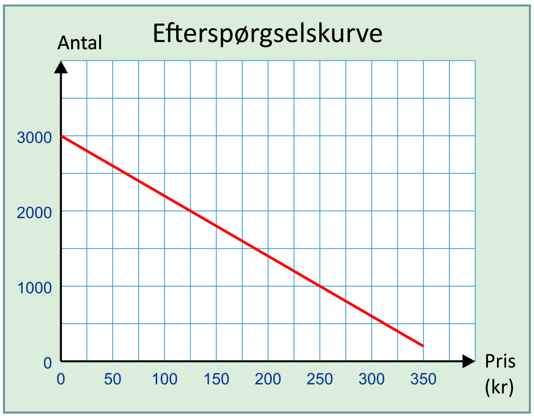
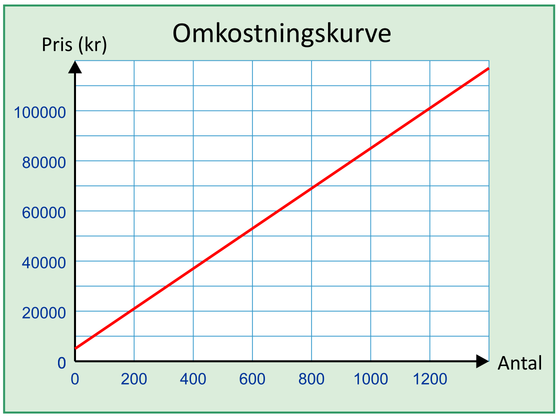
Tema: Anvendelser af differentialregning i økonomi

I det følgende vil vi betragte en simpel økonomisk model for en virksomhed. Når en virksomhed forsøger at sælge sine varer, så er prisfastsættelsen et vigtigt emne at overveje. Sættes prisen lavt, så kan der sælges mange styk, men fortjenesten pr. styk vil være mindre. Sættes prisen højere, så kan der normalt ikke afsættes så meget, men man tjener mere pr. styk. Det store spørgsmål er, hvad den optimale stykpris er? Underforstået den stykpris, som giver den største fortjeneste. Til at besvare dette spørgsmål behøves blandt andet viden om efterspørgslen og omkostningerne.





For at simplificere problemstillingen antager vi, at alle de producerede enheder sælges. Antal producerede enheder og antal solgte enheder er altså det samme. Vi har givet en *efterspørgselsfunktion*, som angiver hvor mange enheder x, der kan sælges, når stykprisen sættes til p. Lad os se på et tilfælde, hvor sammenhængen er lineært aftagende:

(1) $$x = 3000 - 8\cdot p \quad \Leftrightarrow \quad p = \frac{3000-x}{8}$$

Omkostningerne kan deles op i de *variable omkostninger og de faste omkostninger*. De variable omkostninger afhænger af antal producerede enheder, og vi vil her antage, at de variable omkostninger er proportionale med antal producerede enheder: 80 kr. pr. enhed. De faste udgifter sættes her til 5000 kr. Vi har med andre ord følgende *omkostningsfunktion*: $O(x) = 80\cdot x + 5000$. *Indtægtsfunktionen* fås ved at multiplicere antal solgte enheder med salgsprisen pr. enhed: $I(x) = x\cdot p = x\cdot(3000-x)/8$.

Da fortjenesten er lig med indtægter fratrukket omkostninger, fås følgende *fortjeneste-funktion*:

(2) $$F(x) \;=\; I(x)-O(x) \;=\; x\cdot\left(\frac{3000-x}{8}\right) \;-\; (80\cdot x+5000)$$

Øvelse 1 (Økonomisk model 1)

I forbindelse med funktionerne på forrige side, skal du besvare følgende spørgsmål:

a) Benyt differentialregning til at optimere fortjenestefunktionen: Hvor mange styk skal man sælge af varen for at opnå den størst mulige fortjeneste? Hvad skal man sætte stykprisen til, for at opnå dette. Hvor stor er den samlede fortjeneste i så fald? NB! Husk at overveje definitionsmængder.

