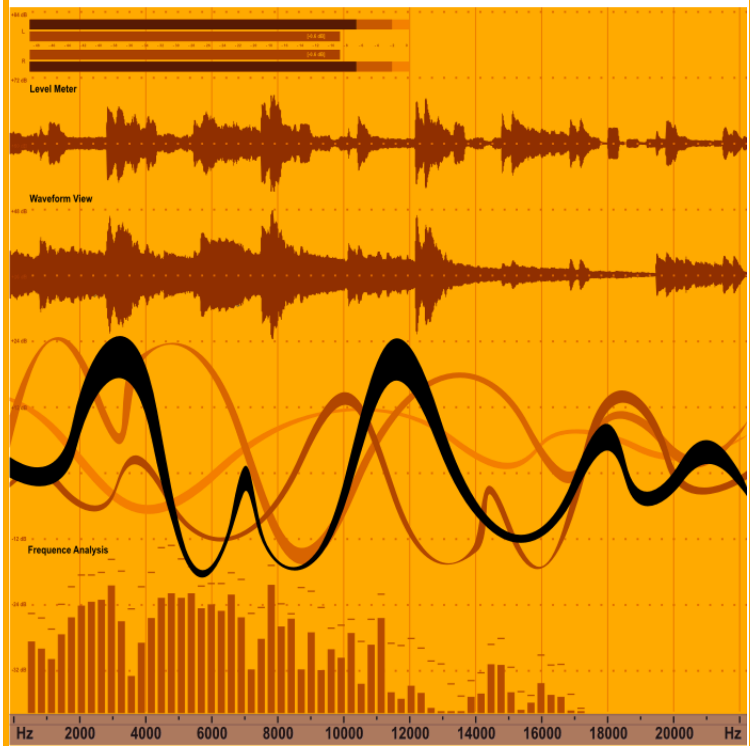
Svingninger



Billeder:

Forside: Bearbejdet billede af ©iStock.com/-M-I-S-H-A-
Desuden egne illustrationer.

Indledning

Denne lille note er ikke ment som en udtømmende beskrivelse af emnet *svingninger*, meningen er kun at give den grundlæggende matematiske beskrivelse af en svingning eller bølge. Som anvendelser vil vi især betragte *lydbølger*. Vi vil tillige se på begrebet *stødtoner*, også kaldet *svævninger*.

En tidsmæssig bølgebeskrivelse

I det følgende holdes *stedet* fast, så vi kun betragter det tidsmæssige forløb af en bølge. Den simpleste bølge, man kan tænke sig, er en sinusfunktion $y(t)=\sin(t)$, som vist på den øverste figur på næste side. *Svingningstiden eller perioden*, som det tager at gennemføre en hel bølge, betegnes *T*. Den er i det nævnte tilfælde lig med 2π. Man kan opnå en anden periode ved at multiplicere tiden med en faktor ω, kaldet *vinkelhastigheden*: $y(t)=\sin(\omega t)$. Grafen for sinus-funktionen gennemfører en bølge, når funktionens "indmad" ændrer sig fra 0 til 2π. Derfor er perioden *T* her givet ved $\omega\cdot T=2\pi \;\Leftrightarrow\; T=2\pi/\omega$. Bølgen er afbildet på den anden delfigur på næste side. Bølgens frekvens f angiver antallet af bølger pr. tidsenhed (sek). Derfor haves $f = 1/T$.

Man kan overveje at lægge en fast størrelse φ til ωt: $y(t)=\sin(\omega t+\varphi)$. Det resulterer i en parallelforskydning af grafen i *t*-aksens retning, som vist på den tredje delfigur på næste side. Forklaringen herpå får man ved at omskrive:

$$(1) \qquad y(t) \;=\; \sin(\omega t+\varphi) \;=\; \sin\big(\omega(t+\varphi/\omega)\big)$$

Det viser, at vi får den nye forskrift ved at udskifte *t* med $t+\varphi/\omega$ i $\sin(\omega t)$. Dette betyder en parallelforskydning af grafen for $y(t)=\sin(\omega t)$ med $-\varphi/\omega$ i *t*-aksens retning (Overvej!). Størrelsen φ kaldes i øvrigt for *faseforskydningen*. Faseforskydningen bevirker her, at udsvinget *y* til tiden $t=0$ ikke er lig med 0.

