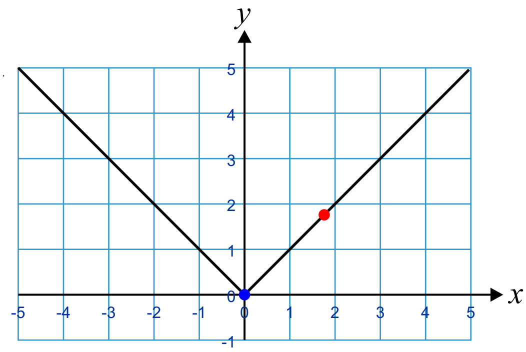
En ikke-differentiabel funktion

Vi skal se et eksempel på en funktion, som *ikke* er differentiabel i et bestemt punkt. Det klassiske eksempel er funktionen $f(x)=|x|$, kaldet *numerisk x*. Der er tale om en funktion, som alternativt kan skrives som en "gaffel-forskrift":

(1)
$$f(x) = \begin{cases} x & \text{for } x \geq 0 \\ -x & \text{for } x < 0 \end{cases}$$



For ikke-negative x-værdier er funktionen lig med x og for negative x-værdier er funktionen lig med $-x$. Hvis man tegner grafen, opdager man, at den har en kant i $x_0 = 0$. Vi vil vise, at funktionen *ikke* er differentiabel i netop dette punkt. For at differenskvotienten skal kunne have en grænseværdi for $x \to 0$, er det nødvendigt, at det er den samme grænseværdi man får, uanset om man lader x nærme sig til 0 fra højre eller fra venstre. Lad os kigge på differenskvotienten i tilfælde af, at det bevægelige punkt x ligger henholdsvis til højre og til venstre for 0:

(2)
$$\begin{aligned} h>0: \quad & \frac{\Delta y}{h} = \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{f(h)-f(0)}{h} = \frac{h-0}{h} = \frac{h}{h} = 1 \\ h<0: \quad & \frac{\Delta y}{h} = \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{f(h)-f(0)}{h} = \frac{-h-0}{h} = \frac{-h}{h} = -1 \end{aligned}$$

Vi ser, at differenskvotienten er konstant lig med 1, når h er positiv, mens den er konstant lig med –1, når h er negativ. Derfor får vi:

(3)
$$\frac{\Delta y}{h} \to 1 \ \text{ for } \ h \to 0^+ \quad \text{mens} \quad \frac{\Delta y}{h} \to -1 \ \text{ for } \ h \to 0^-$$

Da grænseværdierne fra højre og venstre er forskellige, har differenskvotienten ingen grænseværdi for $h \to 0$ og dermed er funktionen ikke differentiable i $x_0 = 0$. Funktionen er imidlertid differentiabel i alle andre punkter end 0.

□

Tilbage i historien troede man faktisk længe, at hvis en funktion er kontinuert, så måtte den også kunne differentieres. Denne vildfarelse hænger dog også sammen med, at selve funktionsbegrebet var under udvikling i 1800-tallet. For eksempel blev en funktion defineret ved en gaffelforskrift opfattet som en slags fupnummer. Men så kom den tyske matematiker Karl Weierstrass (1815-1897) i 1871 med en funktion på en form, som man indtil da accepterede fuldt ud. Han viste at funktionen er kontinuert i ethvert punkt, men ikke er differentiabel i noget punkt! Det var et chok for matematikverdenen! På den måde kan man sige, at udviklingen af funktionsbegrebet og differentialregningen foregik sideløbende og er endt med den velpolerede teori, vi har i dag. I opgave på næste side kan man studere Karl Weierstrass' "syge" funktion i et CAS-værktøj.

Opgave (Weierstrass' funktion)

Vi skal se et eksempel på en funktion, som er kontinuert i ethvert punkt $x \in R$, men *ikke* differentiabel i noget som helst punkt! Eksemplet rystede matematikverdenen. Funktionen er defineret ved en uendelig række:

$$W(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a^k \cdot \cos(b^k \cdot \pi \cdot x)$$

hvor a er et tal, som opfylder $0 < a < 1$, mens b er et positivt *ulige* (helt) tal, som opfylder at $a \cdot b > 1 + \frac{3}{2}\pi$. Vinkler skal regnes i radianer, ikke grader! I det følgende skal du bruge dit CAS-værktøj til at tegne grafen for funktionen, eller rettere en tilnærmelse til den. Vi er nemlig nødt til at skære den uendelige sum af ved N:

$$W_N(x) = \sum_{k=1}^{N} a^k \cdot \cos(b^k \cdot \pi \cdot x)$$

Vælg følgende parametre, som tilfredsstiller kravene: $a = 0{,}5$ og $b = 13$. Sæt for eksempel N til at være 100. Tegn grafen i intervallet $[0,3]$. Det kan være, at du er nødt til at indstille CAS-værktøjet, så det tegner ekstra mange punkter. Hvad observerer du? Kan du forklare med ord, hvorfor funktionen mon ikke er differentiabel noget sted, altså at grafen ikke har en tangent noget sted?