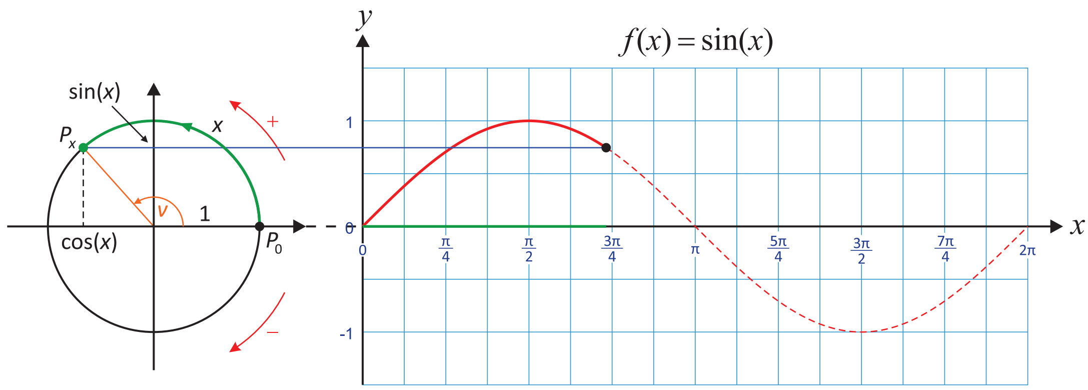
Tema: Trigonometriske funktioner

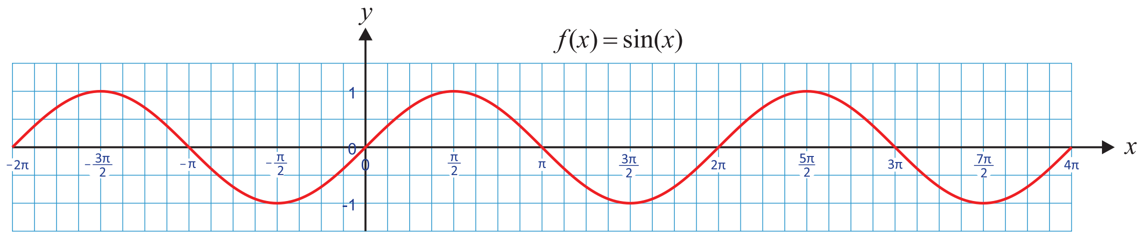
Trigonometri har vi tidligere set anvendt til beregning af vinkler i trekanter og andre geometriske figurer. Man kan imidlertid også betragte $\sin(x)$, $\cos(x)$ og $\tan(x)$ som funktioner i den variable x. Vi vil normalt altid underforstå, at argumentet x er angivet i *radianer*. Det vil være passende lige at repetere dette begreb. På figuren lidt nedenfor til venstre er tegnet en *enhedscirkel*, dvs. en cirkel med radius 1, og den er anbragt med centrum i (0,0). I det følgende kigges kun på vinkler, hvor det ene ben er underforstået at gå fra (0,0) til $P_0(1,0)$ på den positive del af x-aksen. Vinkler regnes positive, hvis man drejer *mod* uret, mens vinkler regnes negative, hvis man drejer *med* uret. Man kan repræsentere den vinkel v, som er vist med en orange bue på figuren på to forskellige måder: Enten ved et gradtal eller ved længden af den del af cirkelbuen, som den pågældende vinkel udspænder. Denne cirkelbue er tegnet med grøn farve. Radiantallet er defineret som længden af denne bue. Hvis man drejer med uret, altså i negativ omløbsretning, skal radiantallet regnes negativt. En hel runde i positiv omløbsretning er 360° eller i radiantal 2π. Det sidste fordi omkredsen af en cirkel med radius 1 er $2\pi \cdot r = 2\pi \cdot 1 = 2\pi$. En hel runde i negativ omløbsretning er tilsvarende –360° eller –2π i radiantal. Man kan sagtens have vinkler, som har et radiantal, der er større end 2π. Det svarer bare til, at der drejes mere end 1 runde i positiv omløbsregning. Tilsvarende med vinkler mindre end minus 2π. Omsætningen mellem gradtal og radiantal er vist på den lille figur ovenfor.

Gradtal (°)		Radiantal
360	$\longleftrightarrow$	2π
1	$\longleftrightarrow$	$\frac{\pi}{180}$
v	$\longleftrightarrow$	$\frac{\pi}{180} \cdot v$
$\frac{180}{\pi} \cdot x$	$\longleftrightarrow$	x