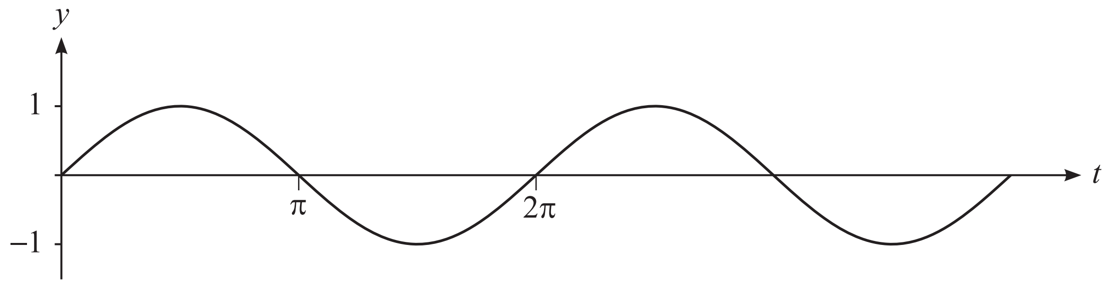
Situationen på den nederste delfigur på næste side er, at udsvingene overalt er ganget med en faktor *A*, svarende til, at vi har følgende generelle udtryk for det tidsmæssige forløb af en bølge med vinkelhastighed ω og faseforskydning φ:

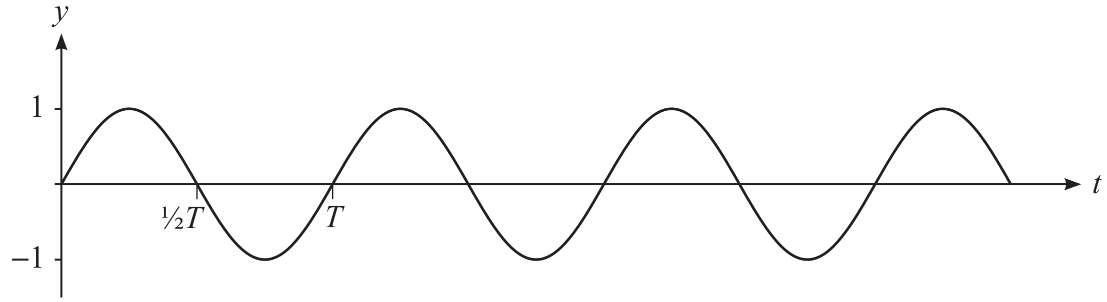
$$(2) \qquad y(t) \;=\; A\cdot\sin(\omega t+\varphi)$$

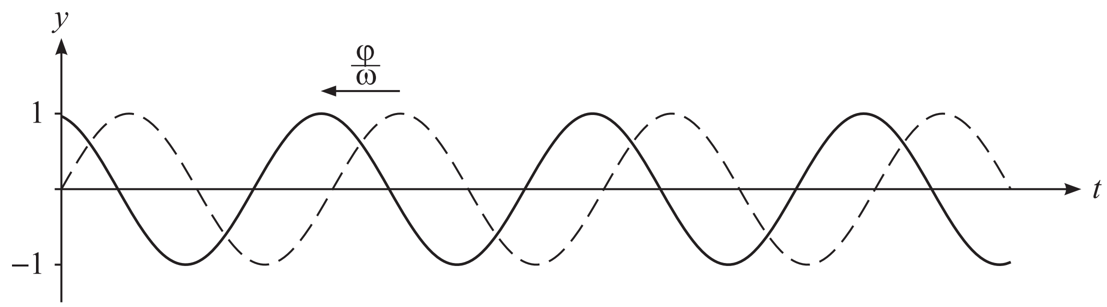
A kaldes for bølgens *amplitude*. Undertiden er det hensigtsmæssig at have frekvensen direkte angivet i udtrykket frem for vinkelhastigheden. Da $\omega=2\pi/T=2\pi\cdot f$, fås:

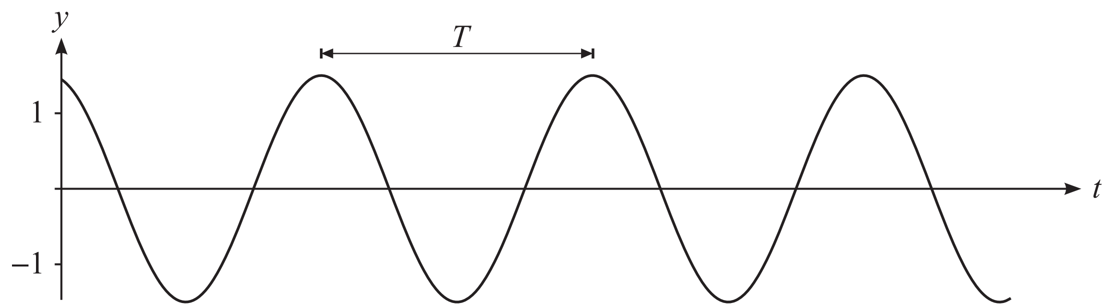
$$(3) \qquad y(t) \;=\; A\cdot\sin(2\pi\cdot f\cdot t)$$

hvor vi for simpelhedsskyld antager $\varphi=0$.









