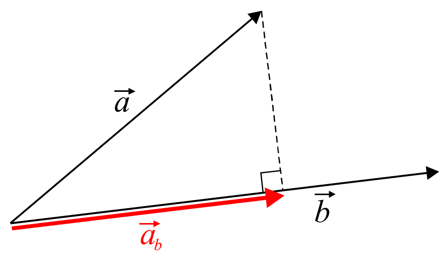
Afstand fra punkt til linje

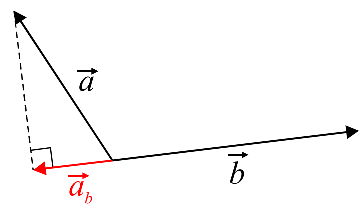
- og projektion af vektor på vektor

I dette tillæg er det hovedformålet at give et bevis for formlen for afstanden fra et punkt til en linje. Hertil skal vi bruge en hjælpesætning om projektion af vektor på vektor.

Projektion af vektor på vektor

Hvad der menes med projektionen af $\vec{a}$ på $\vec{b}$ er illustreret på de to figurer nedenfor. Til venstre det *spidse* tilfælde, hvor projektionsvektoren $\vec{a}_b$ bliver ensrettet med $\vec{b}$ og til højre det *stumpe* tilfælde, hvor $\vec{a}_b$ bliver modsat rettet $\vec{b}$.





Sætning 1 (Projektion af vektor på vektor)

Lad $\vec{a}$ og $\vec{b}$ være to vektorer, hvor sidstnævnte ikke er nulvektor. Da gælder følgende om projektionsvektoren $\vec{a}_b$ af $\vec{a}$ på $\vec{b}$:

a) $\vec{a}_b = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\cdot\vec{b}$ b) $|\vec{a}_b| = \dfrac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{|\vec{b}|}$

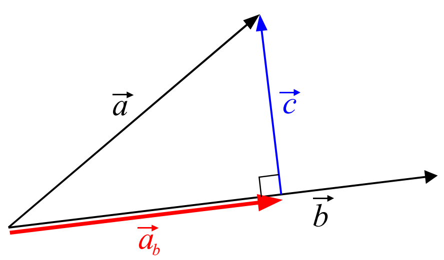
Bevis: Da projektionsvektoren er parallel med $\vec{b}$, kan vi skrive projektionsvektoren som en ukendt konstant *t* gange $\vec{b}$, dvs.

(1) $$\vec{a}_b = t\cdot\vec{b}$$

Dernæst indfører vi en hjælpevektor $\vec{c}$:

(2) $$\vec{c} = \vec{a}-\vec{a}_b = \vec{a}-t\cdot\vec{b}$$

Vi må nødvendigvis have, at $\vec{c}\cdot\vec{b}=0$. Er $\vec{c}$ nulvektor giver det sig selv. Er $\vec{c}$ forskellig fra nulvektor står den pr. definition af projektionsvektoren vinkelret på $\vec{b}$, hvorfor skalarproduktet også skal give 0.



Dette sætter os i stand til at bestemme et udtryk for den ukendte konstant t :

$$\begin{aligned} \vec{c}\cdot\vec{b}=0 \quad &\Leftrightarrow \quad (\vec{a}-t\cdot\vec{b})\cdot\vec{b}=0 \\ &\Leftrightarrow \quad \vec{a}\cdot\vec{b}-t\cdot\vec{b}\cdot\vec{b}=0 \\ &\Leftrightarrow \quad \vec{a}\cdot\vec{b}-t\cdot\left|\vec{b}\right|^2=0 \qquad (3) \\ &\Leftrightarrow \quad \vec{a}\cdot\vec{b}=t\cdot\left|\vec{b}\right|^2 \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|^2}=t \end{aligned}$$

hvor vi undervejs har brugt flere regneregler for skalarproduktet. Ved at indsætte udtrykket for konstanten t i (1) fås straks a):

$$\vec{a}_b = \left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|^2}\right)\cdot\vec{b} \qquad (4)$$