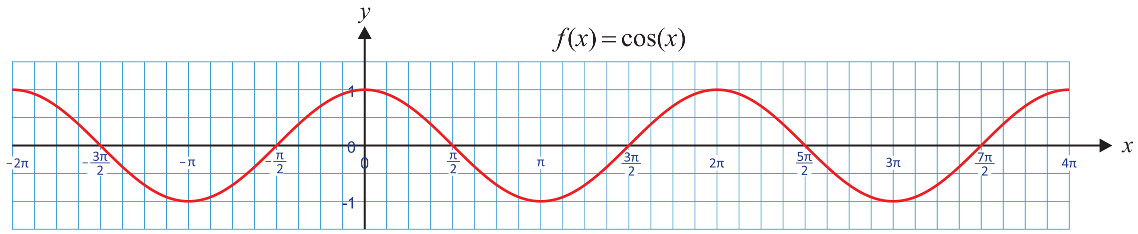


"Slutpunktet" på cirkelbuen hørende til vinklen med radiantal x betegnes P_x og kaldes for *retningspunktet for vinklen x*. Cosinus og sinus til x defineres nu som henholdsvis x-koordinaten og y-koordinaten til retningspunktet. Retningspunktet har med andre ord koordinaterne $(\cos(x), \sin(x))$. Det fører os direkte videre til funktionen $f(x) = \sin(x)$. For hver værdi af x fås dens funktionsværdi $\sin(x)$ som y-koordinaten til retningspunktet. Når man gennemfører en runde på enhedscirklen, svarende til at x varierer mellem 0 og 2π, hvilket giver det anledning til grafen vist til højre på figuren. I intervallet $[0, 2\pi]$ foretager sinus altså én svingning. Havde vi fortsat rundt, ville vi blot have fået gentaget kurven.

Det samme ville ske, hvis vi havde bevæget os i negativ omløbsretning. Vi siger, at funktionen er *periodisk* med *perioden* $T = 2\pi$. På figuren nedenfor er grafen for $\sin(x)$ afbildet i intervallet $[-2\pi, 4\pi]$, dvs. tre perioder er vist.



Funktionen $f(x) = \cos(x)$ har også klart en periode på 2π, og dens graf ser således ud i intervallet $[-2\pi, 4\pi]$:



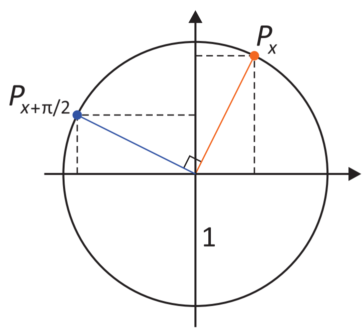
Øvelse 1

Udfyld de manglende felter i skemaet herunder, idet du udnytter omsætningen mellem gradtal og radiantal samt definitionen af sinus og cosinus via enhedscirklen på forrige side. Stemmer dine værdier med graferne herover?

Vinkel i grader	Radiantal x	$\cos(x)$	$\sin(x)$
0			
90	$\pi/2$	0	1
180			
270			
360			

