Differentiabilitet og kontinuitet

Lad os først definere begrebet *kontinuitet*.

Definition 1 (Kontinuitet)

En funktion *f* siges at være *kontinuert* i punktet x_0, såfremt der gælder:

(1) $$f(x_0+h) \to f(x_0) \quad \text{for} \quad h \to 0$$

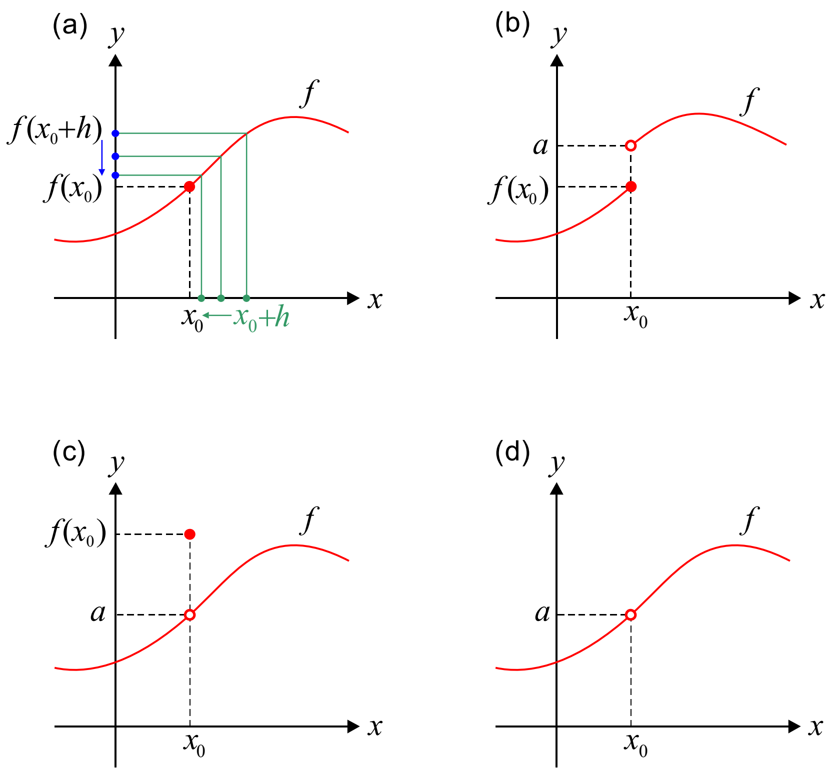
Hvis funktionen er kontinuert i ethvert punkt i dens definitionsmængde, siger vi blot, at *f* er kontinuert.

Bemærkning 2

Lidt løst sagt kan man altså sige, at kontinuitet i x_0 betyder, at når h nærmer sig til 0, så skal funktionsværdien $f(x_0+h)$ nærme sig til funktionsværdien $f(x_0)$. En anden måde at sige det på, er ved at kræve, at *forskellen* i *y*-værdi $\Delta y = f(x_0+h) - f(x_0)$ skal nærme sig 0, når h nærmer sig til 0. Altså:

(2) $$\Delta y \to 0 \quad \text{for} \quad h \to 0$$

Rent grafisk siger man ofte lidt løst, at funktionens graf skal være *sammenhængende*, hvis funktionen skal være kontinuert. Nedenstående fire figurere illustrerer situationen:



I figur (a) har vi grafen for en funktion, som er kontinuert i x_0. Når h går mod 0, så vil funktionsværdien $f(x_0+h)$ gå mod $f(x_0)$ – i øvrigt uanset, om h nærmer sig til 0 fra negativ eller positiv side. De øvrige tre grafer (b), (c) og (d) viser grafer for funktioner, som *ikke* er kontinuerte i x_0: I (b) vil $f(x_0+h) \to a$ for $h \to 0^+$, men $a \neq f(x_0)$. Det samme er tilfældet i (c). I (d) er funktionen slet ikke defineret i x_0, hvorfor den ikke kan være kontinuert der.

