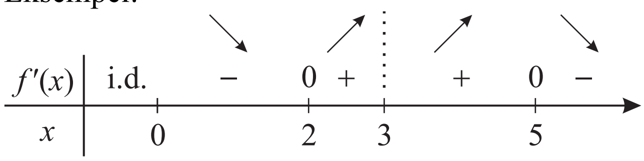
Skabelon til funktionsundersøgelser

Nedenfor en angivelse af fremgangsmåder ved funktionsundersøgelser. Ofte vil der kun blive spurgt om et udvalg af nævnte spørgsmål. Syntaksen i løsningerne vil være tilpasset CAS programmet Maple.

Opgave	At gøre
Definitionsmængde for f	Betegnes $\mathrm{Dm}(f)$. Undertiden er definitionsmængden allerede angivet. Ellers må man selv sortere tal fra, som ikke kan indsættes. Begrænsninger for typiske funktioner: $\frac{1}{x}$ Nævneren må ikke være 0, altså $x \neq 0$. $\sqrt{x}$ Her kræves $x \geq 0$. $\ln(x)$ Her kræves $x > 0$. $\log(x)$ Her kræves $x > 0$. x^a Hvis a er et helt positivt tal, kan udtrykket defineres for alle x. Ellers vil man normalt kræve at $x > 0$. $\tan(x)$ Her kræves at x *ikke* er et multiplum af $\frac{1}{2}\pi$ Definitionsmængden kan for eksempel angives med firkantede interval-parenteser. Eksempler: $[3,\infty[$ Alle tal fra 3 til uendelig. 3 er med. $R\setminus\{0\}$ Alle tal undtagen 0. $R\setminus\{0,5\}$ Alle tal undtagen 0 og 5.
Funktionsværdi i x_0	Udregn $f(x_0)$
Løs ligningen $f(x)=5$	$solve(f(x)=5,x)$ Sorter løsninger fra, som enten er komplekse eller som ikke er i definitionsmængden.
Løs ligningen $f(x)=g(x)$	$solve(f(x)=g(x),x)$ Sorter løsninger fra, som enten er komplekse eller som ikke er i definitionsmængden.
Nulpunkter for f	$solve(f(x)=0,x)$ Bemærk, at det her er nulpunkter for f, ikke f' ! Sorter løsninger fra, som enten er komplekse eller som ikke er i definitionsmængden. Svarer til at finde grafens skæringer med x-aksen.

<table>
<tr>
<td>Monotoniforhold</td>
<td>
Find nulpunkter for f': $solve(f'(x)=0,x)$

Sorter løsninger fra, som enten er komplekse eller som ikke er i definitionsmængden.
Indsæt nulpunkterne for f' (og kun dem) på en tallinje under hensyntagen til definitionsmængden. Udregn fortegnet for f' i de forskellige intervaller ved at indsætte et enkelt tal fra hver af disse i $f'(x)$ for at se, hvad fortegnet er. Endelig sættes pile over fortegnene for at angive om funktionen er voksende eller aftagende i de omtalte intervaller.

Eksempel:


Her er funktionen ikke defineret til venstre for 0 (i.d. står for ”ikke defineret”) samt i punktet 3. I punkterne 2 og 5 er $f'(x)$ lig med 0.

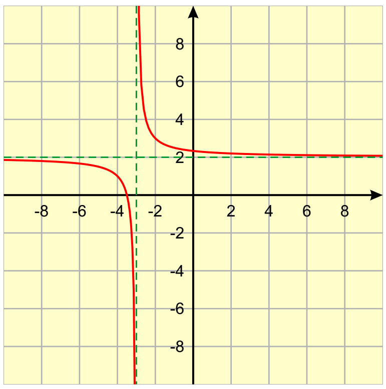
Man skal **huske** at gøre besvarelsen færdig, dvs. konkludere, hvor funktionen er voksende og hvor den er aftagende. I eksemplet haves:

f er aftagende i $[0,2]$ og i $[5,\infty[$
f er voksende i $[2,3[$ og i $]3,5]$
</td>
</tr>
<tr>
<td>Lokale ekstrema</td>
<td>
Begrebet dækker både lokalt maksimum og lokalt minimum. Disse kan aflæses af tallinjen under punktet ”Monotoniforhold” ovenfor. I eksemplet ovenfor haves:

f har lokalt minimum i $x=2$ med værdi $f(2)=...$
f har lokalt maksimum i $x=5$ med værdi $f(5)=...$

Det er en god idé at angive funktionsværdien i punkterne også, som antydet.