For en given værdi af x betegner størrelsen $I'(x)$ *marginalindtægterne*, mens $O'(x)$ betegner *marginalomkostningerne*.

b) Bestem de to differentialkvotienter for en produktion af 800 enheder.
c) Redegør for, hvorfor de to differentialkvotienter angiver en tilnærmet værdi for, hvor meget henholdsvis $I(x)$ og $O(x)$ ændrer sig ved produktion af én ekstra enhed. *Hjælp*: Tænk på betydningen af differentialkvotienten generelt set.
d) Med tolkningen i c) in mente, giv en sproglig fortolkning af resultatet af b).
e) Bestem marginalindtægterne og marginalomkostningerne for det antal enheder, som giver den optimale fortjeneste, bestemt i spørgsmål a). Hvad konkluderer du?
f) Kan en voksende efterspørgselskurve tænkes? Diskutér!

Øvelse 2 (Økonomisk model 2)

Med betegnelserne ovenfor: Lad efterspørgslen for en given vare være givet ved udtrykket $x=1000000\cdot p^{-1.5}$, hvor x er det antal enheder, som kan sælges til stykprisen p. Lad endvidere $O(x)=0{,}00005\cdot x^3-0{,}12\cdot x^2+100\cdot x+10000$ være omkostningsfunktionen.

a) Tegn efterspørgselskurven i dit CAS-værktøj, dvs. afbild grafen for antal solgte enheder x som funktion af prisen p. Du kan eventuelt kalde funktionen for $f(p)$. Vælg i den forbindelse vinduet $0\le p\le 100$ og $0\le x\le 10000$.
b) Beskriv grafen fra a): Kan den retfærdiggøres? Giv en praktisk forklaring på, hvorfor en efterspørgselskurve kan tænkes at se således ud!
c) Bestem funktionen, som angiver salgsprisen pr. styk, som funktion af antal solgte enheder, x. Kald funktionen for $P(x)$. *Hjælp*: Isoler p i udtrykket for x ovenfor.
d) Angiv et udtryk for indtægtsfunktionen $I(x)$.
e) Tegn i et CAS-værktøj graferne for indtægtsfunktionen og omkostningsfunktionen, idet du vælger vinduet $0\le x\le 2000$ og $0\le y\le 150000$. Beskriv graferne med ord. Hvilke aspekter ved en produktion kan få graferne til at se således ud?
f) Angiv et udtryk for fortjenestefunktionen $F(x)$ og tegn dens graf i samme vindue som i spørgsmål e). Bestem det antal producerede enheder, som giver den maksimale fortjeneste. Hvor stor er den maksimale fortjeneste? Hvad er den optimale salgspris at sætte pr. vare?

g) (Ekstra) Lad $A(p) = 1000000 \cdot p^{-1.5}$ betegne sammenhængen mellem antal solgte enheder og stykprisen p angivet i begyndelsen af denne opgave. Angiv et udtryk for den sammensatte funktion $G(p) = (F \circ A)(p) = F(A(p))$. Forklar hvad denne funktion repræsenterer og kan bruges til.

Øvelse 3* (Priselasticitet)

Denne opgave er lidt sværere end de øvrige, i kraft af en højere abstraktion. *Efterspørgselsfunktionen* $A(p)$ er den funktion, som givet en stykpris p på varen, angiver hvor mange vareenheder, som kan afsættes til den pågældende pris. Tidligere er denne størrelse blot angivet ved x. Undertiden er man i økonomi interesseret i at undersøge, hvor følsom salget er overfor en prisforøgelse. Lad os sige, at vi giver prisen en tilvækst på Δp. Vi kan da betragte følgende størrelse:

$$\frac{\text{Relativ ændring i efterspørgslen}}{\text{Relativ ændring i prisen}} = \frac{\dfrac{A(p+\Delta p) - A(p)}{A(p)}}{\dfrac{\Delta p}{p}} = \frac{A(p+\Delta p) - A(p)}{\Delta p} \cdot \frac{p}{A(p)}$$