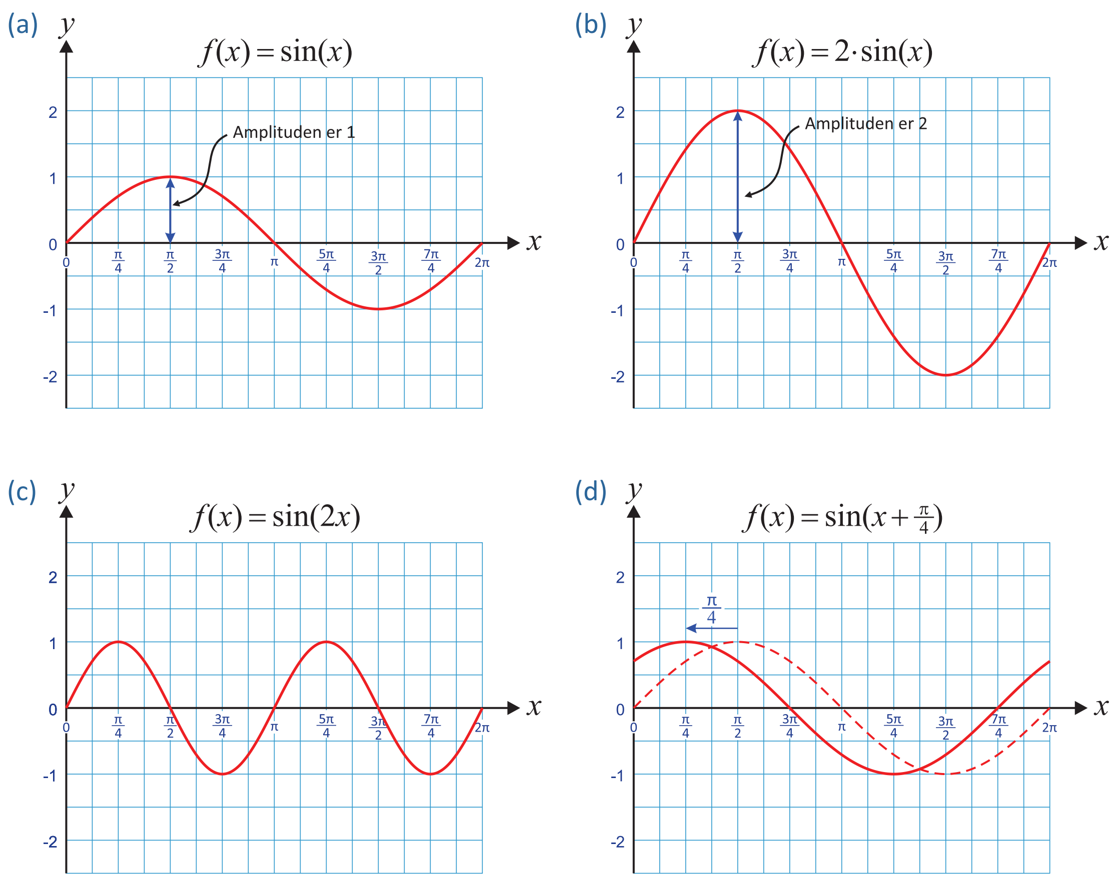
Øvelse 2

I denne øvelse skal du ved hjælp af enhedscirklen argumentere for, at $\cos(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$. Denne sammenhæng viser samtidigt, at man får grafen for cosinus ved at *parallelforskyde* grafen for sinus med $-\pi/2$ i x-aksens retning (overvej?). *Hjælp*: De to involverede retningspunkter er indtegnet på enhedscirklen. Hvilke koordinater har hver af dem? Udnyt dernæst symmetrien ...

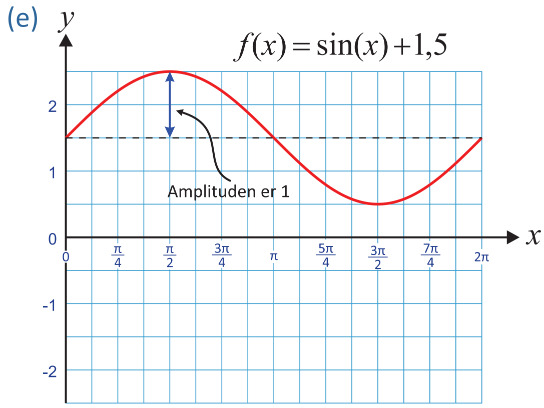


□

Resultatet af øvelse 2 viser, at der er en snæver sammenhæng mellem cosinus og sinus. Grafen for den ene funktion fås ud fra grafen for den anden funktion ved en simpel parallelforskydning i x-aksens retning. I det følgende vil vi studere, hvad der grafisk set sker, når man udfører nogle operationer på funktionen $f(x)=\sin(x)$. På figuren nedenfor er vist (a) grafen for sinus-funktionen i intervallet $[0,2\pi]$. Hvis vi ganger funktionen med 2, får vi naturligvis en funktion, hvis y-værdier overalt er dobbelt så store som før. Specielt er *amplituden*, som er defineret som den numeriske værdi af det maksimale udsving fra svingningsaksen, dobbelt så stor. Det ses tydeligt på delfigur (b). Hvis vi i stedet for at gange sinusfunktionen med 2, vælger at gange x med 2, så kunne man måske tro, at man ville få en graf, som var "strukket ud" i x-aksens retning i forhold til den oprindelige graf i (a). Det er imidlertid lige modsat! Man får en graf, som er "trykket sammen" i x-aksens retning. Man kan argumentere som følger: Funktionen kan opfattes som en sammensat funktion, hvor den ydre funktion er $\sin(y)$ og den indre funktion er $2x$. Den variable x skal nu kun ændre sig halv så meget som før, for at man får den samme funktionsværdi, som før vi gangede x med 2!



I det sidste tilfælde udskifter vi x med $x+\frac{\pi}{4}=x-(-\frac{\pi}{4})$. Det giver en graf, som er den oprindelige graf parallelforskudt med $-\frac{\pi}{4}$ i x-aksens retning. Eller sagt på en anden måde: parallelforskudt med $\frac{\pi}{4}$ i x-aksens negative retning. Det er antydet på delfigur (d), hvor den stiplede kurve repræsenterer grafen for den oprindelige funktion $\sin(x)$. Den sidste operation vi vil kigge på, er at lægge et tal til sinus-funktionen, her 1,5. Der bliver altså lagt 1,5 til alle y-værdier. Ikke overraskende får man en graf, som er en parallelforskydning af den oprindelige med 1,5 i y-aksens retning. Der er indtegnet en stiplet linje, som er *aksen* for den harmoniske svingning. Amplituden er uændret lig med 1, fordi den er det numerisk set maksimale udsving i forhold til aksen.



Definition 3 (Harmonisk svingning)

