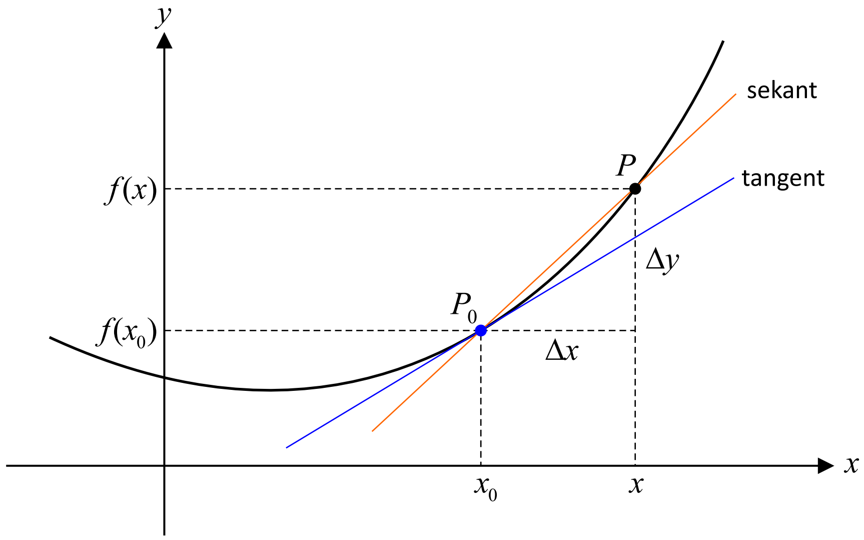
Begrebet differentialkvotient

På figuren nedenfor har vi givet et fast punkt P_0 og et bevægeligt punkt P på grafen for en funktion f. Den orange linje igennem de to punkter kaldes for en *sekant* og har en *hældning*, som vi kan udregne via en velkendt formel fra 1g:

(1) $$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Så hældningen af den orange sekant er lig med forskellen eller *tilvæksten* i y-værdi, Δy, divideret med forskellen eller *tilvæksten* i x-værdi, altså Δx. Brøken i (1) vil vi også betegne *differenskvotienten*.



Definition 1

Med *differenskvotienten* for funktionen f i punktet x_0 menes brøken

(2) $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Hvis vi lader x nærme sig til x_0, vil det bevægelige grafpunkt $P(x, f(x))$ bevæge sig ned ad grafen mod det faste punkt $P_0(x_0, f(x_0))$. For hver ny værdi af x fås en ny sekanthældning. Lidt løst: Hvis denne række af sekanthældninger nærmer sig til et tal a_0, når x nærmer sig til x_0, så siger vi, at f er differentiabel i x_0 med *differentialkvotient* lig med grænseværdien a_0. Vi skriver desuden $f'(x_0) = a_0$, hvor venstresiden udtales "f mærke af x nul". Mere formelt kan det defineres, som vist i definition 2 på næste side.

Vi vil desuden definere *tangenten* til grafen for f i punktet P_0 til at være den blå linje, som har hældning a_0 og som går igennem punktet P_0, jf. definition 3 på næste side.

Definition 2

En funktion *f* siges at være *differentiabel* i punktet x_0, hvis differenskvotienten for *f* i x_0 har en grænseværdi for $x \to x_0$. I så fald kaldes grænseværdien for *differentialkvotienten* for *f* i x_0, og den betegnes med $f'(x_0)$:

(3) $$f'(x_0) \;=\; \lim_{x \to x_0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \right)$$

Hvis *f* er differentiabel i ethvert punkt af sin definitionsmængde, siges *f* at være *differentiabel* – uden angivelse af et punkt.

Definition 3

Antag at funktionen *f* er differentiabel i x_0. Da vil vi sige, at grafen for *f* har en *tangent* i $P_0(x_0, f(x_0))$, som defineres som den linje, der går igennem punktet P_0 og som har hældningen $f'(x_0)$.

Bemærkning 4

Differentialkvotienten kaldes også ofte for *den afledede*. I visse sammenhænge ser man også betegnelsen df/dx i stedet for $f'(x_0)$. Det var den betegnelse, som Leibniz benyttede, da han udviklede differentialregningen. Man skal dog passe på ikke at opfatte det som en brøk mellem to størrelser.

□

Når vi i kommende tillæg skal udlede udtryk for differentialkvotienten for forskellige funktioner, vil vi gøre brug af en fremgangsmåde, som kan betegnes *tretrinsreglen*.

Tretrinsreglen

1. Opskriv udtrykket for differenskvotienten $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.
2. Reducér udtrykket for differenskvotienten fra punkt 1 passende.
3. Afgør om det reducerede udtryk for differenskvotienten har en grænseværdi for $x \to x_0$ eller hvad der er det samme: $\Delta x \to 0$. Hvis grænseværdien eksisterer, sættes den lig med $f'(x_0)$.

Bemærkning 5

At sige at $x \to x_0$ er det samme som at sige at $\Delta x \to 0$. Det bemærkes, at Δx sagtens kan være negativ. Det betyder blot, at det bevægelige punkt x ligger på venstre side af det faste punkt x_0. For at en funktion kan siges at være differentiabel i x_0, så skal differenskvotienten have den samme grænseværdi, hvad enten Δx nærmer sig til 0 fra højre eller fra venstre!