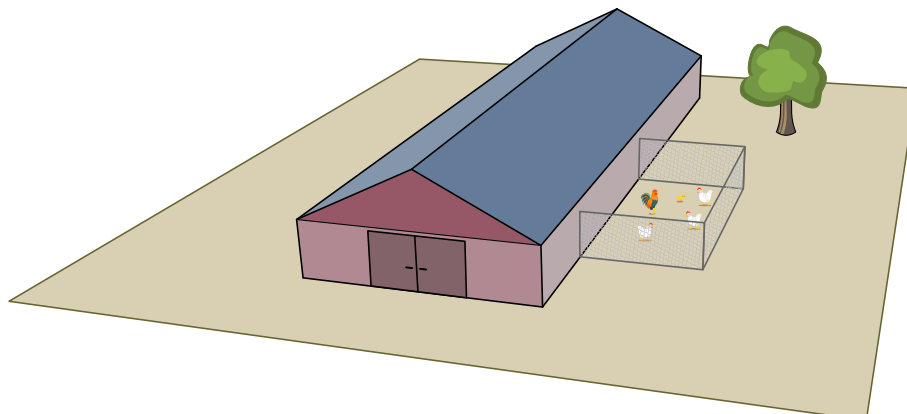
En container i form af en rektangulær kasse skal have et rumfang på 12 m^3 , og længden skal være 1,5 gange så lang som bredden. Bestem de optimale dimensioner på kassen, så overfladearealet bliver mindst muligt.

Hjælp: Kald bredden for x . Hvad er så længden? Højden betegnes h . Udtryk højden ved hjælp af x , idet oplysningen om rumfanget udnyttes. Bestem et udtryk for overfladearealet af kassen og udnyt sammenhængen mellem h og x til at lave en overfladefunktion, som kun afhænger af x , dvs. en funktion $Over(x)$. Bestem mindsteværdien for denne funktion.



Opgave 2

Gårdmand Jacobsen ønsker at lave et hønsehus. Det skal være rektangulært, og væggen på hans lade skal fungere som den ene side. Han har i alt 24 meter hegn at gøre godt med og skal få det bedste ud af det. Han vil gerne have et så stort areal til hønsene som muligt. Besvar nedenstående delspørgsmål med henblik på at bestemme de optimale dimensioner for hønsegården.



Kald siderne i rektanget for henholdsvis x og y , som angivet på figuren.

- a) Sammenhæng mellem x og y .

Brug oplysningen om hegnets længde til at opstille en ligning. Denne *binding* kan bruges til at bestemme y som funktion af x .

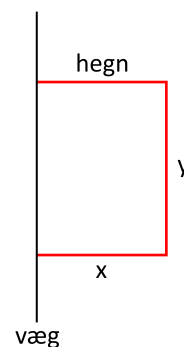
- b) Areal som funktion af x .

Opskriv et udtryk for arealet at hønsegården udtrykt ved x og y . Benyt derefter sammenhængen mellem x og y fra delspørgsmål a) til at finde et udtryk for arealet, hvor kun den variable x indgår. Det giver en funktion, som vi kan kalde $A(x)$.

- c) Bestem definitionsområdet for arealfunktionen A .

- d) Maksimum for funktionen $A(x)$.

Brug differentialregning til at bestemme størsteværdien for $A(x)$. Bestem det x , for hvilket arealet bliver størst muligt. Hvor stort er dette areal? Angiv de optimale dimensioner for hegn.



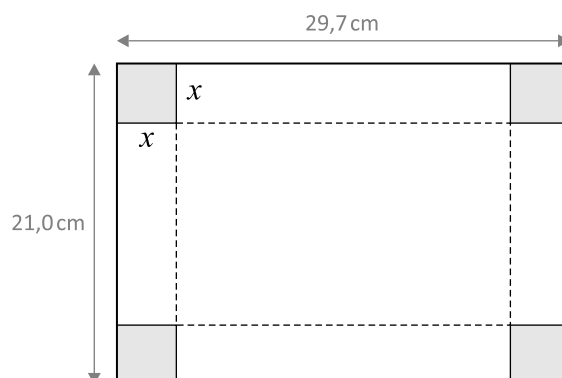
Opgave 3

Der skal produceres en cylinderformet beholder med bund, men uden låg. Rumfanget skal være på 2000 cm^3 . Bestem det optimale valg af radius og højde for beholderen således, at overfladearealet af bunden og den krumme overflade samlet set er mindst muligt.