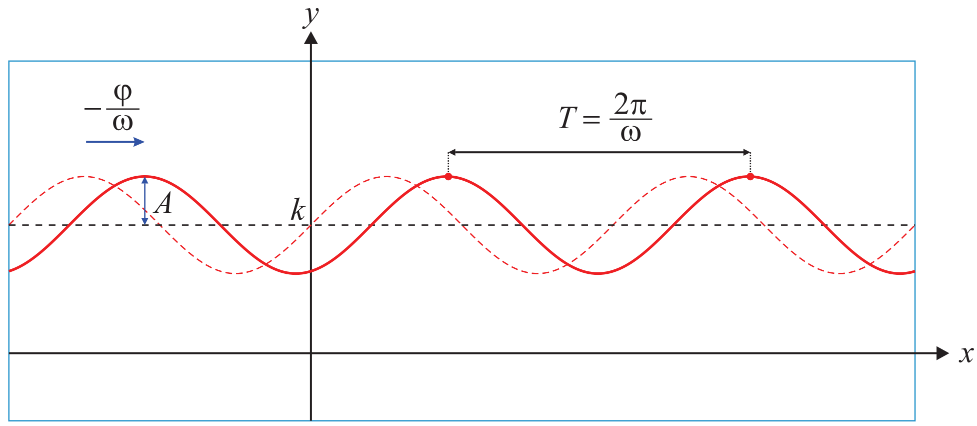
En funktion på formen $f(x) = A \cdot \sin(\omega \cdot x + \varphi) + k$, hvor A, ω, φ og k er konstanter, kaldes for en *harmonisk svingning*. I den forbindelse kaldes A *amplituden*, ω *vinkelhastigheden*, φ *faseforskydningen* og k *akseforskydningen*.

Med overvejelserne ovenfor er vi bedre rustet til at forstå betydningen af de enkelte konstanter eller *parametre*. Nu da alle konstanter kan figurere samtidigt og er generelle, er der grund til at knytte nogle kommentarer. Vi ved, at funktionsværdierne for den sammensatte sinus-funktion $\sin(\omega \cdot x)$ gentager sig, når den indre funktion $\omega \cdot x$ ændrer sig med 2π. Det betyder, at x selv skal ændre sig med $2\pi/\omega$. Perioden eller svingningstiden for $\sin(\omega \cdot x)$ er derfor lig med $T = 2\pi/\omega$. Grafen for den endelige harmoniske svingning får ud fra grafen for den simple funktion $\sin(x)$ ved nedenstående operationer. Detaljerne overlades til læseren. Bemærk dog lige, at parallelforskydningen i x-aksens retning *ikke* er med minus fase-forskydningen, som man måske kunne tro!

Start	$\sin(x)$
Skalering i x-aksens retning med $1/\omega$	$\sin(\omega \cdot x)$
Skalering i y-aksens retning med A	$A \cdot \sin(\omega \cdot x)$
Parallelforskydning i x-aksens retning med $-\varphi/\omega$	$A \cdot \sin(\omega \cdot (x - (-\varphi/\omega)))$ $= A \cdot \sin(\omega \cdot (x + \varphi/\omega))$ $= A \cdot \sin(\omega \cdot x + \varphi)$
Parallelforskydning i y-aksens retning med k	$A \cdot \sin(\omega \cdot x + \varphi) + k$

Normalt vil man forlange, at A og ω er positive. Når x gennemløber et interval af længden T, vil $\omega \cdot x + \varphi$ foretage en runde på enhedscirklen. Derfor vil $\sin(\omega \cdot x + \varphi)$ antage alle værdier mellem –1 og 1, og som følge heraf vil $f(x) = A \cdot \sin(\omega \cdot x + \varphi) + k$ antage alle værdier mellem $-A + k$ og $A + k$. Værdimængden er altså $Vm(f) = [-A + k, A + k]$.

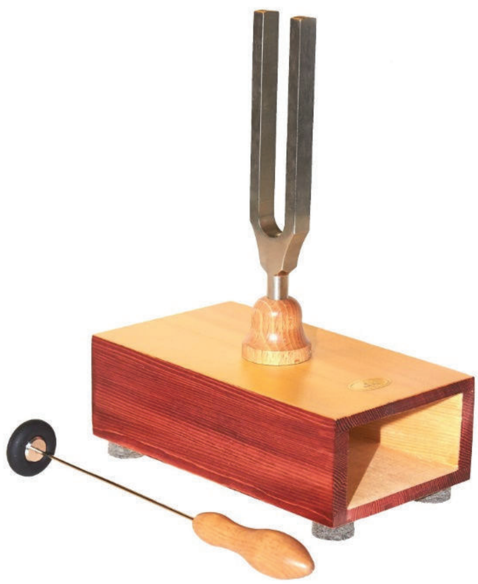
En skitse af grafen for en generel harmonisk svingning er givet herunder. Den stiplede kurve er grafen for tilfældet, hvor faseforskydningen er 0.



Anvendelser

Det er ikke overraskende, at harmoniske svingninger spiller en stor rolle i fysik: lyd, lys, fjedersvingninger, vekselstrøm, magnetisme, kvantemekanik, etc. De kan dog også benyttes til at beskrive periodiske bevægelser indenfor andre områder. Et eksempel kan være variationen af gennemsnitlige månedlige temperaturer i et bestemt geografisk område, udregnet gennemsnitligt over en række år. Vi vil se på et sådant eksempel til sidst. Under anvendelser kan den variable x for eksempel repræsentere en længde eller en tid. I sidstnævnte tilfælde vil man ofte kalde den variable for t.

