Differentiation af simpelt andengradspolynomium

Sætning 1

Funktionen $f(x) = a \cdot x^2$ er differentiabel i ethvert punkt $x_0 \in R$, og differentialkvotienten er givet ved $f'(x_0) = 2ax_0$.

Bevis: Vi bruger tretrinsreglen:

1. Differenskvotienten:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{a \cdot x^2 - a \cdot x_0^2}{x - x_0} = \frac{a \cdot (x^2 - x_0^2)}{x - x_0} = a \cdot \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0}$$

2. Reduktion: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = a \cdot \dfrac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = a \cdot \dfrac{(x + x_0) \cdot (x - x_0)}{x - x_0} = a \cdot (x + x_0)$

3. Grænseværdi: Vi konstaterer, at

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = a \cdot (x + x_0) \rightarrow a \cdot (x_0 + x_0) = 2ax_0 \quad \text{for} \quad x \rightarrow x_0 .$$

Da grænseværdien eksisterer, konkluderer vi, at f er differentiabel i x_0, og at differentialkvotienten i x_0 er lig med $f'(x_0) = 2ax_0$.

Det ønskede er dermed vist.

□