Hjælp: Se eksempel 1. Denne gang er der bare ikke noget låg på!

Opgave 4

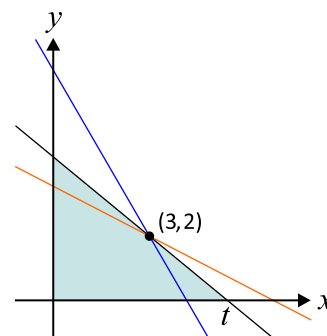
Karen ønsker at lave en kasse af et stykke karton i A4-format. Fire ens kvadrater i arkets hjørner skæres væk, hvorefter kanterne foldes op. Betegn sidelængden i kvadraterne med den variable x .



- Vis at kassens volumen udtrykt ved x er lig med $V(x) = (21,0 - 2x) \cdot (29,7 - 2x) \cdot x$.
- Hvad er definitionsområdet for volumen-funktionen?
- Bestem den værdi for x , for hvilket kassen opnår det største rumfang. Hvor stort er dette rumfang?

Opgave 5*

En linje, der har negativ hældning og som passerer igennem punktet $(3,2)$, vil sammen med x -aksen og y -aksen afskære en trekant. Dette er vist for den sorte linje nedenfor. Men der er mange andre linjer, som opfylder de to betingelser. Vi kan entydigt karakterisere en linje ved dens skæringspunkt med x -aksen. Vi kalder skæringspunktet for $(t,0)$. Spørgsmålet er, hvilken eller hvilke linjer, som giver anledning til det *mindste* trekant-areal?



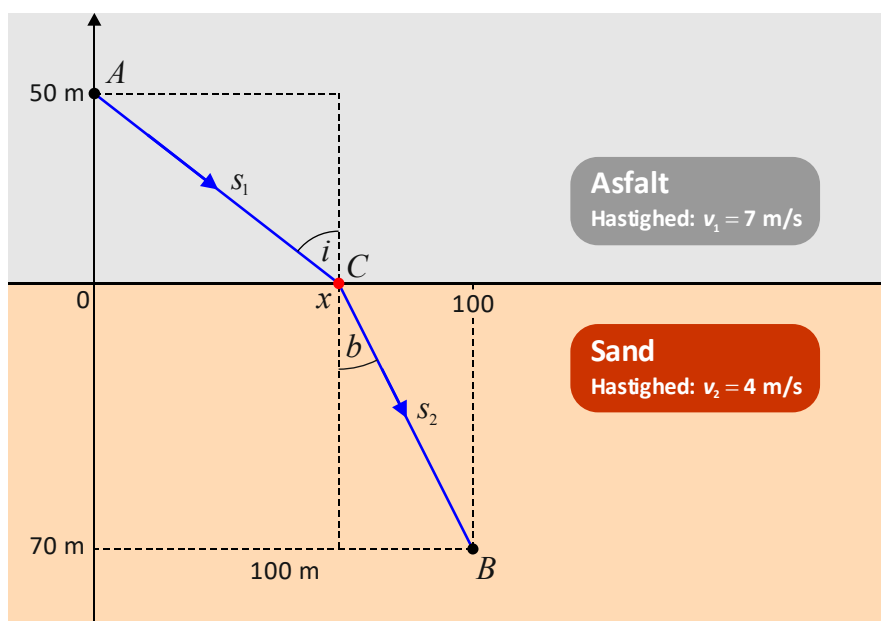
- a) Vis at den linje, der skærer x -aksen i $(t,0)$ og går igennem $(3,2)$, har følgende ligning:

$$y = -\frac{2}{t-3} \cdot x + \frac{2t}{t-3}, \text{ hvor } t > 3$$

- b) Vis at arealet af trekanten for den linje, der skærer x -aksen i $(t,0)$, er givet ved $\frac{t^2}{t-3}$.
- c) Betragt arealet som en funktion af t og foretag en funktionsundersøgelse med henblik på at bestemme den værdi for t , som giver det mindste areal.