Eksempel 4 (Lydbølger)



Lyd udbreder sig i luft ved at svingende luftmolekyler skubber til omkringliggende luftmolekyler, som derefter også sættes i svingninger, etc. Hvert luftmolekyle svinger frem og tilbage omkring en ligevægtsposition. En anden måde at betragte lyd på er som *trykbølger*. Der opstår overtryk, når de omkringliggende luftmolekyler rykker sammen, mens der opstår undertryk, når de rykker fra hinanden. Trykvariationerne omkring det normale tryk på 1 atmosfære er ganske små. Variationen kan optages med en mikrofon anbragt i en bestemt position. Hvis den tidsmæssige variation kan beskrives ved en harmonisk svingning, som defineret i definition D, så siger vi, at der er tale om en *ren* tone. Rene toner kan for eksempel skabes ved at anslå en stemmegaffel eller skabes elektronisk ved hjælp af en tonegenerator. Amplituden A hænger sammen med lydstyrken. Vinkelhastigheden ω hænger sammen med lydens frekvens:

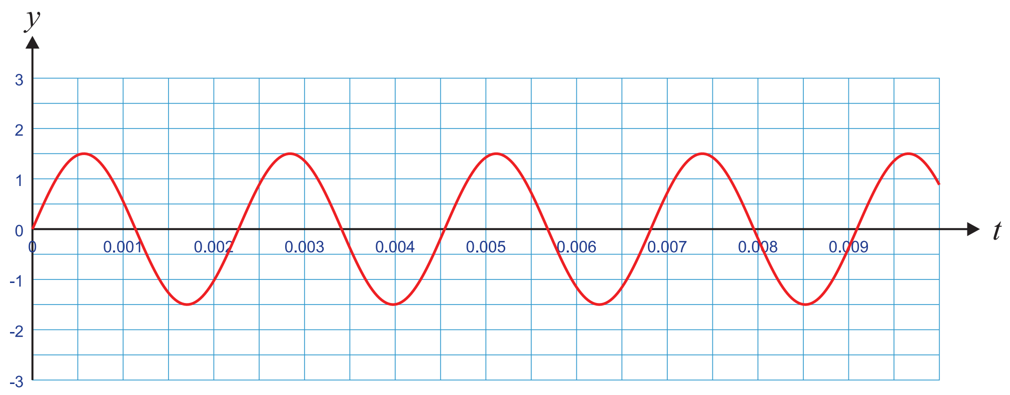
(1) $$T = \frac{2\pi}{\omega}, \quad f = \frac{1}{T} \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \cdot \frac{1}{T} = 2\pi \cdot f$$

Den første formel med svingningstiden eller perioden er allerede omtalt lidt tidligere. At $f = 1/T$ er også logisk, for hvis én svingning for eksempel tager 0,1 sekund, så vil der være 10 svingninger pr. sekund, dvs. frekvensen f er 10 Hz.

Lad os for eksempel sige, at vi ønsker at beskrive det tidsmæssige forløb af lyden fra en 440 Hz stemmegaffel matematisk. Faseforskydningen, som blot betyder en parallelforskydning i tiden, er ikke så vigtig her. Vi kan vælge at starte stopuret, når sinus-funktionen påbegynder en ny svingning, dvs. $\varphi = 0$. Amplituden sætter vi for et syns skyld til 1,5, uden angivelse af enhed. Vi husker blot, at amplituden har relation til lydens styrke. Vi kan desuden sætte akseforskydningen til 0. Lydbølgens udsving som funktion af tiden *t*, kan dermed ifølge (D1) skrives:

(2) $$g(t) \;=\; A \cdot \sin(2\pi \cdot f \cdot t) \;=\; 1{,}5 \cdot \sin(2\pi \cdot 440 \cdot t)$$

Da det er matematik og ikke fysik, undlader vi at anføre enheder og underforstår blot SI-enheder. Næste punkt kunne være at afbilde grafen for lydbølgen ved hjælp af et CAS-værktøj. Her er det vigtigt ikke blot at acceptere værktøjets default-vindue, for lydbølgen svinger rigtig mange gange pr. sekund. Faktisk vil det være hensigtsmæssigt at udregne svingningstiden først: $T = 1/f = 1/440 = 0{,}00227$. Vinduet $0 \le t \le 0{,}01$, $-2 \le y \le 2$ vil derfor give plads til mellem 4 og 5 svingninger på tidsaksen, og der vil være rigelig plads til de maksimale udsving også.



□

Øvelse 5 (Lydbølger)

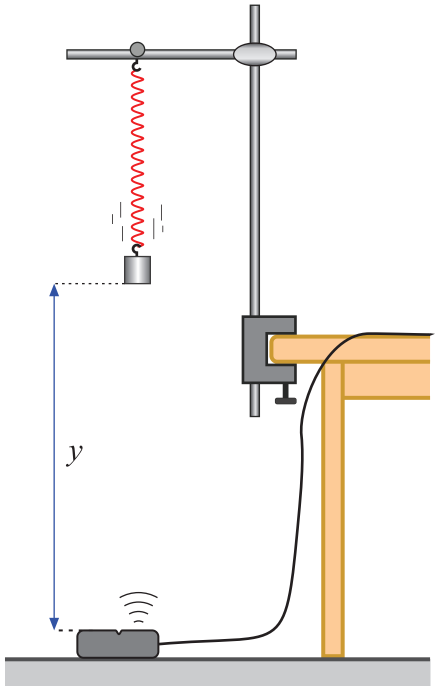
I forlængelse af eksempel 4 skal vi tegne grafer.

a) Benyt dit CAS-værktøj til at afbilde grafen for en ren tone med amplitude 2 og frekvens 500 Hz. Kald bølgefunktionen $g_0(t)$. Vælg et passende vindue.
b) Afbild i samme koordinatsystem grafen for den rene tone med amplitude 1,2 og frekvens 1000 Hz. Kald bølgefunktionen $g_1(t)$.

