Differentiation af simpelt andengradspolynomium

Sætning 1

Funktionen $f(x) = ax^2$, hvor a er en konstant, er differentiabel i ethvert punkt $x_0 \in R$, og differentialkvotienten er givet ved $f'(x_0) = 2ax_0$.

Bevis: Vi bruger tretrinsreglen:

1. Differenskvotienten: $\dfrac{\Delta y}{h} = \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \dfrac{a\cdot(x_0+h)^2 - a\cdot x_0^2}{h}$

2. Reduktion:

$$
\begin{aligned}
\frac{\Delta y}{h} &= \frac{a\cdot(x_0+h)^2 - a\cdot x_0^2}{h} \\
&= \frac{a\cdot(x_0^2 + h^2 + 2\cdot x_0\cdot h) - a\cdot x_0^2}{h} \\
&= \frac{a\cdot x_0^2 + a\cdot h^2 + a\cdot 2\cdot x_0\cdot h - a\cdot x_0^2}{h} \\
&= \frac{a\cdot h^2 + a\cdot 2\cdot x_0\cdot h}{h} \\
&= \frac{h\cdot\left(a\cdot h + a\cdot 2\cdot x_0\right)}{h} \\
&= a\cdot h + 2\cdot a\cdot x_0
\end{aligned}
$$

   2. lighedstegn: Vi har benyttet en kvadratsætning. 5. lighedstegn: h er sat uden for parentes (faktorisering). 6. lighedstegn: h forkortes væk i tæller og nævner.

3. Grænseværdi:

$$\frac{\Delta y}{h} = a\cdot h + 2\cdot a\cdot x_0 \;\to\; a\cdot 0 + 2\cdot a\cdot x_0 = 2\cdot a\cdot x_0 \quad \text{for} \quad h \to 0\,.$$

   Da grænseværdien eksisterer, konkluderer vi, at f er differentiabel i x_0, og at differentialkvotienten i x_0 er lig med grænseværdien, altså: $f'(x_0) = 2ax_0$.

Det ønskede er dermed vist.

□