Der er sat parentes omkring den første faktor for at fremhæve, at der er tale om et tal. Vi har dermed bevist a). For at få b) tager vi længden på begge sider i (4) og reducerer:

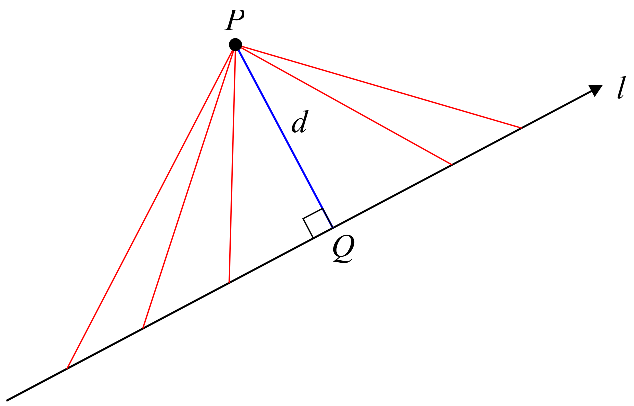
$$\left|\vec{a}_b\right| = \left|\left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|^2}\right)\cdot\vec{b}\right| = \left|\left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|^2}\right)\right|\cdot\left|\vec{b}\right| = \frac{\left|\vec{a}\cdot\vec{b}\right|}{\left|\vec{b}\right|^2}\cdot\left|\vec{b}\right| = \frac{\left|\vec{a}\cdot\vec{b}\right|}{\left|\vec{b}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|}\cdot\left|\vec{b}\right| = \frac{\left|\vec{a}\cdot\vec{b}\right|}{\left|\vec{b}\right|} \qquad (5)$$

2. lighedstegn: Vi har brugt reglen: $\left|t\cdot\vec{b}\right|=|t|\cdot\left|\vec{b}\right|$ for længden af vektorer. Det er værd at bemærke, at de lodrette streger om t hentyder til den *numeriske værdi* af tallet t, mens de to lodrette streger om $\vec{b}$ hentyder til *længden* af $\vec{b}$. 3. lighedstegn: Numerisk værdi af en brøk er lig med numerisk værdi af tæller divideret med numerisk værdi af nævner. Nævneren er dog allerede positiv, så det ændrer ikke noget.

□

Afstand fra punkt til linje

Med afstanden fra et punkt P til en linje l menes den korteste afstand d fra P til et punkt på linjen. Hvis P ligger på linjen, er afstanden 0. Ellers er det nærmeste punkt Q på linjen karakteriseret ved, at PQ står vinkelret på l.

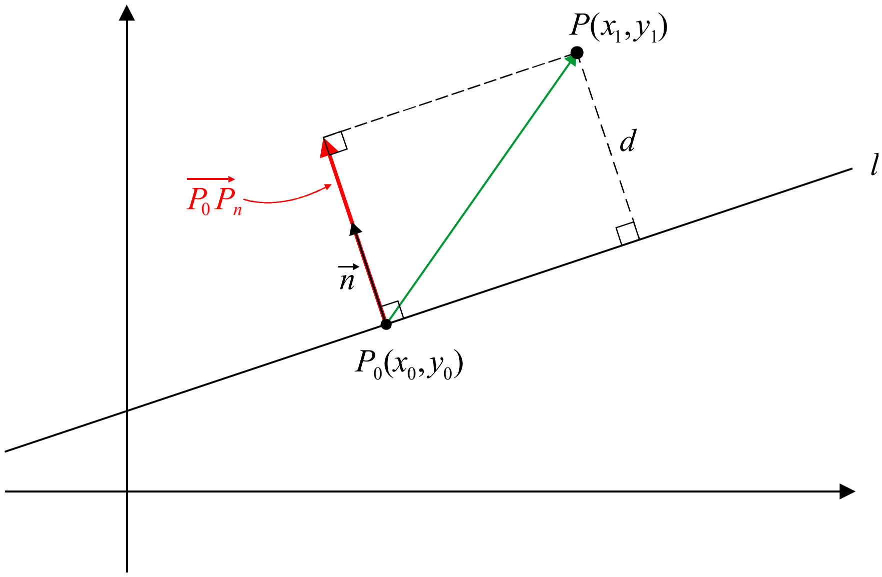


Sætning 2 (Afstand fra punkt til linje)