Opgave 6* (Hurtigste løb – brydningsformlen)

I en konkurrence gælder det om at løbe hurtigst fra A til B . Den første del af løbet foregår på asfalt, hvor løberen kan opretholde en fart på 7 m/s. Derefter går det over til løb i sand, hvor hastigheden kun er 4 m/s. Spørgsmålet er, hvilken vej, det er mest fordelagtigt at løbe fra A til B . Det gælder om at finde det punkt C på overgangen mellem asfalt og sand, hvor det er bedst at passere. I hver af medianerne er det derefter bedst at vælge den lige vej (overvej hvorfor!). Vi kalder 1. koordinaten for punktet C for x . De øvrige mål fremgår af figuren nedenfor. Tiden er som bekendt givet ved strækningen divideret med hastigheden, og strækningen findes ved hjælp af Pythagoras' sætning.



- a) Argumentér for hvorfor tiden det tager at gennemløbe $A \rightarrow B \rightarrow C$ er givet ved følgende udtryk i den variable x , idet SI-enheder er underforstået:

$$T(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 50^2}}{7} + \frac{\sqrt{(100-x)^2 + 70^2}}{4}$$

- b) Benyt differentialregning til at bestemme den værdi af x , som giver anledning til den korteste passagetid ($0 \leq x \leq 100$).
- c) Lad $x_{\min}$ være den værdi for x , som blev bestemt i delspørgsmål b). For denne værdi af x ønskes vinklerne i og b på figuren bestemt.
- d) Med de fundne værdier for vinklerne i og b fra spørgsmål c): Vis at følgende formel er opfyldt, hvor v_1 er hastigheden i medium 1, og v_2 er hastigheden i medium 2:

$$\frac{\sin(i)}{\sin(b)} = \frac{v_1}{v_2}$$

NB! Måske minder formelen fra d) dig om brydningsformlen fra fysik? I så fald er du på rette spor. Man kan nemlig vise, at den måde lyset bryder fra et medium til et andet, fx fra luft til glas, netop er den, som giver anledning til den *hurtigste* passagetid!

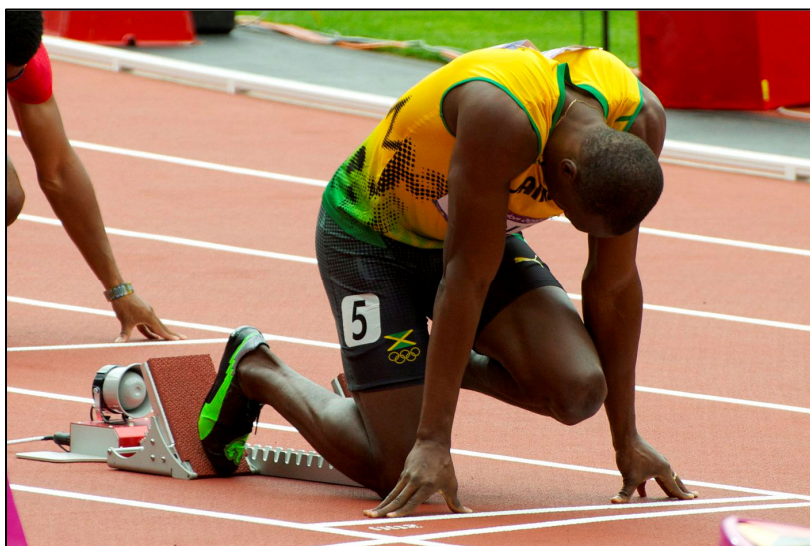
□

Opgave 7 (Usain Bolts verdensrekordløb)

Vi skal i denne opgave analysere det 100 meterløb, hvor Usain Bolt den 16. august 2009 satte verdensrekord. Tabellen på næste side indeholder en række data fra løbet i form af sammenhørende værdier af tid og tilbagelagt afstand.

Tid (s)	0,16	0,36	0,71	0,99	1,22	1,71	2,13	2,60	3,06	3,51	3,95	4,53
Afstand (m)	0,06	0,63	2,28	3,84	5,21	8,66	12,37	17,22	21,96	26,85	31,81	38,80

Tid (s)	5,10	5,59	6,09	6,57	7,10	7,52	8,03	8,31	8,77	9,10	9,58	
Afstand (m)	45,58	51,52	57,58	63,46	69,88	75,06	81,34	84,76	90,24	94,22	100	



- Foretag i stil med, hvad der blev gjort i eksempel 5, et fit med et fjerdegradspolynomium. Bestem forskriften for dette regressionspolynomium. Afbild punkter og polynomium i samme koordinatsystem. Hvor godt er fittet?
- Bestem en forskrift for hastighedsfunktionen $v(t) = s'(t)$ og tegn en graf for den.
- Bestem værdier for hastighederne til tidspunkterne 0,50 s og 7.00 s.
Grafen fra b) viser, at Usain Bolt omkring midtvejs opnår en lokal tophastighed, hvorefter hastigheden aftager lidt for til slut at vokse igen.
- Bestem tidspunktet for, hvornår den lokale tophastighed opnås. Hvor langt er han da kommet? Hvad kan du sige om accelerationen til dette tidspunkt?
- Bestem hastigheden lige, da han passerer 100 meter-mærket.

