Differentiation af $f(x) = \frac{1}{x}$

Sætning 1

Funktionen $f(x) = 1/x$ er differentiabel i ethvert punkt $x_0 \neq 0$, og differentialkvotienten er givet ved $f'(x_0) = -1/x_0^2$.

Bevis: Vi bruger tretrinsreglen:

1. Differenskvotienten: $\dfrac{\Delta y}{h} = \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \dfrac{\dfrac{1}{x_0+h}-\dfrac{1}{x_0}}{h}$

2. Reduktion: $\dfrac{\Delta y}{h} = \dfrac{\dfrac{1}{x_0+h}-\dfrac{1}{x_0}}{h} = \dfrac{\dfrac{x_0}{(x_0+h)\cdot x_0}-\dfrac{x_0+h}{(x_0+h)\cdot x_0}}{h} = \dfrac{\dfrac{x_0-(x_0+h)}{(x_0+h)\cdot x_0}}{h}$

$$= \frac{\dfrac{x_0-x_0-h}{(x_0+h)\cdot x_0}}{h} = \frac{\dfrac{-h}{(x_0+h)\cdot x_0}}{h} = -\frac{h}{(x_0+h)\cdot x_0\cdot h}$$

$$= -\frac{1}{(x_0+h)\cdot x_0}$$

   1. lighedstegn: Forskriften indsættes. 2. lighedstegn: Hver brøk forlænges, så de får samme nævner, dvs. $(x_0+h)\cdot x_0$. 3. lighedstegn: Der sættes på fælles brøkstreg (husk parentes!). 4. lighedstegn: Minus-parentesen hæves ved at skifte fortegn på leddene i parentesen. 5. lighedstegn: Tælleren i øverste brøk reduceres. 6. lighedstegn: En brøk divideres med et tal ved at tallet ganges ned i nævneren. 7. lighedstegn: h forkortes væk i tæller og nævner.

3. Grænseværdi: Vi ser: $\dfrac{\Delta y}{h} = -\dfrac{1}{(x_0+h)\cdot x_0} \to -\dfrac{1}{(x_0+0)\cdot x_0} = -\dfrac{1}{x_0^2}$ for $h \to 0$.

   Da grænseværdien eksisterer, konstaterer vi, at *f* er differentiabel i $x_0 \neq 0$, og at differentialkvotienten i x_0 er lig med $f'(x_0) = -1/x_0^2$.

Det ønskede er dermed vist.

□