Givet et punkt $P(x_1, y_1)$ og en linje l med ligning $ax + by + c = 0$. Da kan afstanden fra punktet til linjen bestemmes ved:

(6) $$\mathrm{dist}(P,l) = \frac{|a \cdot x_1 + b \cdot y_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Bevis: Idéen til at bestemme afstanden d fra punktet P til linjen l er følgende: Vi vælger et vilkårligt hjælpepunkt $P_0(x_0, y_0)$ på l og projicerer vektoren $\overrightarrow{P_0P}$ ind på normalvektoren $\vec{n}$ til linjen. Projektionsvektoren $\overrightarrow{P_0P_n}$ har åbenlyst en længde, som er lig med den søgte afstand.



Da punktet P_0 ligger på linjen, stemmer ligningen, hvis vi sætter punktets koordinater ind i linjens ligning:

(7) $$a \cdot x_0 + b \cdot y + c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad c = -a \cdot x_0 - b \cdot y$$

Vi får brug for følgende udtryk senere:

(8) $$\begin{aligned} \overrightarrow{P_0P} \cdot \vec{n} &= \begin{pmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - x_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \\ &= a \cdot (x_1 - x_0) + b \cdot (y_1 - y_0) \\ &= a \cdot x_1 - a \cdot x_0 + b \cdot y_1 - b \cdot y_0 \\ &= a \cdot x_1 + b \cdot y_1 + (-a \cdot x_0 - b \cdot y_0) \\ &= a \cdot x_1 + b \cdot y_1 + c \end{aligned}$$

hvor vi i sidste linje har udnyttet (7). Vi er nu klar til at bruge sætning 1b) til at bestemme længden af den nævnte projektionsvektor $\overrightarrow{P_0P_n}$ af $\overrightarrow{P_0P}$ på $\vec{n}$:

(9) $$d = \left|\overrightarrow{P_0P_n}\right| = \frac{\left|\overrightarrow{P_0P}\cdot\vec{n}\right|}{|\vec{n}|} = \frac{|a\cdot x_1 + b\cdot y_1 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

hvor vi har udnyttet (5), (8) samt at længden af normalvektoren er:

(10) $$|\vec{n}| = \left|\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right| = \sqrt{a^2+b^2}$$

(9) beviser sætningen.

□

Eksempel 3

Bestem afstanden fra punktet $P(8,11)$ til linjen med ligning $3x-4y+7=0$.

Løsning: Vi indsætter punktet i (6), idet $(x_1,y_1)=(8,11)$:

$$\text{dist}(P,l) = \frac{|a\cdot x_1 + b\cdot y_1 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|3\cdot 8 - 4\cdot 11 + 7|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} = \frac{|24-44+7|}{\sqrt{25}} = \frac{|-13|}{\sqrt{25}} = \frac{13}{5} = 2{,}6$$

så afstanden fra punktet til linjen er 2,6.

□

Eksempel 4

Bestem projektionen af vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ på vektoren $\vec{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Løsning: Først udregnes:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 8 \\ -4 \end{pmatrix} = 5\cdot 8 + 2\cdot(-4) = 40-8 = 32$$

$$|\vec{b}|^2 = \left(\sqrt{8^2+(-4)^2}\right)^2 = 8^2+(-4)^2 = 64+16 = 80$$

som indsat i udtrykket i sætning 1a) giver:

$$\vec{a}_b = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\cdot\vec{b} = \frac{32}{80}\cdot\begin{pmatrix} 8 \\ -4 \end{pmatrix} = \tfrac{2}{5}\cdot\begin{pmatrix} 8 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3{,}2 \\ -1{,}6 \end{pmatrix}$$