Opgave 1

Benyt grafregneren til at tegne grafen for en ren tone med frekvensen 440 Hz og amplitude 1,4, uden faseforskydning. Sørg for at vælge et passende vindue, så du kan se 3 hele bølger på skærmen. Hvad fortæller frekvensen om en lydbølge? Hvad fortæller amplituden noget om? Efter du har tegnet grafen, prøv da i samme vindue at tegne den samme lydbølge, blot faseforskudt, således at den nye bølge er 1/4 bølge foran den oprindelige i tid. Hvad skal φ sættes til?

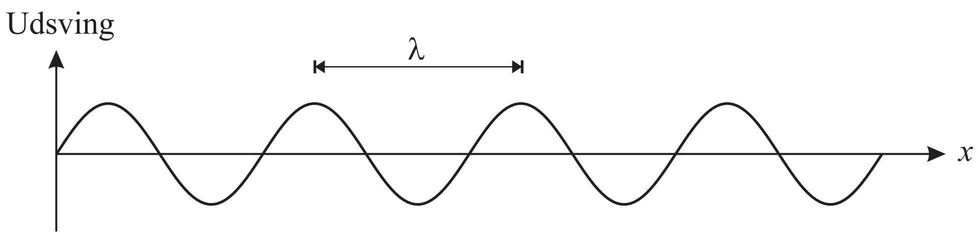
Den generelle bølgemodel

Vi har hidtil fastholdt *stedet* og udelukkende betragtet den tidsmæssige udvikling af bølgen. Men vi ved alle, at bølger udbreder sig. For lydens vedkommende sker det i luft under normalt tryk og ved 20°C med en hastighed på ca. 343 m/s. For at forenkle situationen antager vi i det følgende, at vi har at gøre med en bølge, som udbreder sig langs en ret linje. På næste side er vist en tegneserie af en bølge, som udbreder sig langs en vandret linje mod højre. Der er taget et ”snapshot” af bølgen til en række tidspunkter. Hver af disse snapshots vil vi kalde for bølgens *stedkurve* til det pågældende tidspunkt. Samtidigt ser vi, at der er tegnet et punkt på hver stedkurve. Af tegneserien fremgår det, at punktet indikerer bølgens udsving på et *fast sted* som funktion af tiden. Man kan eventuelt tænke på det som en korkprop, som bevæger sig op og ned på en vandbølge. Hvis man laver en graf af udsvinget som funktion af tiden på et fast sted, får man bølgens *tidskurve* på det pågældende sted, altså det vi studerede i forrige afsnit. Tegneserien forløber over en hel periode T. Per definition skabes der netop én bølge i løbet af én periode, dvs. hele bølgen har bevæget sig en bølgelængde mod højre i dette tidsrum, som indikeret ved den stiplede linje. Husk dog, at der ikke er tale om udbredelse af stof, men af *energi*. En bølges *bølgelængde* betegnes med det græske bogstav lambda, λ, og angiver fx afstanden mellem to bølgetoppe på stedkurven. Husk på ikke at forveksle med afstanden mellem toppene på tidskurven – det giver perioden!! I løbet af en periode T kommer bølgen altså stykket λ fremad. Bølgens hastighed kan da nemt beregnes, idet hastighed er strækning tilbagelagt pr. tidsenhed:

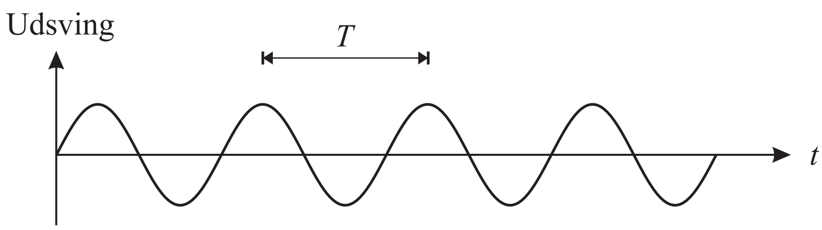
(4) $$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\lambda}{T} = \lambda \cdot \frac{1}{T} = \lambda \cdot f$$

Det er en meget vigtig formel, som gælder for alle bølger: $v = f \cdot \lambda$.

