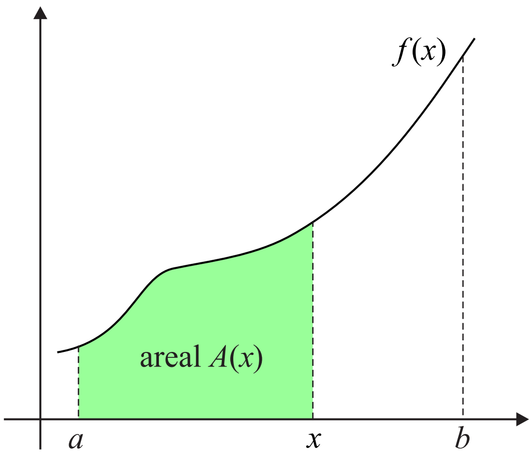
Arealfunktioner og stamfunktioner

I dette tillæg skal vi bevise *integralregningens hovedsætning*.

Definition 1 (Arealfunktion)

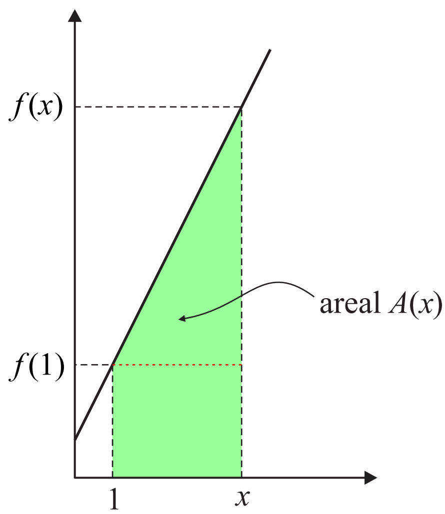
Givet en kontinuert funktion *f*, som er ikke-negativ i et interval $[a,b]$. Med *arealfunktionen* vil vi mene den funktion $A(x)$, som angiver arealet under grafen, ned til *x*-aksen, fra *a* til *x*.



Eksempel 2

Det er ikke normalt at begynde at regne på konkrete arealfunktioner. For rigtigt at forstå, hvad en arealfunktion er, kan det imidlertid være hensigtsmæssigt at kigge på et enkelt konkret eksempel. Lad os sige, at vi har givet funktionen $f(x)=2x+1$, og at $a=1$. Den tilhørende arealfunktion skal angive arealet af det grønne område på figuren nedenfor. Vi kan dele området op i et rektangel med bredden $x-1$ og højden $f(1)$ samt en trekant med grundlinje $x-1$ og højde $f(x)-f(1)$. Da $f(1)=2\cdot 1+1=3$ giver det følgende areal:

$$\begin{aligned}
A(x) &= (x-1)\cdot f(1)+\tfrac{1}{2}\cdot(x-1)\cdot(f(x)-f(1)) \\
&= (x-1)\cdot 3+\tfrac{1}{2}\cdot(x-1)\cdot(2x+1-3) \\
&= 3x-3+\tfrac{1}{2}\cdot(x-1)\cdot(2x-2) \\
&= 3x-3+\tfrac{1}{2}\cdot(2x^2-2x-2x+2) \\
&= 3x-3+x^2-x-x+1 \\
&= x^2+x-2
\end{aligned}$$



For ethvert *x* har vi dermed et udtryk for arealet under grafen fra 1 til *x*.

Betingelsen at f skal være kontinuert sikrer, at man i det hele taget kan tale om, at grafen begrænser et areal. Med betingelsen at funktionen skal være ikke-negativ sikrer vi os desuden, at grafen ikke rækker ned under x-aksen. Vi skal bevise følgende meget smukke egenskab for arealfunktionen:

Sætning 3 (Integralregningens hovedsætning)

Lad f være en funktion, som er kontinuert og ikke-negativ i intervallet $[a,b]$. Da er den tilhørende arealfunktion differentiabel med den afledede $f(x)$, dvs.