Man kalder det en *sammensat* tone, hvis lyden er sammensat af bølger med forskellig frekvens. De fleste musikinstrumenter leverer en sammensat tone, som kan opfattes som sammensat af en sinustone med en grundtone-frekvens på f_0 og en række *overtoner* med frekvenser $2f_0, 3f_0, 4f_0, \ldots$. Det er overtonerne, som giver instrumentet dets *klang* og karakteristika. En ren tone kan virke monoton. En sådan sammensat tone er således ikke en harmonisk svingning ifølge definition 3, men der er dog tale om en *periodisk* funktion, som gentager sig med perioden $T_0 = 1/f_0$.

c) Definer bølgefunktionen $g(t) = g_0(t) + g_1(t)$ i CAS-værktøjet og afbild grafen for den sammensatte tone i et passende vindue.

Øvelse 6 (Forsøg med fjedersvingninger)



Man kan vise, at et lod, der svinger i en fjeder ideelt set vil udføre en harmonisk svingning. Udfør et forsøg med fjedersvingninger som vist på figuren til højre – evt. i samarbejde med fysiklæreren. Vælg et lod på 100 g eller 200 g og anbring det i enden af en fjeder med en passende fjederkonstant, så man får en god svingning. En ultralydssensor (fx en GoMotion-sensor fra firmaet *Vernier*) tilsluttes en computer. Via den tilhørende dataopsamlingssoftware (fx Logger Pro), sættes sensoren til at foretage 50 målinger i sekundet i samlet set 10 sekunder, mens loddet svinger op og ned. Sensoren måler afstanden y fra sensoren til loddet.

a) Foretag i dataopsamlingssoftwaren et fit med en funktion af formen:

$$f(t) = A \cdot \sin(B \cdot t + C) + D$$

Kan du op til usikkerheder og måske en smule dæmpning på grund af en svag luftmodstand bekræfte, at der er tale om en harmonisk svingning?

b) Benyt værdien for B til via (1) at bestemme svingningstiden T.

c) (ekstra) Teoretisk set er svingningstiden givet ved $T = 2\pi \cdot \sqrt{m/k}$, hvor m er loddets masse og k er *fjederkonstanten*. Indsæt m og k i formlen. Passer det med b)?

d) Argumenter for, hvorfor loddets hastighed må være 0 i yderpositionerne og numerisk set størst, når loddet passerer svingningsaksen (ligevægtspositionen). *Hjælp*: Tænk på, hvornår sinus og cosinus er henholdsvis 0, –1 og 1 på enhedscirklen ...

Bemærkning 7

Ved fit med $f(t) = A \cdot \sin(B \cdot t + C) + D$ vil der være uendeligt mange løsninger for parametrene, som giver anledning til den samme løsning – på grund af sinus-funktionens mange symmetrier. Hvilken løsning, værktøjet vælger, kan derfor være lidt vilkårligt. Undertiden er der dog mulighed for, at brugeren kan foretage nogle "gæt" som input og derved styre outputtet lidt. For eksempel bør A og B være positive.

Eksempel 8 (Gennemsnitstemperaturer)

På DMI's hjemmeside under Arkiv kan man finde gamle vejrdata, for eksempel de gennemsnitlige månedlige temperaturer i de forskellige vejrregioner i Danmark. Skemaet nedenfor viser de gennemsnitlige månedlige temperaturer i region Syd og Sønderjylland i perioden 2008-2017. I den nederste række er de gennemsnitlige månedlige temperaturer udregnet over de ti år. Besvar i den forbindelse følgende spørgsmål.

a) Påvis ved at foretage et fit, at de gennemsnitlige månedlige temperaturer i perioden 2008-2017 med god tilnærmelse kan beskrives ved hjælp af en harmonisk svingning med en periode på 12, underforstået måneder. Lad 0 svare til nytår, 1 svare til 1. februar, etc. Det er passende at anbringe gennemsnitsværdierne midt i månederne: 0,5; 1,5; 2,5; ...; 11,5. Som en god tilnærmelse antager vi, at der er 30 dage i samtlige måneder.
b) Given en sproglig fortolkning af de værdier for amplituden og akseforskydningen, som fittet fra a) giver.
c) Hvornår på året vil temperaturen ifølge modellen være 10°C?
d) På hvilke tidspunkter af året vil man få de laveste og højeste temperaturer ifølge modellen? Omregn et kommatal, til dage ...
e) Udregn $f'(5)$ og giv en sproglig fortolkning størrelsen.