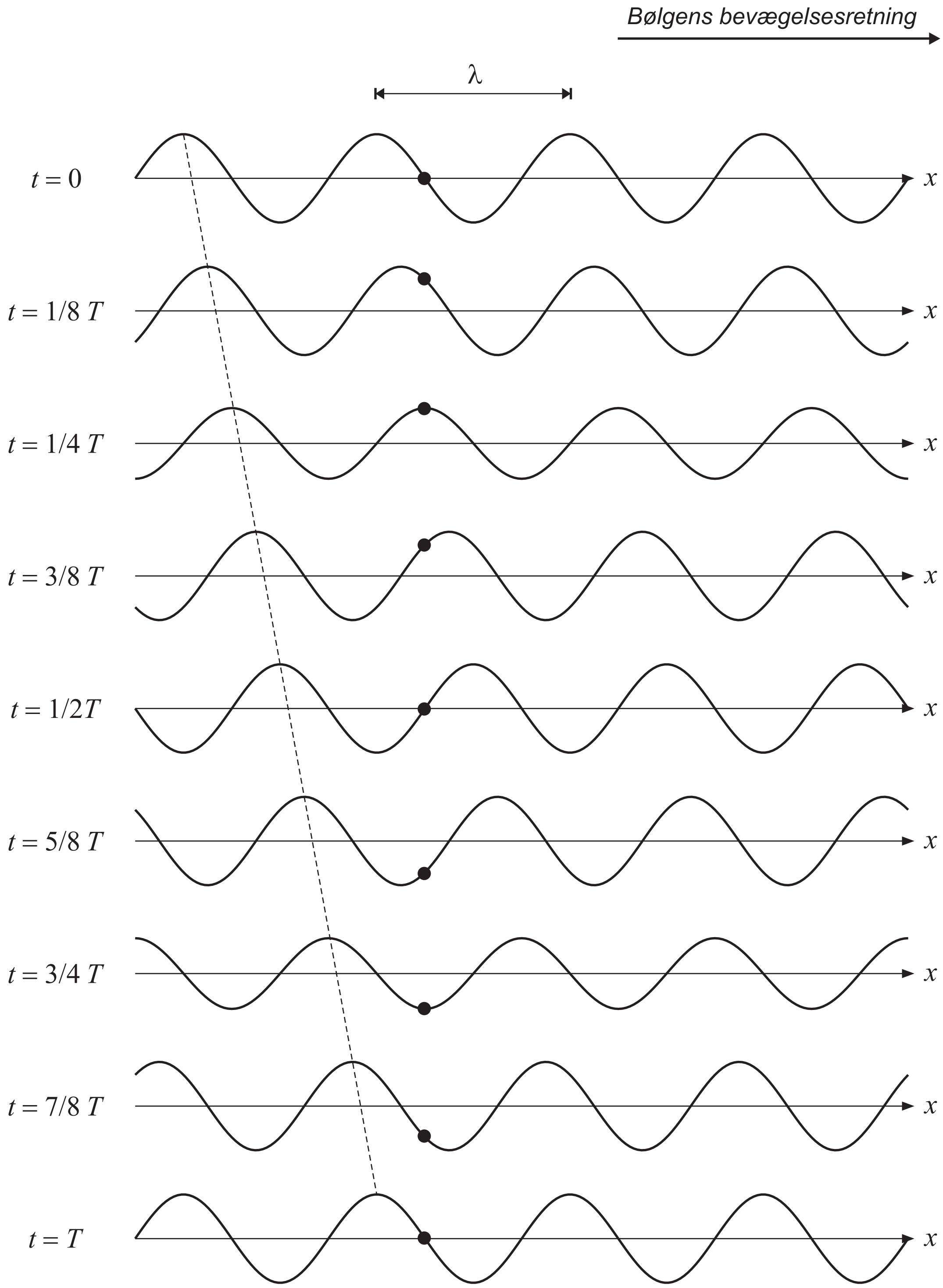
Bølgens stedkurve (fast tidspunkt)



Bølgens tidskurve (fast sted)



Tegneserie af bølgebevægelse



Opgave 2

a) Hvad er bølgelængden for kammertonen med frekvens 440 Hz, hvis lyden udbreder sig i luft ved normaltryk og ved stuetemperatur?

b) En lydbølge udbreder sig i luft ved normaltryk og ved stuetemperatur, og bølgelængden viser sig at være lig med 1,34 m. Hvad er lydens frekvens.

c) Lydbølgen fra spørgsmål a) sendes nu ned i luftarten CO_2. Herved ændres bølgelængden til 0,61 m. Hvad er lydens hastighed i CO_2?

Opgave 3 (lidt svær)

Man kan vise, at for en bølge, som udbreder sig langs en linje, kan udsvinget $y(t,x)$ på et bestemt sted x til et bestemt tidspunkt t angives på formen

(5) $$y(t,x) \;=\; A\cdot\sin\big(\omega\cdot(t-x/v)\big)$$

hvor ω er vinkelhastigheden og v er bølgehastigheden. Forsøg at vise dette ved at betragte tegneserien og tænke på, hvor meget bølgen er "forsinket" på stedet x i forhold til stedet $x=0$. Kan du udfra (5) fremstille andre formler, som fx inkluderer f og λ?

