Differentiation af specielle funktioner

I dette tillæg skal vi se, hvordan man differentierer nogle af de specielle funktioner, vi har til rådighed i matematikken: e^x, a^x, $\ln(x)$, x^a med flere.

Sætning 1

Den naturlige eksponentialfunktion $f(x) = e^x$ er differentiabel for alle $x \in R$ med differentialkvotient $f'(x) = e^x$.

Bevis: Vi vil ikke bevise sætningen fuldstændigt, da det er lidt kompliceret. Vi vil derimod bevise den under den antagelse, at vi allerede ved, at f er differentiabel i $x_0 = 0$ med differentialkvotient 1. Det er det samme som at sige, at hældningen af tangenten til grafen i punktet $(0,1)$ er lig med 1. På figuren nedenfor er graferne for tre forskellige eksponentialfunktioner afbildet. Det "naturlige" ved den med grundtal $e = 2{,}7182818...$ er netop, at den har den "pæne" differentialkvotient 1 i $x_0 = 0$, og som følge heraf har sig selv som differentialkvotient.

Antagelsen om at $f'(0) = 1$ kan vi bruge til at konkludere, at differenskvotienten i $x_0 = 0$ har grænseværdien 1 for $h \to 0$:

(1) $$\frac{\Delta y}{h} = \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{e^h - 1}{h} \to 1 \quad \text{for} \quad h \to 0$$

idet $x_0 + h = 0 + h = h$. Vi vil herefter benytte *potensreglerne* til at finde differentialkvotienten i ethvert punkt $x_0 \in R$. Igen starter vi med differenskvotienten:

(2)
$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{h} &= \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{e^{x_0+h}-e^{x_0}}{h} \\ &= \frac{e^{x_0}\cdot e^h - e^{x_0}}{h} = \frac{e^{x_0}\cdot(e^h-1)}{h} = e^{x_0}\cdot\left(\frac{e^h-1}{h}\right) \to e^{x_0} \quad \text{for } h \to 0 \end{aligned}$$

hvor vi har udnyttet, at parentesen netop er differenskvotienten i 0. Ifølge (1) ved vi, at den går mod 1, når $h \to 0$. Størrelsen e^{x_0} er fast, dvs. afhænger ikke af *h*. Derfor fås, at differenskvotienten i x_0 går mod e^{x_0} for $h \to 0$. Vi konkluderer, at *f* er differentiabel i x_0 og at differentialkvotienten er lig med grænseværdien, dvs. e^{x_0}. Det ønskede er dermed vist: $f'(x_0) = e^{x_0}$.

□

Sætning 2

Den naturlige logaritmefunktion $f(x) = \ln(x)$, $x \in \left]0,\infty\right[$ er differentiabel i ethvert punkt i definitionsmængden med differentialkvotient $f'(x) = 1/x$.

Bevis: Vi vil ikke bevise sætningen her. Det skal blot nævnes, at sætningen kan bevises ved brug af en sætning om differentiation af den *omvendte* (inverse) funktion.

□

Sætning 3

Lad $k \in R$ være en konstant. Da er funktionen $f(x) = e^{k\cdot x}$ differentiabel for alle $x \in R$ med differentialkvotient $f'(x) = k \cdot e^{k\cdot x}$.

Bevis: Funktionen kan betragtes som en sammensat funktion, hvor den indre funktion er $g(x) = k \cdot x$, mens den ydre funktion er $h(y) = e^y$.

Ydre: $h(y) = e^y$, $h'(y) = e^y$
Indre: $g(x) = k \cdot x$, $g'(x) = k$

Ved af brug af reglen for differentiation af sammensat funktion fås:

(3)
$$f'(x) = \left(h \circ g\right)'(x) = h'(g(x)) \cdot g'(x) = e^{k\cdot x} \cdot k$$

hvormed det ønskede er vist.