Bemærk, at hvis der er det samme fortegn for f' på begge sider af et nulpunkt for f', så er der *ikke* et lokalt ekstrema her, men derimod en *vandret vendetangent*.
</td>
</tr>
<tr>
<td>(Globale) ekstrema</td>
<td>
Begrebet dækker både (globalt) maksimum og (globalt) minimum. For at finde et eventuelt globalt maksimum skal man undersøge funktionen i de punkter, hvor der er lokalt maksimum samt intervalendepunkterne. Den x-værdi eller de x-værdier, hvor man har den største y-værdi, kalder man
</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td></td>
<td>
maksimumsstedet (henholdsvis maksimumstederne) og den tilhørende y-værdi kalder man maksimumværdien eller bare maksimum Bemærk, at hvis intervalendepunkterne ikke er med i definitionsmængden, må man undersøge grænseværdier!
For at finde et eventuelt globalt maksimum for funktionen i eksemplet under punktet ”monotoniforhold” skal man altså undersøge hvilket af følgende tal, der er størst: $f(0)$, $f(5)$ og $\lim_{x\to 3^-} f(x)$, etc.
Analog metode til bestemmelse af globalt minimum.
I øvrigt bør man altid bruge en graf til at støtte sig i ens undersøgelser!!
</td>
</tr>
<tr>
<td>Asymptoter</td>
<td>
Man taler især om vandrette asymptoter og lodrette asymptoter. Hvis funktionen for eksempel nærmer sig til tallet 2 for $x \to \infty$ eller $x \to -\infty$, så siger man at funktionen har den vandrette asymptote $y = 2$. Hvis $f(x)$ for eksempel går mod $-\infty$ eller ∞ for x gående mod -3 fra mindst en af siderne, så siger vi at $x = -3$ er en lodret asymptote. Grafen nedenfor illustrerer en funktion, som har begge nævnte asymptoter.


I Maple kan det vises ved at udregne følgende grænseværdier:
$\lim_{x\to 3^-} f(x) = -\infty$
$\lim_{x\to \infty} f(x) = 2$
</td>
</tr>
</table>

Grafen	Grafen for funktionen er en kraftig støtte til mange af de øvrige punkter i dette tillæg. I Maple kan grafen frembringes med plotkommandoen. Hvis man ønsker at tegne grafen for x mellem -10 og 5 og for y mellem -2 og 20, gøres det med: $plot(f(x), x = -10..5, y = -2..20)$ Man bør i øvrigt vælge et passende rektangel at tegne grafen i, så vigtige dele af grafen vises!
Værdimængde	Betegnes $\mathrm{Vm}(f)$. Betegnelsen står for mængden af mulige y-værdier. Lidt løst kan man sige, at det gælder om at "projicere" grafen ind på y-aksen. For at finde svaret bør man tage hensyn til monotoniforhold m.m. Det er klogt at have en graf til at støtte sig til.
Tangent	Formlen for tangenten til grafen for funktionen f i punktet x_0 er følgende: $y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$

Opgaver

Opgave 1

Bestem definitionsmængden for følgende funktioner, *uden* at fuldføre nogen funktions-undersøgelser!

a) $f(x) = x^3 + 1$ b) $f(x) = \dfrac{5}{x} + 3$ c) $6{,}541 \cdot 1{,}389^x$

d) $f(x) = 12{,}89 \cdot x^{0{,}743}$ e) $f(x) = \sqrt{x-3}$ f) $f(x) = \dfrac{2}{2x+3}$

g) $f(x) = \dfrac{4x-1}{x \cdot \sqrt{x-1}}$ h) $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$ i) $f(x) = \mathrm{e}^{2x+1}$

j) $f(x) = \ln(x) - 3x$ k) $f(x) = \ln(2x-2)$

Opgave 2

Bestem monotoniforholdene og eventuelle lokale ekstrema for følgende funktioner. Støt dig til en graf også.

a) $f(x) = x^4 - 3x^3 + 3x + 1$ b) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 7x + 8$

c) $f(x) = x^{1{,}5} \cdot \ln(x) - 3$ d) $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 12}{4x - 4}$

e) $f(x) = \dfrac{2}{x-2} + 3$ f) $f(x) = x \cdot \mathrm{e}^{x-1} + 4$

g) $f(x) = \mathrm{e}^{\sqrt{x}} - x^2$ h) $f(x) = \dfrac{5}{1 + \mathrm{e}^{-x}}$

Opgave 3

Foretag en funktionsundersøgelse af funktionen:

$$f(x) = \frac{8x^2}{\sqrt{x}+1} - \mathrm{e}^x$$

Tegn først grafen for at få en idé om funktionens opførsel. Undersøg derefter funktionen med henblik på definitionsmængde, eventuelle nulpunkter, monotoniforhold, eventuelle lokale og globale ekstrema samt værdimængde.

Hjælp: Når du skal finde nulpunkter for både f og f' vil du se, at Maple tager forbehold. Det er et af de tilfælde, hvor man må ty til andre metoder. Hertil er der en alternativ kommando, der hedder *fsolve*. Den fungerer på den måde, at man kan bruge den til at finde ét nulpunkt af gangen. Man fodrer kommandoen med en omtrentlig løsning – lad os side det er 5 – og skriver så kommandoen $\mathit{fsolve}(f(x) = 0, x = 5)$, hvorefter Maple leverer en løsning, som er tæt på 5, hvis en sådan eksisterer. Til denne opgave er du nødt til at kigge godt på grafen.