Interferens

Når to eller flere bølger befinder sig på samme sted til samme tidspunkt, så siges de at *interferere*, dvs. *vekselvirke*. Her kan benyttes *superpositionsprincippet*, som siger, at den resulterende bølges udsving på det pågældende sted til det pågældende tidspunkt fås ved at lægge udsvingene fra hver bølge sammen (med fortegn). Princippet er illustreret på figuren på næste side, hvor en lydbølge med amplitude 0,8 og frekvens 440 Hz vekselvirker med en lydbølge med amplitude 0,6 og frekvens 880 Hz. Resultatet er en *sammensat tone*, hvis udsving kan skrives som:

(6) $$y(t) \;=\; 0{,}8\cdot\sin(2\pi\cdot 440\cdot t) \;+\; 0{,}6\cdot\sin(2\pi\cdot 880\cdot t)$$

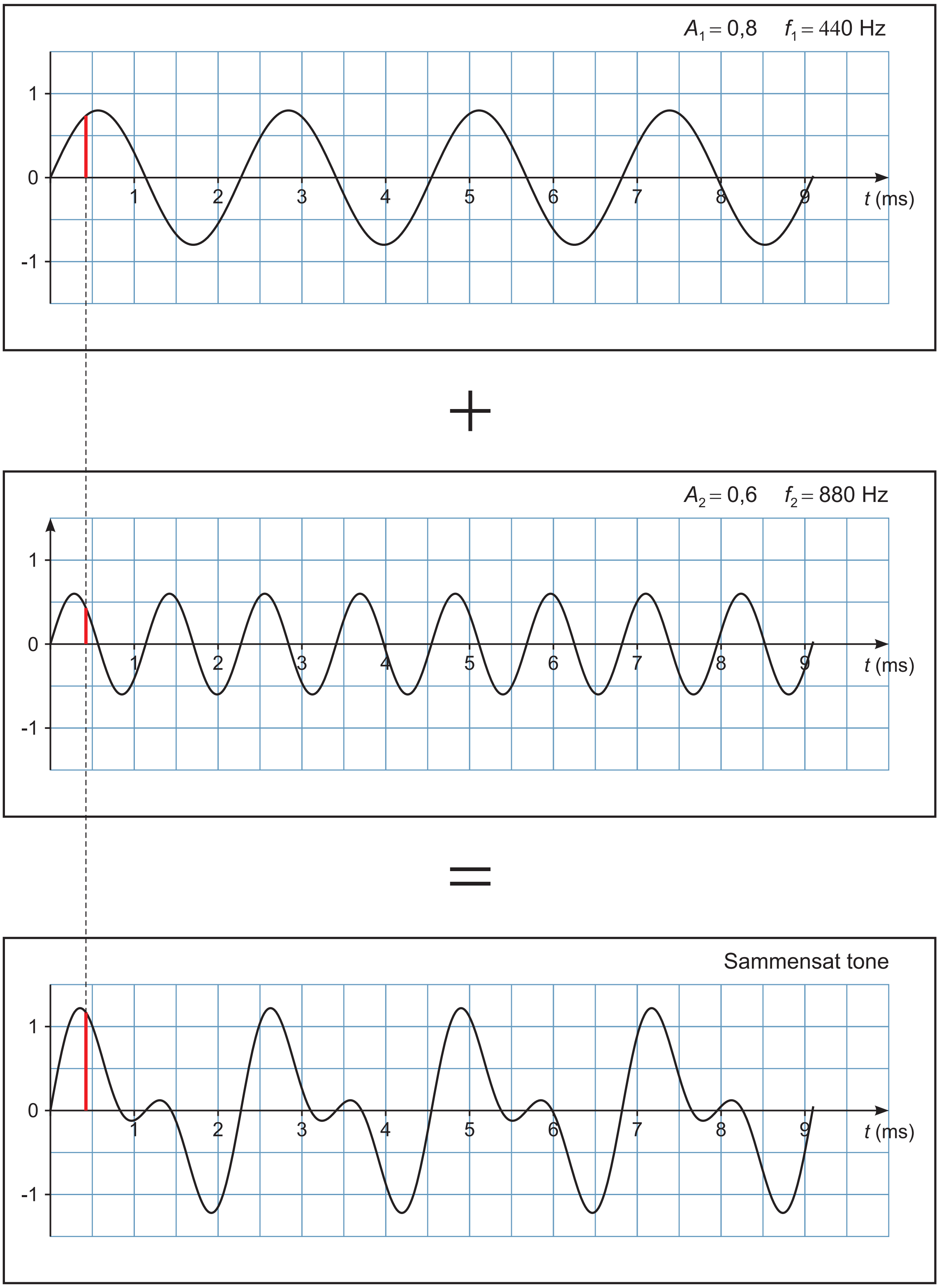
De to oprindelige toner betegnes derimod som *rene*, *harmoniske* toner. Stemmegafler og tonegeneratorer kan frembringe rene toner. Ellers er tonerne fra musikinstrumenter generelt sammensatte. Mere om det i næste afsnit.