også betegnet den *gennemsnitlige priselasticitet* ved en prisændring fra p til $p + \Delta p$. Hvis $A(p)$ er differentiabel, så har sidstnævnte udtryk en grænseværdi for $\Delta p \to 0$, og grænseværdien betegnes den *øjeblikkelige priselasticitet* ved prisen p:

$$E(p) = A'(p) \cdot \frac{p}{A(p)} \tag{3}$$

Efterspørgslen kaldes *uelastisk*, *neutralelastisk* eller *elastisk*, alt efter om den numeriske værdi af priselasticiteten, $|E(p)|$, er mindre end 1, lig med 1 eller større end 1. Da vi her kun betragter efterspørgselsfunktioner, som er *aftagende*, er det det samme som at sige følgende: Efterspørgslen er *uelastisk*, når $-1 < E(p) < 0$, neutralelastisk, når $E(p) = -1$ og *elastisk*, når $E(p) < -1$.

a) Beregn priselasticiteten for tilfældet med efterspørgselsfunktionen i opgave 2, når prisen p er 150 kr. Hvilken type priselasticitet er der tale om her?

Lad $B(p) = A(p) \cdot p$ betegne *omsætningsfunktionen*. Det bemærkes, at den er beslægtet med indtægtsfunktionen: $B(p) = (I \circ A)(p) = I(A(p))$.

b) Vis at $B'(p) = A(p) \cdot (E(p) + 1)$. *Hjælp*: Udregn venstre og højre side og vis, at de er ens, under brug af (3).

c) Benyt formlen i b) til at vise, at hvis efterspørgslen er uelastisk, så vil en prisstigning betyde en omsætningsstigning. Hvad sker der i tilfældet med de øvrige to typer elasticitet i tilfældet med en prisstigning?

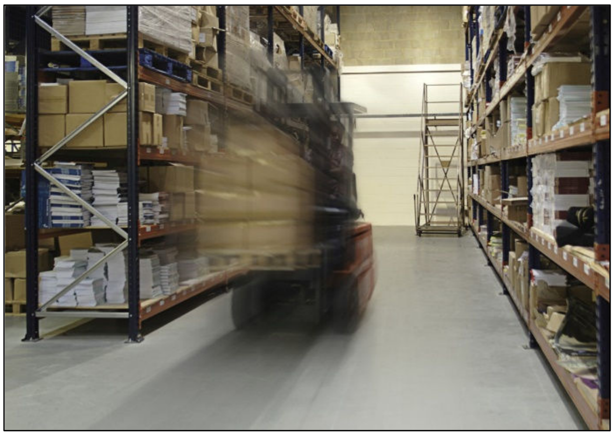
d) Hvad har størst priselasticitet, tror du? Almindelige fødevarer, luksusvarer, varer der kan erstattes af andre varer? Argumenter!

Det bemærkes, at priselasticiteten er uafhængig af de valgte enheder, fx valuta! I øvrigt benyttes betegnelsen *efterspørgselselasticitet* ofte for det samme som priselasticitet.

Øvelse 4 (Lagerstyring)

Lagerstyring er et vigtig område i organiseringen af en virksomhed. Det koster mange penge at have et stort lager. Alternativet med et lille lager har dog også sine negative sider: det koster ekstra at få tilsendt nye forsyninger i mange forsendelser. Spørgsmålet er hvilke ordrestørrelser, der er de optimale for virksomheden, så firmaets totale lager og forsendelsesomkostninger bliver så små som mulig. Indenfor faget erhvervsøkonomi arbejder man med en klassisk model for lagerstyring, som fører frem til den såkaldte Wilsons formel for den optimale ordrestørrelse. Den skal vi se på i det følgende. Vi arbejder i modellen med følgende størrelser:

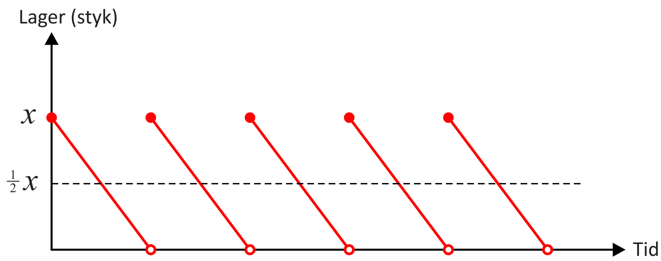
Totale årlige antal vareenheder:	V
Omkostninger pr. ordre:	F
Indkøbsprisen pr. vareenhed:	P
Lageromkostninger pr. enhed:	K
Ordrestørrelse:	x



Vi vil udregne lageromkostningerne under den antagelse, at lagersituationen over tid er som beskrevet på figuren nedenfor til højre. I gennemsnit er der $\frac{1}{2}x$ vareenheder på lager.

Vi får:

Antal ordrer pr. år:	V/x
Totale kostpris:	$V \cdot P$
Ordreomkostninger:	$F \cdot V/x$
Lageromkostninger:	$\frac{1}{2} \cdot x \cdot K$



$$\begin{aligned} \text{Totale omkostninger} &= \text{Totale kostpris} + \text{ordreomkostninger} + \text{lageromkostninger} \\ &= V \cdot P + F \cdot \frac{V}{x} + \tfrac{1}{2} \cdot x \cdot K \end{aligned}$$

a) Redegør for rigtigheden af udtrykkene for antal ordrer pr. år, den totale kostpris, ordreomkostningerne samt lageromkostningerne.

b) En virksomhed regner med at indkøbe og sælge i alt 1920 kaffemaskiner på et år. Hver kaffemaskine koster i indkøb 175 kr. Udgifterne til hver ordre udgør 750 kr., mens det koster 50 kr. at have lagret én kaffemaskine i et år. Vis, at følgende udtryk angiver de totale (årlige) omkostninger, som funktion af ordrestørrelsen x:

$$f(x) = 336000 + \frac{1440000}{x} + 25x$$

Lad funktionen g angive summen af ordreomkostningerne og lageromkostningerne:

$$g(x) = \frac{1440000}{x} + 25x$$

Da funktionerne f og g kun adskiller sig fra hinanden ved kostprisen, som ikke afhænger af x og dermed er en konstant, vil grafen for f blot være en parallelforskydning af grafen for g. Det betyder, at funktionerne har samme monotoniforhold og har de samme lokale ekstremumssteder.

c) Hvor stor vil summen af ordreomkostningerne og lageromkostningerne være ved ordrestørrelser på henholdsvis 100 og 500 styk?

d) Foretag en funktionsundersøgelse af $f(x)$, idet du bestemmer monotoniforhold, og lokale ekstrema. Hvad er den optimale ordrestørrelse?

e) Tegn graferne for ordreomkostningerne, lageromkostningerne samt summen af dem i samme koordinatsystem, idet du vælger et passende vindue at vise graferne i. Beskriv de to førstnævnte grafers forløb og prøv at forstå, hvorfor de ser ud, som de gør. Bestem skæringspunktet for disse to grafer. Hvad observerer du?

f) Gå tilbage til det generelle udtryk for de totale (årlige) omkostninger og bevis *Wilsons formel* for den optimale ordrestørrelse:

(4) $$\text{Optimal ordrestørrelse} = \sqrt{\frac{2 \cdot F \cdot V}{K}} \qquad (\textit{Wilsons formel})$$

Passer den optimale ordrestørrelse udregnet i spørgsmål d) med det, du får ved at indsætte i denne formel?

g) Analyser kvalitativt hvordan den optimale ordrestørrelse givet ved Wilsons formel påvirkes, når lageromkostningerne pr. enhed, dvs. K, øges – og de andre størrelser fastholdes. Stemmer det med den umiddelbare intuition?

h) Overvej rimeligheden i de antagelser, som ligger til grund for ovenstående model for lagerstyring. Diskuter herunder forskellige typer varer. Kom også ind på grafen, som viser lagersituationen som funktion af tiden. Er den rimelig? Kan man forestille sig andre? Du kan eventuelt betragte en anden model og analysere den matematisk.