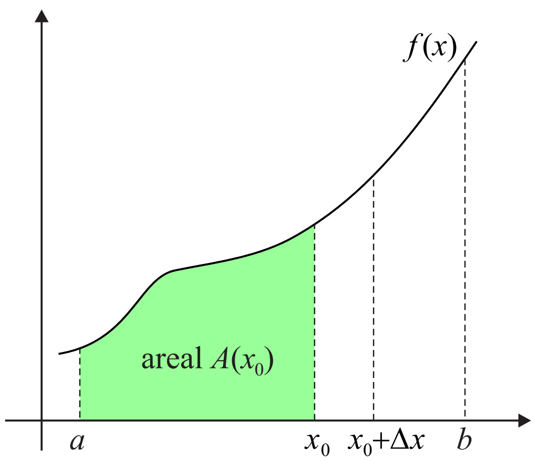
(1) $$A'(x) = f(x)$$

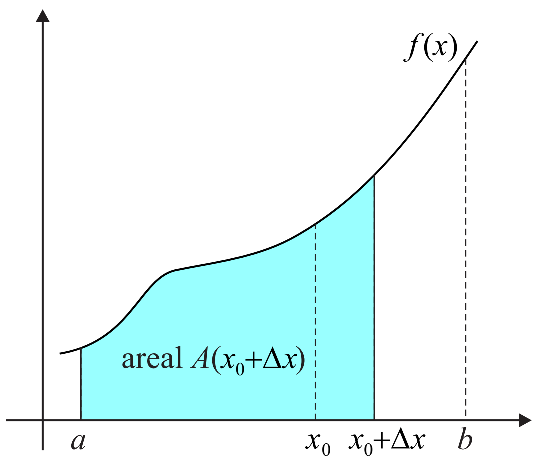
for alle $x \in]a,b[$. Arealfunktionen er altså en stamfunktion til $f(x)$.

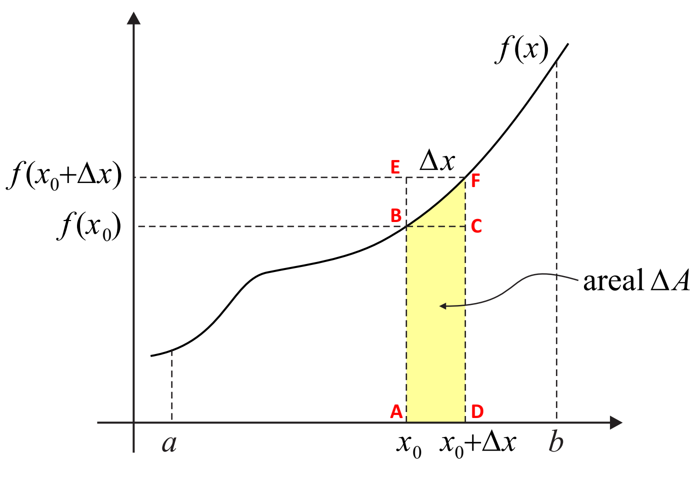
Bevis: Vi skal helt tilbage til definitionen af differentiabilitet. Vi skal have kigget på *differenskvotienten* for arealfunktionen:

(2) $$\frac{\Delta A}{\Delta x} = \frac{A(x_0 + \Delta x) - A(x_0)}{\Delta x}$$

Det kan virke som en umulig opgave at sige noget om denne differenskvotient, da vi ikke ved hvilken funktion, der er tale om. Det viser sig imidlertid, at vi kan vurdere størrelsen nedadtil og opadtil ved at kigge på arealer på figurerne herunder.







Tælleren i differenskvotienten $\Delta A = A(x_0+\Delta x) - A(x_0)$ kan tolkes som arealet af det blå område øverst til højre, minus arealet af det grønne område øverst til venstre. Det er indlysende, at denne differens er lig med arealet af den gule strimmel nederst i midten. Vi skal have vurderet arealet af dette område. Her gør vi lige en ekstra antagelse om vores funktion f, nemlig at den er *voksende*. Det kan vises at sætningen gælder selv uden denne antagelse, men beviset bliver mere medgørlig, hvis vi gør antagelsen. Det betyder nemlig at vi kan sige følgende (overvej!):

(3) Arealet af $\square$ABCD $\leq$ Arealet af den gule strimmel $\leq$ Arealet af $\square$AEFD

Rektangel ABCD har bredden Δx og højden $f(x_0)$ og dermed arealet $f(x_0)\cdot\Delta x$. Tilsvarende for arealet af rektangel AEFD. (3) kan dermed omskrives til:

(4)
$$f(x_0)\cdot\Delta x \;\leq\; \Delta A \;\leq\; f(x_0+\Delta x)\cdot\Delta x$$

Allerede på tegningerne har vi stiltiende antaget at tilvæksten $\Delta x > 0$. Lad os fortsætte med denne antagelse. Vi vil nemlig dividere alle størrelserne i uligheden med Δx. Når man dividerer med et positivt tal, bevares ulighedstegnene:

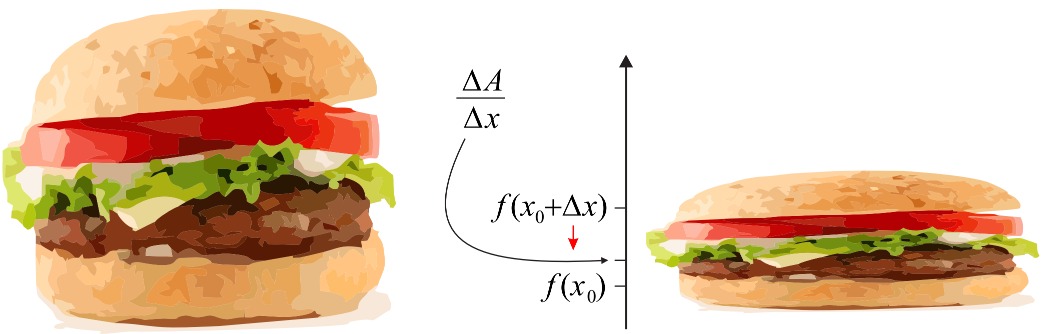
(5)
$$\frac{f(x_0)\cdot\Delta x}{\Delta x} \leq \frac{\Delta A}{\Delta x} \leq \frac{f(x_0+\Delta x)\cdot\Delta x}{\Delta x}$$
$$\Updownarrow$$
$$f(x_0) \leq \frac{\Delta A}{\Delta x} \leq f(x_0+\Delta x)$$

Det sidste trin i *tretrinsreglen* består i at undersøge om differenskvotienten $\Delta A/\Delta x$ har en grænseværdi for $\Delta x \to 0$. Vi har med (5) fået klemt differenskvotienten inde mellem to størrelser. Det ville ikke være brugbart, hvis det ikke var fordi begge disse størrelser nærmer sig til det samme tal! Funktionen f er antaget kontinuert, hvilket betyder:

(6)
$$f(x_0+\Delta x) \to f(x_0) \quad \text{for} \quad \Delta x \to 0$$

Venstresiden i uligheden (5) er fast, når det kun er Δx, der bevæger sig, og højresiden bevæger sig mod det samme tal. Dermed må det, der ligger imellem, også nærme sig til samme tal. Altså har vi:

(7)
$$\frac{\Delta A}{\Delta x} \to f(x_0) \quad \text{for} \quad \Delta x \to 0^+$$



Hele idéen kan opsummeres i et billede af en burger, der klapper sammen: Overbollen repræsenterer $f(x_0+\Delta x)$, underbollen repræsenterer $f(x_0)$, mens selve kødet, som vi gerne vil vide noget om, ligger imellem de to. Overbollen nærmer sig til underbollen. Kødstykket må nødvendigvis følge med. Altså nærmer kødet sig også til underbollen! Vi mangler i princippet at overveje tilfældet hvor tilvæksten Δx er negativ og nærmer sig til 0 fra venstre. Det overlades til læseren at vise, at differenskvotienten i dette tilfælde har samme grænseværdi (se øvelse 4). Vi har dermed at (7) ikke blot gælder for $\Delta x \to 0^+$, men for $\Delta x \to 0$ generelt. Da differenskvotienten har en grænseværdi for $\Delta x \to 0$, er arealfunktionen $A(x)$ differentiabel i x_0 med differentialkvotient $A'(x_0)=f(x_0)$. Det ønskede er dermed vist.

□

Øvelse 4

Overvej hvordan figurerne i beviset for sætning 3 skal ændres for at tage højde for tilfældet med en negativ tilvækst Δx. Vis herefter at $\Delta A/\Delta x \to f(x_0)$ for $\Delta x \to 0^-$.

Hjælp: Vis eventuelt, ved at betragte arealer igen, at man kan opstille følgende ulighed: $f(x_0+\Delta x)\cdot(-\Delta x) \le -\Delta A \le f(x_0)\cdot(-\Delta x)$.

Eksempel 5

I eksempel 2 fandt vi, at arealfunktionen for $f(x)=2x+1$ med udgangspunkt i $a=1$ er lig med $A(x)=x^2+x-2$. Lad os prøve at differentiere arealfunktionen:

$$A'(x)=\left(x^2+x-2\right)'=2x+1$$

Vi har altså minsandten at $A'(x)=f(x)$, præcist som forudsagt i sætning 3!

□