Opgave 4

Benyt grafregneren til at tegne grafen for følgende sammensatte tone:

$$y(t) \;=\; 1{,}1\cdot\sin(2\pi\cdot 200\cdot t) \;+\; 0{,}5\cdot\sin(2\pi\cdot 600\cdot t)$$

Eksperimenter ellers med at lægge flere rene toner til, hvoraf alle har en frekvens, som er et multiplum af 200 Hz.



A1 = 0,8 f1 = 440 Hz
1
0
-1
1 2 3 4 5 6 7 8 9
t (ms)
+
A2 = 0,6 f2 = 880 Hz
1
0
-1
1 2 3 4 5 6 7 8 9
t (ms)
=
Sammensat tone
1
0
-1
1 2 3 4 5 6 7 8 9
t (ms)

Fourieranalyse

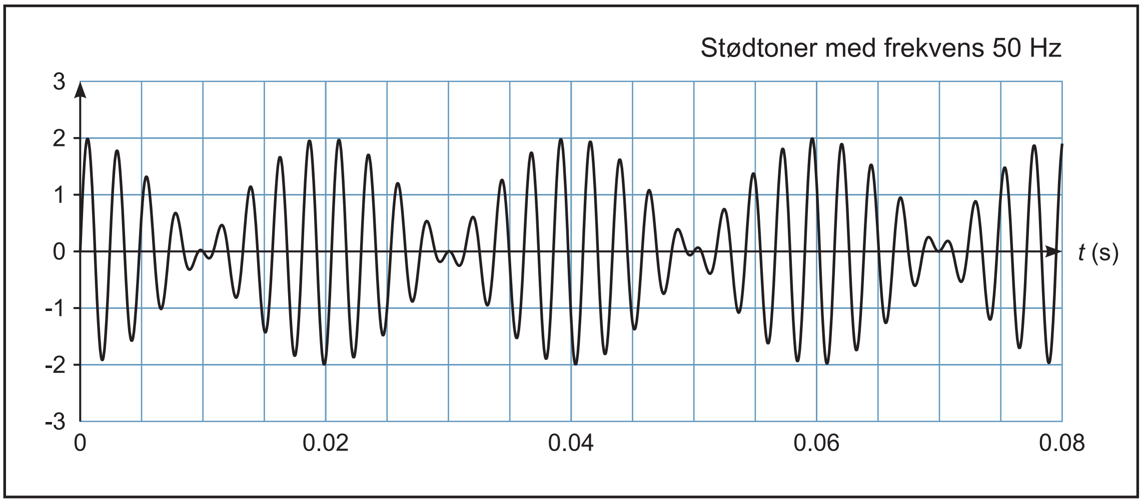
Som nævnt i forrige afsnit, frembringer de fleste musikinstrumenter sammensatte toner, og det er interessant at finde ud af hvilke rene toner, "de består af". Hertil er udviklet en ret indviklet matematisk teori, som går under betegnelsen *Fourieranalyse*, opkaldt efter den fremragende franske matematiker og fysiker *Jean Baptiste Joseph Fourier* (1768–1830). Løst sagt, så siger en sætning i Fourieranalysen, at enhver stykvis kontinuert periodisk funktion med periode T kan skrives som en sum af sinus-led, cosinus-led og en konstant, og frekvenserne af de trigonometriske funktioner opfylder, at der er en mindste frekvens, og at alle de øvrige frekvenser er multipla heraf. Vi skal kun betragte ulige periodiske funktioner, og i dette tilfælde viser det sig, at funktionen kan opløses i udelukkende sinus-led:

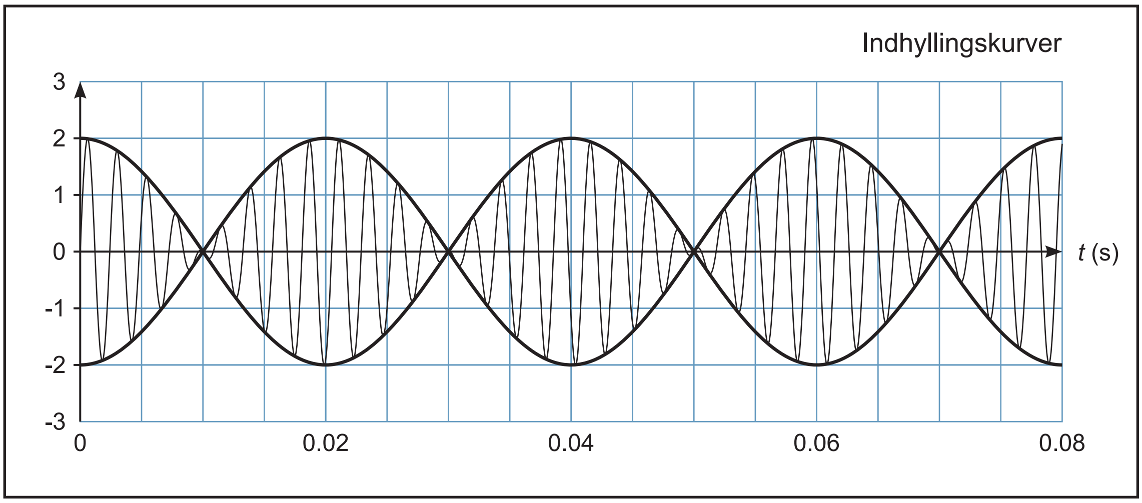
(7) $$y(t) = A_0 \cdot \sin(2\pi \cdot f_0 \cdot t) + A_1 \cdot \sin(2\pi \cdot 2f_0 \cdot t) + A_2 \cdot \sin(2\pi \cdot 3f_0 \cdot t) + \ldots$$