□

Bemærkning 4

Man kan omskrive en generel eksponentialfunktion a^x, hvor $a > 0$, til en funktion på formen $e^{k\cdot x}$, som følgende omskrivning viser:

(4)
$$a^x = \left(e^{\ln(a)}\right)^x = e^{\ln(a)\cdot x}$$

hvor vi har udnyttet at e^x og $\ln(x)$ er hinandens omvendte funktioner: $e^{\ln(a)} = a$. I (4) er k altså lig med $\ln(a)$. Grunden til at funktionen på formen $e^{k\cdot x}$ er særlig interessant er, at den ofte foretrækkes fremfor funktionen på formen a^x. Ved anvendelser kan man nemlig bruge førstnævnte form med *enhed*, mens det ikke er muligt i sidstnævnte. Et eksempel fra kernefysikken er den velkendte henfaldslov: $N(t) = N_0 \cdot e^{-k\cdot t}$. Den beskriver hvordan antallet af radioaktive kerner aftager eksponentielt med tiden. Her repræsenterer t tiden, og k kaldes henfaldskonstanten. Hvis t indsættes med enheden s (sekunder), kan vi lade k have enheden s^{-1}, således at produktet $-k\cdot t$ er dimensionsløst. Det er et krav, at eksponenten skal være uden enhed: Det giver ikke mening at opløfte et tal i en størrelse, som har en enhed. Det skal lige tilføjes, at det faktum, at der er tilføjet et minus, ikke er vigtig. Man foretrækker at den fysiske konstant k er positiv. Så må man skrive $-k$.

Sætning 5 (Eksponentialfunktion)

Lad $a > 0$ være et fast tal. Eksponentialfunktionen $f(x) = a^x$ differentiabel i ethvert $x \in R$ med differentialkvotient $f'(x) = \ln(a)\cdot a^x$.

Bevis: Fremgår direkte af sætning 3 og (4).

□

Vi springer nu fra eksponentialfunktioner til potensfunktioner. Den næste sætning viser, hvordan man differentierer potensfunktioner med ikke blot heltallige eksponenter. Det skal dog tilføjes, at man må begrænse definitionsmængden til de positive tal. For de fleste ikke-heltallige eksponenter vil potensfunktionen nemlig kun være defineret i $]0,\infty[$.

Sætning 6 (Potensfunktion)

Lad $a \in R$ være et fast tal. Potensfunktionen $f(x) = x^a$, $x > 0$ differentiabel med differentialkvotient $f'(x) = a\cdot x^{a-1}$.

Bevis: Vi skal bruge samme idé som i (4). Blot er det x, som vi vil omskrive: $x = e^{\ln(x)}$.

(5) $$x^a = (e^{\ln(x)})^a = e^{\ln(x)\cdot a}$$

I sidste skridt er en potensregel anvendt. Med omskrivningen har vi en sammensat funktion, som vi kan differentiere:

$$\text{Ydre:} \quad h(y) = e^y, \quad h'(y) = e^y$$

$$\text{Indre:} \quad g(x) = a\cdot\ln(x), \quad g'(x) = a\cdot\frac{1}{x} = \frac{a}{x}$$

Ved af brug af reglen for differentiation af sammensat funktion fås:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \left(h \circ g\right)'(x) \\
&= h'(g(x)) \cdot g'(x) \\
&= e^{\ln(x)\cdot a} \cdot a \cdot \frac{1}{x} \\
&= x^a \cdot a \cdot x^{-1} \\
&= a \cdot x^{a-1}
\end{aligned} \tag{6}
$$

I fjerde lighedstegn er (5) benyttet "baglæns" samt at $a \cdot 1/x = a \cdot x^{-1}$. I femte lighedstegn er en potensregel brugt. Hermed er det ønskede vist.

□

Vi er nu klar til at kigge på de trigonometriske funktioner og deres differentialkvotienter.