Månedlige gennemsnitstemperaturer i °C i region Syd og Sønderjylland fra 2008-2017 (DMI arkiv)												
Årstal	Jan	Febr	Mar	Apr	Maj	Jun	Jul	Aug	Sep	Okt	Nov	Dec
2008	4,4	4,6	3,9	7,4	13,0	15,2	17,4	16,5	12,9	9,7	6,2	2,7
2009	1,0	1,3	4,3	9,9	11,7	13,8	17,2	17,4	14,1	8,2	7,7	7,7
2010	-3,0	-1,8	3,2	7,4	9,2	14,0	18,7	16,0	12,7	8,9	3,0	-4,1
2011	0,4	0,3	3,3	10,1	11,5	15,1	15,8	15,9	14,3	9,9	6,6	4,4
2012	2,7	0,3	5,8	6,3	12,2	12,7	15,9	16,7	13,0	9,0	6,0	0,3
2013	0,3	-0,9	-0,8	5,3	11,8	13,7	17,0	16,9	13,1	11,0	5,8	5,4
2014	2,2	4,4	5,9	9,1	11,8	14,8	19,4	15,8	14,9	12,5	7,3	3,6
2015	3,2	2,2	4,9	7,1	9,8	12,8	15,7	17,4	13,2	9,8	8,0	7,2
2016	0,7	2,2	4,0	6,4	13,2	16,2	16,4	16,2	16,5	8,9	4,0	5,2
2017	1,6	2,2	5,1	6,3	12,2	14,8	15,6	16,0	13,5	11,6	5,9	3,9
Snit	1,35	1,48	3,96	7,53	11,64	14,31	16,91	16,48	13,82	9,95	6,05	3,63

Løsninger:

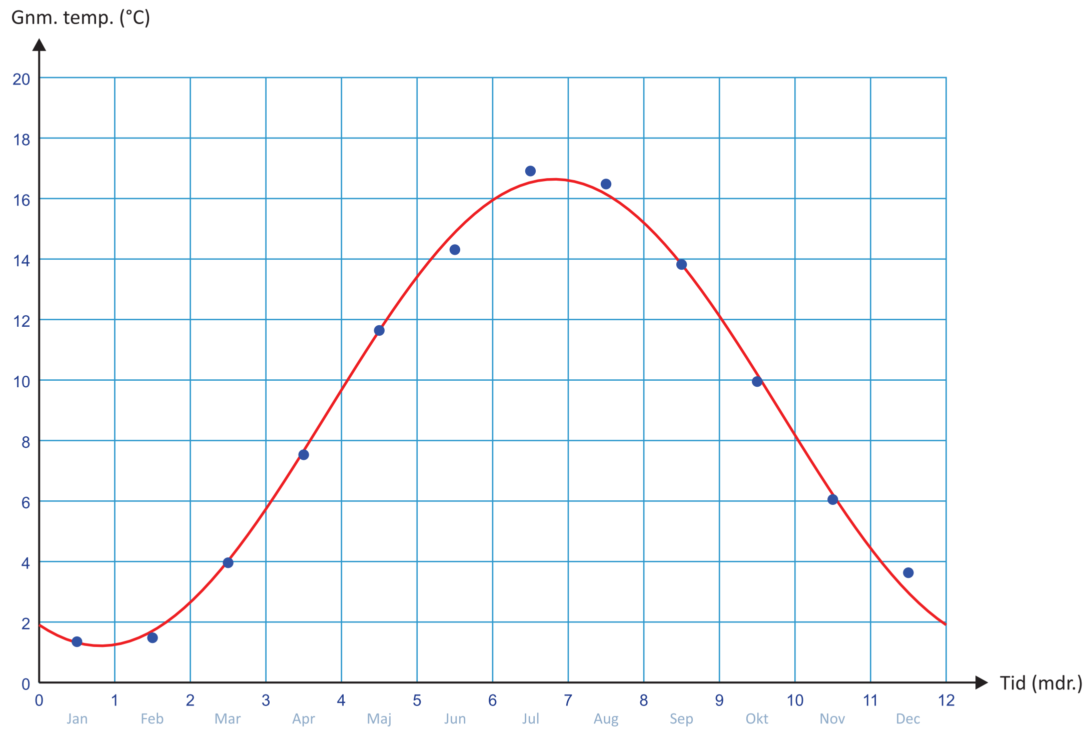
a) Vi ved, at perioden skal være 12 (mdr.). Ved hjælp af (1) kan vinkelhastigheden dermed bestemmes: $\omega = 2\pi/T = 2\pi/12 = \pi/6$. Derfor foretager vi et fit med den harmoniske svingning $f(t) = A \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6} \cdot t + C\right) + D$. Der er altså tre parametre at bestemme. Som input benyttes disse sammenhørende værdier:

t	0,5	1,5	2,5	3,5	4,5	5,5	6,5	7,5	8,5	9,5	10,5	11,5
y	1,35	1,48	3,96	7,53	11,64	14,31	16,91	16,48	13,82	9,95	6,05	3,63