Det første led på højre side i (7) betegnes *grundtonen*. Det er en ren tone med en frekvens f_0, som vi vil betegne *grundtone-frekvensen*. Næste led kaldes *1. overtone* og har den dobbelte frekvens af grundtonen. Det tredje led kaldes *2. overtone* og har den tredobbelte frekvens af grundtonen etc. Der eksisterer computerprogrammer, som kan foretage en Fourieranalyse af lyden fra et musikinstrument – via en mikrofon tilsluttet computerens lydkort. Hvis musikinstrumenters toner var rene toner, ville det have lydt kedeligt og monotont. Men nu er lydene altså sammensatte, og det er tilstedeværelsen af *overtoner*, som giver lyden karakter. Man siger, at de bestemmer instrumentets *klang*.

Stødtoner

Stødtoner, også kaldes *svævninger*, er et fænomen, som opstår når to bølger med samme amplitude, men med lidt forskellig frekvens, interfererer. På næste side ser vi resultatet når to lyde med frekvenser henholdsvis $f_1 = 390\,\text{Hz}$ og $f_2 = 440\,\text{Hz}$ og samme amplitude interfererer. Ikke overraskende lyder det som om lyden *pulserer* i styrke – det lyder lidt som *stød*. Man kan vise, at stødene forekommer med en frekvens $f_{\text{stød}}$ givet ved formlen $f_{\text{stød}} = f_2 - f_1$. Det kræver et ret teknisk matematisk apparat at vise dette. Det er derfor henlagt til en opgave i næste afsnit om trigonometriske relationer.





Trigonometriske relationer

Der er to sæt af trigonometriske formler, som af og til dukker op i anvendelser i både matematik og fysik. Det er de såkaldte *additionsformler* samt de *logaritmiske formler*. Du skal udlede alle additionsformlerne samt den første logaritmiske formel igennem en række delopgaver, trin for trin. Lad os begynde med at formulere formlerne:

Sætning 1 (Additionsformlerne)

(a) $\cos(u-v) = \cos(u)\cdot\cos(v)+\sin(u)\cdot\sin(v)$

(b) $\cos(u+v) = \cos(u)\cdot\cos(v)-\sin(u)\cdot\sin(v)$

(c) $\sin(u-v) = \sin(u)\cdot\cos(v)-\cos(u)\cdot\sin(v)$

(d) $\sin(u+v) = \sin(u)\cdot\cos(v)+\cos(u)\cdot\sin(v)$

Sætning 2 (De logaritmiske formler)

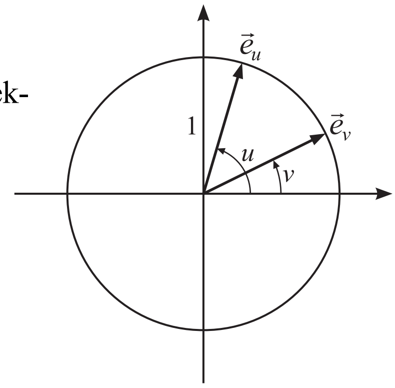
(a) $\sin(x)+\sin(y) \;=\; 2\cdot\sin\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\cdot\cos\left(\dfrac{x-y}{2}\right)$

(b) $\sin(x)-\sin(y) \;=\; 2\cdot\cos\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\cdot\sin\left(\dfrac{x-y}{2}\right)$

(c) $\cos(x)+\cos(y) \;=\; 2\cdot\cos\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\cdot\cos\left(\dfrac{x-y}{2}\right)$

(d) $\cos(x)-\cos(y) \;=\; -2\cdot\sin\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\cdot\sin\left(\dfrac{x-y}{2}\right)$

Trin 1



Lad $\vec{e}_u = \begin{pmatrix}\cos(u)\\ \sin(u)\end{pmatrix}$ og $\vec{e}_v = \begin{pmatrix}\cos(v)\\ \sin(v)\end{pmatrix}$ være de to enhedsvektorer med retningsvinkler henholdsvis u og v. Benyt formlen $\cos(w) \;=\; \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$ fra vektorregningen til at vise (a) i sætning 1.

