Differentiation af andengradspolynomium

Sætning 1

Funktionen $f(x) = ax^2 + bx + c$, hvor *a*, *b* og *c* er konstanter, er differentiabel i ethvert punkt $x_0 \in R$, og differentialkvotienten er givet ved $f'(x_0) = 2ax_0 + b$.

Bevis: Vi bruger tretrinsreglen:

Trin 1+2: (Differenskvotienten opskrives og reduceres)

$$
\begin{aligned}
\frac{\Delta y}{h} &= \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \\
&= \frac{\left(a \cdot (x_0+h)^2 + b \cdot (x_0+h) + c\right) - \left(a \cdot x_0^2 + b \cdot x_0 + c\right)}{h} \\
&= \frac{a \cdot (x_0+h)^2 + b \cdot (x_0+h) + c - a \cdot x_0^2 - b \cdot x_0 - c}{h} \\
&= \frac{a \cdot (x_0^2 + h^2 + 2 \cdot x_0 \cdot h) + b \cdot (x_0+h) + c - a \cdot x_0^2 - b \cdot x_0 - c}{h} \\
&= \frac{a \cdot x_0^2 + a \cdot h^2 + 2 \cdot a \cdot x_0 \cdot h + b \cdot x_0 + b \cdot h + c - a \cdot x_0^2 - b \cdot x_0 - c}{h} \\
&= \frac{a \cdot h^2 + 2 \cdot a \cdot x_0 \cdot h + b \cdot h}{h} \\
&= \frac{h \cdot (a \cdot h + 2 \cdot a \cdot x_0 + b)}{h} \\
&= a \cdot h + 2 \cdot a \cdot x_0 + b
\end{aligned}
$$

2. lighedstegn: Vi indsætter i forskriften. 3. lighedstegn: En plus-parentes hæves uden videre og en minus-parentes hæves ved at skifte fortegn på de enkelte led i parentesen. 4. lighedstegn: En kvadratsætning benyttes. 5. lighedstegn: Der ganges ind i parentes. 6. lighedstegn: Led forkorter ud. 7. lighedstegn: *h* sættes uden for parentes i tælleren. 8. lighedstegn: *h* forkortes væk i tæller og nævner.

Trin 3 (Undersøger for eventuel grænseværdi)

$$\frac{\Delta y}{h} = a \cdot h + 2 \cdot a \cdot x_0 + b \;\rightarrow\; a \cdot 0 + 2 \cdot a \cdot x_0 + b = 2 \cdot a \cdot x_0 + b \quad \text{for} \quad h \rightarrow 0$$

Da grænseværdien for differenskvotienten eksisterer for $h \rightarrow 0$, konkluderer vi, at *f* er differentiabel i x_0, og at differentialkvotienten i x_0 er lig med grænseværdien, altså: $f'(x_0) = 2ax_0 + b$.

□