Differentiation af $f(x) = \frac{1}{x}$

Sætning 1

Funktionen $f(x) = 1/x$ er differentiabel i ethvert punkt $x_0 \neq 0$, og differentialkvotienten er givet ved $f'(x_0) = -1/x_0^2$.

Bevis: Vi bruger tretrinsreglen:

1. Differenskvotienten: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \dfrac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}}{x-x_0}$

2. Reduktion: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}}{x-x_0} = \dfrac{\frac{x_0}{x\cdot x_0}-\frac{x}{x\cdot x_0}}{x-x_0} = \dfrac{\frac{x_0-x}{x\cdot x_0}}{x-x_0}$

$$= \frac{x_0-x}{(x-x_0)\cdot x\cdot x_0} = \frac{-(x-x_0)}{(x-x_0)\cdot x\cdot x_0} = -\frac{1}{x\cdot x_0}$$

   1. lighedstegn: Forskriften indsættes. 2. lighedstegn: Hver brøk forlænges, så de får samme nævner, dvs. $x\cdot x_0$. 3. lighedstegn: Der sættes på fælles brøkstreg. 4. lighedstegn: En brøk divideres med et tal ved at tallet ganges ned i nævneren. 5. lighedstegn: Omskrivning af tælleren, så vi får parentesen $(x-x_0)$ i både tæller og nævner. 6. lighedstegn: Parentesen divideres væk.

3. Grænseværdi: Vi konstaterer, at $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = -\dfrac{1}{x\cdot x_0} \rightarrow -\dfrac{1}{x_0\cdot x_0} = -\dfrac{1}{x_0^2}$ for $x \rightarrow x_0$.

   Da grænseværdien eksisterer, konstaterer vi, at *f* er differentiabel i $x_0 \neq 0$, og at differentialkvotienten i x_0 er lig med $f'(x_0) = -1/x_0^2$.

Det ønskede er dermed vist.

□