Opgave 8 (Influenza-epidemi)

Den logistiske vækst (11) i eksempel 6 kan under visse forudsætninger benyttes som en rimelig model til at beskrive udviklingen af antal sygdomsramte ved en influenza epidemi i en landsby. Det antages, at sygdommen ikke er dødelig. Det oplyses, at der i en by med 5000 indbyggere til tiden 0 er 1 person med influenza. Efter 5 dage er der i alt 6 influenza-ramte.

- Vis at antal influenza-ramte kan beskrives ved følgende funktion:

$$N(t) = \frac{5000}{1 + 4999 \cdot e^{-0,35855 \cdot t}}$$

hvor t er tiden regnet i dage og $N(t)$ angiver antal influenza-ramte. *Hjælp:* Udnyt at antal influenza-ramte må konvergere mod 5000, når tiden går imod uendelig – dvs. at alle i byen før eller senere vil blive ramt. M er med andre ord 5000. Udnyt dernæst de to andre oplysninger til at bestemme de to øvrige konstanter c og a i den logistiske vækst i (11) fra eksempel 6.

- Benyt forskriften fra a) til at bestemme antal influenza-ramte efter 30 dage.
- Hvornår er 4000 indbyggere i byen ramt af influenza?
- Bestem den hastighed, hvormed folk smittes til tidspunktet 20 dage.
- Bestem det tidspunkt, hvor indbyggere smittes hurtigst.
- Tegn grafen for $N(t)$ i intervallet $0 \leq t \leq 50$.
- Overvej hvilke forudsætninger der mon ligger til grund for modellen? Hvad kan for eksempel forhindre at modellen holder stik? Prøv desuden at give et bud på, hvorfor det er rimeligt, at grafen fra f) ser ud som den gør. Tænk på smittespredningen ...

Opgave 9* (Logistisk vækst teoretisk set)

I eksempel 6 omhandlende logistisk vækst blev det påstået, at væksten er størst til det tidspunkt $t_{\max}$, hvor $N(t_{\max}) = \frac{1}{2}M$, jf. (14) i eksempel 6. Eftersat det. Vis desuden, at denne maksimale hastighed er givet ved $N'(t_{\max}) = \frac{1}{4} \cdot M^2 \cdot a$.

Hjælp: Du kan bruge dit CAS-værktøj til at regne med bogstaver. Tidspunktet du søger efter, er det tidspunkt, hvor $N''(t) = 0$ (hvorfor mon?). Udnyt dette til at finde tidspunktet.

Opgave 10 (Newtons afkølingslov)

Newtons afkølingslov siger, at temperaturen af en væske i en beholder vil aftage med en hastighed, som er proportional med væskens temperaturforskul i forhold til omgivelserne. Man kan vise, at det giver anledning til, at temperaturen aftager som en *forskudt eksponentiel* funktion af tiden. I et konkret tilfælde har vi en kop kaffe, hvor kaffens temperatur udvikler sig på følgende måde:

$$T(t) = 54,6 \cdot e^{-0,047 \cdot t} + 23,3$$

hvor t er tiden regnet i minutter og funktionsværdien er temperaturen i °C.



- Hvilken hastighed falder kaffens temperatur med til tidspunkterne henholdsvis 5 min. og 40 min.? Tegn desuden en graf for temperaturen som funktion af tiden.
- Hvornår er den hastighed, hvormed kaffens temperaturen aftager, faldet til 1°C/min?
- Hvad sker der med funktionen, når $t \rightarrow \infty$? Stemmer det med virkeligheden?

Opgave 11

Der er andre modeller i biologi end den logistiske (11) fra eksempel 6, også kaldet for den logistiske vækst med 3 parametre. Der findes også udgaver af den logistiske vækst med 4 og 5 frie parametre. Derudover er der *Gompertz model*. Sidstnævnte studeres blandt andet i forbindelse med væksten af *Cerastium Diffusum* L. (*Caryophyllaceae*) i artiklen:

How to fit nonlinear plant growth models and calculate growth rates: an update for ecologists, af C. E. Timothy Paine, Toby R. Marthews m. fl., *Methods in Ecology and Evolution* 2012, 3, 245–256.