Sætning 7

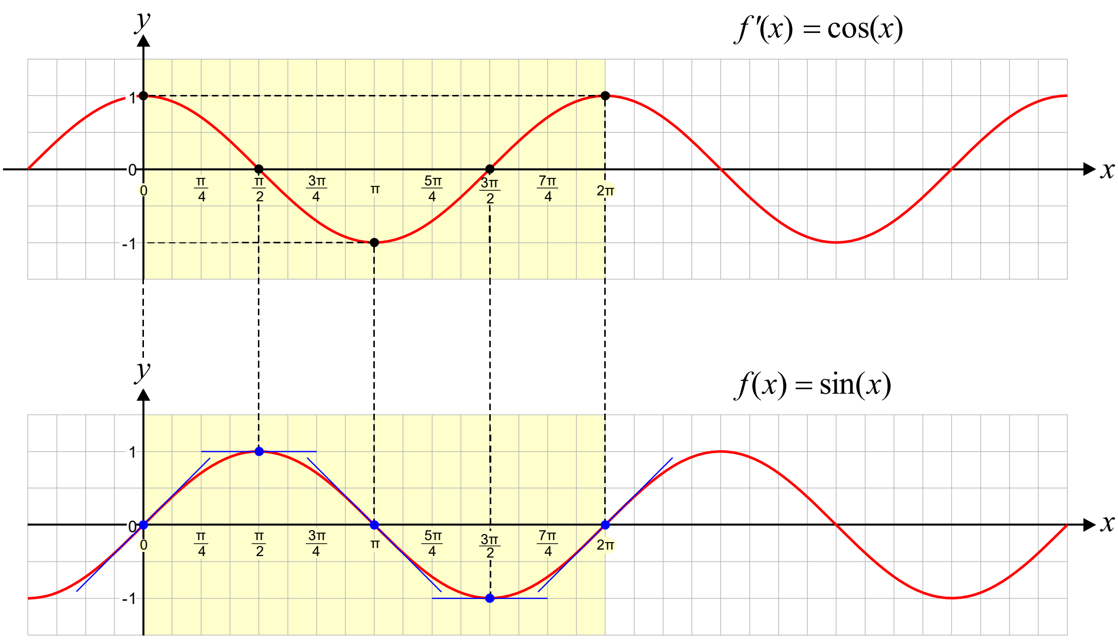
De trigonometriske funktioner $\sin(x)$, $\cos(x)$ og $\tan(x)$ er differentiable i deres definitionsmængde med følgende differentialkvotienter:

a) $(\sin(x))' = \cos(x)$

b) $(\cos(x))' = -\sin(x)$

c) $(\tan(x))' = 1 + \tan^2(x)$ eller $1/\cos^2(x)$

Bevis: Det er ret tungt og teknisk at vise, at $\sin(x)$ og $\cos(x)$ er differentiable funktioner og udlede deres differentialkvotienter. Derfor undlader vi det. Derimod vil vi rent grafisk sandsynliggøre a). Den nederste figur viser grafen for funktionen $f(x) = \sin(x)$ og den øverste figur viser den differentierede funktion $f'(x) = \cos(x)$. Da begge funktioner er *periodiske* med periode 2π, kan vi nøjes med at betragte intervallet $[0, 2\pi]$. Derfor er området markeret med gult.



På den nederste figur er tangenten til grafen for *f* tegnet i $x_0 = 0$. Vi ser, at den har hældning 1. Det stemmer med, at $f'(x)$ har værdien 1 i 0. På nederste figur er tangenten til grafen for *f* tegnet i $x_0 = \frac{\pi}{2}$. Den har hældning 0, da den er vandret. Det stemmer med at grafen for f' skærer *x*-aksen i $x_0 = \frac{\pi}{2}$. Sådanne kunne fortsættes for enhver værdi af x_0. Dermed har vi sandsynliggjort, at $(\sin(x))' = \cos(x)$. Vi mangler tangens. Her benytter vi kvotientreglen for differentiation nævnt i andet tillæg:

$$
\begin{aligned}
(\tan(x))' &= \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)' = \frac{(\sin(x))' \cdot \cos(x) - \sin(x) \cdot (\cos(x))'}{(\cos(x))^2} = \\
&= \frac{\cos(x) \cdot \cos(x) - \sin(x) \cdot (-\sin(x))}{(\cos(x))^2} = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)
\end{aligned}
$$

□