Trin 2

Vis (b) i sætning 1 ved hjælp af (a) samt $\cos(-v)=\cos(v)$ og $\sin(-v)=-\sin(v)$.

Trin 3

Vis (c) i sætning 1. *Hjælp*: Bemærk omskrivningen $90°-(u-v)=(90°-u)+v$, tag cosinus på begge sider og udnyt de velkendte formler for komplementerne til cosinus og sinus, altså at $\cos(90°-w)=\sin(w)$ og $\sin(90°-w)=\cos(w)$ gælder for alle w.

Trin 4

Vis (d) i sætning 1 ved hjælp af (c) samt $\cos(-v)=\cos(v)$ og $\sin(-v)=-\sin(v)$.

Trin 5

Læg (c) og (d) i sætning 1 sammen, og vis, at $\sin(u-v)+\sin(u+v)=2\cdot\sin(u)\cdot\cos(v)$.

Trin 6

Sæt $x=u+v$ og $y=u-v$, og vis, at det betyder, at $u=\dfrac{x+y}{2}$ og $v=\dfrac{x-y}{2}$.

Indsæt endelig i formlen under trin 5 for at vise formel (a) i sætning 2.

NB! Hvorfor tror du i øvrigt, at formlerne har fået de anførte navne?

□

Opgave 5

Betragt igen eksemplet givet i afsnittet om stødtoner.

a) Benyt grafregneren til at tegne grafen for funktionen $\sin(2\pi f_1 \cdot t) + \sin(2\pi f_2 \cdot t)$ for $f_1 = 390\,\text{Hz}$ og $f_2 = 440\,\text{Hz}$. Vær meget omhyggelig med at vælge et passende vindue.

For at forklare det specielle udseende af grafen, skal du benytte de logaritmiske formler.

b) Vis ved hjælp af (a) i sætning 2 at der gælder:

$$\sin(2\pi f_1 \cdot t) + \sin(2\pi f_2 \cdot t) \;=\; 2 \cdot \cos\left(\frac{2\pi(f_2 - f_1)\cdot t}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{2\pi(f_2 + f_1)\cdot t}{2}\right)$$

c) Forsøg at forklare grafens udseende ved hjælp af formlen i spørgsmål b), idet du opfattter cosinus-faktoren som en ”variabel amplitude”.

d) Om stødtoner gælder som tidligere nævnt, at stødene forekommer med en frekvens på $f_{\text{stød}} = f_2 - f_1$. Kan du få dette til at stemme med formlen i spørgsmål b)? Husk, at der forekommer 2 stød for hver periode for cosinus-bølgen.

Opgave 6

Lige et lille sidespring her: Man kan benytte additionsformlerne til at frembringe formler for sinus eller cosinus til ”den dobbelte vinkel”. Vis, at der gælder:

$$\sin(2x) \;=\; 2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x)$$
$$\cos(2x) \;=\; 2 \cdot \cos^2(x) - 1 \;=\; 1 - 2 \cdot \sin^2(x)$$

Kan du også bruge additionsformler til at finde formler for sinus og cosinus til den ”halve vinkel”?

Opgave 7

Undertiden er det hensigtsmæssigt at kunne skrive en linearkombination af sinus og cosinus som en ren sinusfunktion med en *faseforskydning* φ:

$$A \cdot \sin(\omega t) + B \cdot \cos(\omega t) = C \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

At det overhovedet lader sig gøre at skrive linearkombinationen på denne måde indses ved et par snedige tricks. For det første omskriver vi venstresiden en smule:

$$(*) \qquad \sqrt{A^2 + B^2} \cdot \left(\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \cdot \sin(\omega t) \;+\; \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \cdot \cos(\omega t) \right)$$

Det gode her er, at punktet

$$\left(\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} , \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right)$$

ligger på enhedscirklen (Overvej!), og vi derfor kan finde en vinkel φ så:

$$\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}, \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}} \right) \;=\; (\cos(\varphi), \sin(\varphi))$$

Derved bliver (*) til $\sqrt{A^2+B^2} \cdot \big(\cos(\varphi)\cdot\sin(\omega t) \;+\; \sin(\varphi)\cdot\cos(\omega t)\big)$, som ved hjælp af additionsformlen fra sætning 1d) kan omskrives til:

$$\left(\sqrt{A^2+B^2}\right)\cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

Benyt ovenstående teknik til at omskrive $3\cdot\sin(0,7t) + 4\cdot\cos(0,7t)$ til et udtryk på formen $C\cdot\sin(0,7t+\varphi)$.