□

Sætning 3

Lad *f* være en funktion. Da gælder: f differentiabel i $x_0 \;\Rightarrow\; f$ kontinuert i x_0.

Bevis: Antag at funktionen *f* er differentiabel i x_0. Da må differenskvotienten $\Delta y/h$ for *f* i x_0 have en *endelig* grænseværdi for $h \to 0$. Vi kalder denne grænseværdi for *k*. Vi skal vise, at så er *f* også kontinuert i x_0. Vi kan skrive:

(3) $$\Delta y = \frac{\Delta y}{h} \cdot h \;\to\; k \cdot 0 = 0 \quad \text{for} \quad h \to 0$$

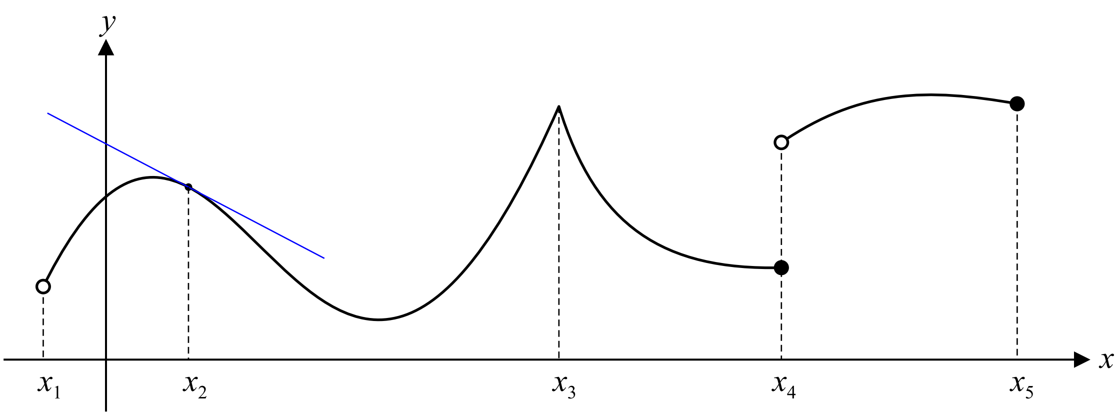
hvilket er betingelsen (2) for at funktionen er kontinuert i x_0.

□

Bemærkning 4

Implikationen i sætning 3 kan *ikke* udvides til *ensbetydende*. Der gælder nemlig *ikke*, at hvis *f* er kontinuert i x_0, så må *f* også være differentiabel i punktet. Dette fremgår direkte af eksemplet $f(x) = |x|$, behandlet i et andet tillæg. Vi konkluderer, at udsagnet om, at en funktion er differentiabel i et punkt, er et stærkere udsagn end at sige, at *f* er kontinuert i punktet.

□



Figuren ovenfor viser grafen for en funktion *f*. I punktet x_1 er funktionen ikke defineret. Derfor er funktionen hverken kontinuert eller differentiabel her. I punktet x_2 er *f* derimod både kontinuert og differentiabel. Man kan definere en tangent i punktet. I punktet x_3 er *f* kontinuert, da grafen er sammenhængende omkring punktet. Derimod er *f* ikke differentiabel i x_3, da grafen har en *spids* her. Det er ikke muligt at tegne eller definere en tangent her. I punktet x_4 er funktionen ikke kontinuert, da "grafen springer" her. Ifølge sætning 3 kan *f* derfor heller ikke være differentiabel i x_4. Endelig er der endepunktet x_5: Funktionen er kontinuert her, da grafen er sammenhængende omkring punktet. Differentiabel er funktionen umiddelbart ikke her, da det vil kræve, at der findes lidt plads på hver side af punktet, hvor funktionen er defineret. Man kan dog godt indføre *differentiabilitet* fra venstre ved kun at kræve, at differenskvotienten har en grænseværdi for $h \to 0^-$, og man vil også kunne indføre en *halvtangent* i x_5, men det er ikke noget, vi vil komme til at bruge meget, hvis overhovedet.