Differentiation af andengradspolynomium

Sætning 1

Funktionen $f(x) = ax^2 + bx + c$, hvor *a*, *b* og *c* er konstanter, er differentiabel i ethvert punkt $x_0 \in R$, og differentialkvotienten er givet ved $f'(x_0) = 2ax_0 + b$.

Bevis: Vi bruger tretrinsreglen:

Trin 1+2: (Differenskvotienten opskrives og reduceres)

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\
&= \frac{\left(a \cdot x^2 + b \cdot x + c\right) - \left(a \cdot x_0^2 + b \cdot x_0 + c\right)}{x - x_0} \\
&= \frac{a \cdot x^2 + b \cdot x + c - a \cdot x_0^2 - b \cdot x_0 - c}{x - x_0} \\
&= \frac{a \cdot x^2 - a \cdot x_0^2 + b \cdot x - b \cdot x_0}{x - x_0} \\
&= \frac{a \cdot (x^2 - x_0^2) + b \cdot (x - x_0)}{x - x_0} \\
&= a \cdot \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} + b \cdot \frac{x - x_0}{x - x_0} \\
&= a \cdot \frac{(x + x_0) \cdot (x - x_0)}{x - x_0} + b \\
&= a \cdot (x + x_0) + b
\end{aligned}$$

2. lighedstegn: Vi indsætter i forskriften. 3. lighedstegn: En plus-parentes hæves uden videre og en minus-parentes hæves ved at skifte fortegn på de enkelte led i parentesen. 4. lighedstegn: Led samles og *c* reduceres væk. 5. lighedstegn: Der faktoriseres, dvs. sættes uden for parentes. 6. lighedstegn: Der sættes på hver sin brøkstreg. 7. lighedstegn: En kvadratsætning bruges og der forkortes. 8. lighedstegn: Der forkortes.

Trin 3 (Undersøger for eventuel grænseværdi)

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = a \cdot (x + x_0) + b \;\rightarrow\; a \cdot (x_0 + x_0) + b = 2 \cdot a \cdot x_0 + b \quad \text{for} \quad x \rightarrow x_0$$

Da grænseværdien for differenskvotienten eksisterer for $h \rightarrow 0$, konkluderer vi, at *f* er differentiabel i x_0, og at differentialkvotienten i x_0 er lig med grænseværdien, altså: $f'(x_0) = 2ax_0 + b$.