CAS-værktøjet giver os følgende resultat, afrundet til fire decimalers nøjagtighed:

$$f(t) \;=\; 7{,}7118 \cdot \sin\left(\tfrac{\pi}{6} \cdot t - 2{,}0125\right) + 8{,}9258$$

Graf og datapunkter er afbildet nedenfor – et ganske overbevisende fit.



b) Akseforskydningen er 8,9258. Da den harmoniske svingning svinger symmetrisk omkring denne akse, kan forskydningen tolkes som at gennemsnitstemperatur over hele året i gennemsnit er ca. 8,9°C. Amplituden kan fortolkes som det antal grader, som temperaturen svinger til hver side om de 8,9°C – i gennemsnit. Temperaturen vil altså gennemsnitligt ligge i intervallet mellem 1,2°C og 16,6°C, som følgende viser: $\left[k - A, k + A\right] = \left[8{,}9 - 7{,}7\,;\, 8{,}9 - 7{,}7\right] = \left[1{,}2\,;\, 16{,}6\right]$.

c) Med CAS-værktøjet løser vi nedenstående ligning for $t \in \left[0{,}12\right]$:

$$f(t) = 10 \quad \Leftrightarrow \quad t = 4{,}1104 \;\vee\; t = 9{,}5766$$

Vi er i maj og oktober måned. For at finde hvor omtrent i måneden, tager vi brøkdelene og ganger med 30: $30 \cdot 0{,}1104 = 3{,}3120$ og $30 \cdot 0{,}5766 = 17{,}2980$. I gennemsnit vil man altså kunne forvente en temperatur på 10°C den 3. maj og den 17. oktober.

d) Vi bestemmer steder med vandrette tangenter i intervallet $\left[0{,}12\right]$:

$$f'(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = 0{,}8435 \;\vee\; t = 6{,}8435$$

Det overlades til læseren at vise, at der er lokalt og globalt minimum i den første værdi og lokalt og globalt maksimum i den anden. Ved at bruge samme metode som i c) får vi, at modellen forudsiger, at den varmeste dag vil være den 25. juli og den koldeste den 25. januar.

e) CAS-værktøjet giver os umiddelbart: $f'(5) = 3{,}3200$. $t = 5$ svarer til tidspunktet 1. juni. Det betyder, at vi kan fortolke differentialkvotienten som *øjeblikshastigheden*, hvormed temperaturen stiger til tidspunktet 1. juni:

$$3{,}32°\text{C}/\text{måned} = 3{,}32°\text{C}/30\,\text{dage} = 0{,}111°\text{C}/\text{dag}$$

NB! Som nævnt er alt meget gennemsnitligt. Der kan i praksis være store udsving på den pågældende dag og det pågældende år.

□

Øvelse 9 (Gennemsnitstemperaturer i København og Nordsjælland)

Analogt til eksempel D8 er nedenstående en tabel over de månedlige gennemsnitstemperaturer i perioden 2008–2017, denne gang blot for region København og Nordsjælland. I nederste række findes de gennemsnitlige månedlige gennemsnitstemperaturer i nævnte 10-års periode.

Månedlige gennemsnitstemperaturer i °C i region Kbh. og Nordsjælland fra 2008-2017 (DMI arkiv)												
Årstal	Jan	Febr	Mar	Apr	Maj	Jun	Jul	Aug	Sep	Okt	Nov	Dec
2008	3,8	4,5	3,5	7,5	12,6	15,2	17,9	16,8	13,1	9,5	6,0	2,6
2009	0,6	0,3	3,6	9,3	11,9	14,3	18,0	18,0	14,6	7,7	7,2	0,9
2010	-3,1	-1,8	2,7	7,2	9,8	14,4	19,6	16,7	12,9	8,4	3,1	-3,8
2011	-0,2	-0,4	2,8	2,8	11,7	15,8	17,2	16,5	14,3	9,7	6,7	4,2
2012	2,1	-0,9	5,6	6,4	12,6	13,3	16,7	17,1	13,4	8,7	6,2	0,4
2013	-0,2	-0,6	-0,8	6,0	12,8	15,2	18,0	17,4	13,0	11,1	5,9	4,9
2014	1,5	3,8	5,9	9,0	12,3	15,5	20,1	16,5	14,6	12,0	7,8	3,0
2015	2,8	1,8	4,7	7,5	10,3	13,5	16,4	17,8	13,6	9,6	7,2	6,4
2016	0,0	2,4	3,6	6,8	13,6	16,6	17,1	16,4	16,2	8,9	4,1	4,4
2017	0,9	1,9	4,8	6,6	12,3	15,3	15,8	16,4	13,4	10,9	5,5	3,6
Snit	0,82	1,10	3,64	6,91	11,99	14,91	17,68	16,96	13,91	9,65	5,97	2,66

a) Besvar de samme fire spørgsmål som under eksempel D8, altså a), b), c), d) og e).

b) Hvornår på året vokser og aftager temperaturen hurtigst? *Hjælp*: Vi er gået et niveau op her: Det er $f'(t)$, som skal analyseres. Overvej, hvordan det skal forstås.