Omtalte plante er i øvrigt fra Nellike-familien. *Gompertz-modellen* har, ligesom den traditionelle logistiske vækst, tre parametre og ser således ud:

$$G(t) = a \cdot \exp(-b \cdot \exp(-c \cdot t))$$

Det viser sig, at modellen er en rimelig god model for udviklingen af biomassen (målt i gram) for ovennævnte plante som funktion af tiden t målt i dage. Lad parametrene være givet ved $a = 6,6$; $b = 9,0$; $c = 0,0305$.

- Hvor stor er væksthastigheden i biomasse efter 100 dage? Samme spørgsmål til tidspunktet 150 dage?
- Bestem det tidspunkt, hvor biomassen vokser hurtigst. Kald tidspunktet $t_{\max}$.
- Hvad vil biomassen nærme sig til, når tiden går mod uendelig?
- Hvor stor er biomassen af planten til tidspunktet $t_{\max}$, og hvor stor en procentdel udgør den af grænse-biomassen fra delspørgsmål c).

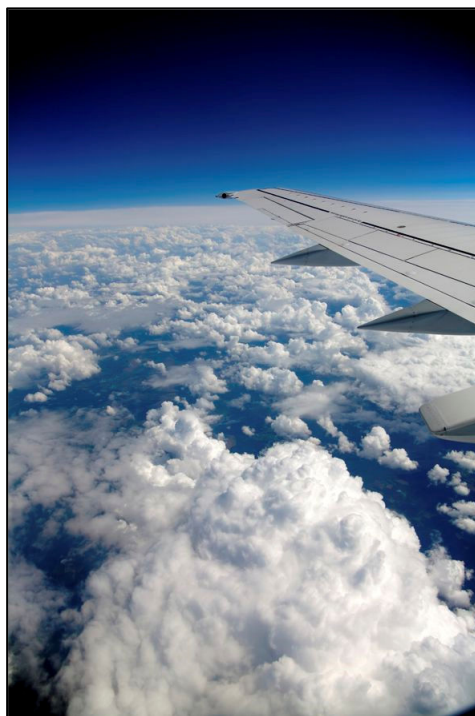
NB! Bemærk, at havde det været den logistiske vækst med 3 parametre, ville svaret have været 50%, jf. (11) fra eksempel 6.

Opgave 12 (Tryk i atmosfæren)

Som bekendt aftager trykket p , når man bevæger sig opad i atmosfæren. I Troposfæren, som er den nederste del af atmosfæren, har man denne model for trykkets variation med højden:

$$p(h) = p_0 \cdot \exp\left(\frac{-M \cdot g \cdot h}{T_0 \cdot R}\right)$$

hvor g er tyngdeaccelerationen $9,82 \text{ m/s}^2$, T_0 er standardtemperaturen ved havniveau: $288,15 \text{ K}$, R er gaskonstanten $9,3145 \text{ J/(mol} \cdot \text{K)}$ og p_0 er almindeligt tryk ved havniveau: 101325 Pa , som er det samme som 1 atm . Højden h regnes i meter (m), og M er molarmassen for atmosfærisk(tør) luft: $0,02896 \text{ kg/mol}$. Trykket p fås i Pascal (Pa). Her skal det tilføjes, at der gælder: $1 \text{ atm} = 101325 \text{ Pa}$.



- Bestem den hastighed, hvormed trykket aftager med højden i højden 10 m . Samme spørgsmål i højden 6000 m . Giv desuden en sproglig fortolkning af værdierne.
- Funktionen $p(h)$ er en eksponentielt aftagende funktion. Bestem halveringskonstanten for funktionen. Hvad fortæller den? Tegn desuden grafen for funktionen i området $0 \leq h \leq 12000$. Troposfæren på vores breddegrad har en tykkelse på 12 km .
- Hvor lavt er trykket ifølge modellen på toppen af Mount Everest (højde: 8848 m)?

Opgave 13

Med hvilken hastighed vokser volumenet af en kugle som funktion af radius?

Hjælp: Husk at rumfanget af en kugle er givet ved formlen $V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$, hvor r er radius. Svaret afhænger åbenlyst af r . Hvad er svaret i tal-værdier, hvis radius er 1 m og hvis radius er 10 m ?