Rentesregning

Tænk i fremskrivningsfaktorer!

I dette tillæg skal vi se, at begrebet *fremskrivningsfaktorer* er nyttigt til at forstå og løse forskellige problemstillinger indenfor procent- og rentesregning.

1. Lægge procent til eller trække procent fra

Hvis man vil lægge 15% til 600, så kan det gøres ved at udregne, hvor meget 15% af 600 er lig med og lægge det til det oprindelige beløb:

$$600+600\cdot\tfrac{15}{100} \;=\; 600+600\cdot 0{,}15 \;=\; 600\cdot(1+0{,}15) \;=\; 600\cdot 1{,}15 \;=\; 690$$

Vi siger, at 600 er blevet *fremskrevet* med 1,15, og 1,15 betegnes *fremskrivningsfaktoren*. Hvis man vil trække 15% fra 600, så kan det ske ved at udregne, hvor meget 15% af 600 er lig med og trække det fra det oprindelige beløb:

$$600-600\cdot\tfrac{15}{100} \;=\; 600-600\cdot 0{,}15 \;=\; 600\cdot(1-0{,}15) \;=\; 600\cdot 0{,}85 \;=\; 510$$

I dette tilfælde er fremskrivningsfaktoren lig med 0,85. Ovenstående eksempler antyder, at vi kan angive en generel formel for tilfældene, hvor man enten lægger en procent til et tal eller trækker en procent fra et tal:

Sætning 1

Hvis der lægges en rente r til en *begyndelsesværdi* B, så fås slutværdien S ved:

(1) $$S \;=\; (1+r)\cdot B$$

Renten er det kommatal, som svarer til den givne procent. Formlen dækker også over tilfældet, hvor man trækker en procent fra et tal, idet man da bare regner r *negativ*! Faktoren $1+r$ kaldes *fremskrivningsfaktoren* og betegnes også undertiden med bogstavet F.

Eksempel 2

Befolkningstallet i en by er vokset fra 345 til 420. Hvor mange procent er befolkningstallet vokset med?

Løsning: Vi indser, at 345 svarer til begyndelsesværdien, mens 420 svarer til slutværdien og at r er ubekendt. Derfor isoleres r i formlen (1):

$$S \;=\; (1+r)\cdot B \quad\Leftrightarrow\quad \frac{S}{B} = 1+r \quad\Leftrightarrow\quad \frac{S}{B} - 1 \;=\; r$$

Indsættes tallene fås, at befolkningstallet er vokset med 21,7%:

$$r \;=\; \frac{S}{B} - 1 \;=\; \frac{420}{345} - 1 \;=\; 1{,}217 - 1 \;=\; 0{,}217 \;=\; 21{,}7\%$$

$\square$

Eksempel 3

En frakke er nedsat med 30% og koster nu 626,50 kr. Hvor meget kostede frakken før den blev sat på udsalg?

Løsning: Det er oplagt, at det er begyndelsesprisen, som er ubekendt. Derfor isolerer vi B i formlen (1):

$$S \;=\; (1+r)\cdot B \quad\Leftrightarrow\quad \frac{S}{1+r} \;=\; B$$

Da der trækkes 30% fra, er $r = -30\% = -0{,}30$ fås følgende:

$$B \;=\; \frac{S}{1+r} \;=\; \frac{626{,}50}{1+(-0{,}30)} \;=\; \frac{626{,}50}{0{,}70} \;=\; 895$$

så førprisen var altså 895 kr.

$\square$

2. Renteformlen

Det smarte ved at gange med en fremskrivningsfaktor, når man ønsker at lægge en procent til eller trække en procent fra er, at hvis man skal gøre det gentagne gange, så opnår man en ganske væsentlig besparelse i forhold til den gamle ”skolemetode”, hvor man både skal gange og lægge til. På figuren nedenfor har vi en situation, hvor vi skal lægge renterne r_1, r_2, r_3 og r_4 til én efter én.

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "\cdot(1+r_1)"] \arrow[rrrr, bend left, "\cdot(1+r_1)\cdot(1+r_2)\cdot(1+r_3)\cdot(1+r_4)"] & S_1 \arrow[r, "\cdot(1+r_2)"] & S_2 \arrow[r, "\cdot(1+r_3)"] & S_3 \arrow[r, "\cdot(1+r_4)"] & S_4
\end{tikzcd}$$

Vi ser, at slutresultatet S_4 straks kan udregnes ved at gange med *produktet* af fremskrivningsfaktorerne: $S_4 = (1+r_1)\cdot(1+r_2)\cdot(1+r_3)\cdot(1+r_4)\cdot B$.

Hvis vi specielt har, at der lægges den *samme* rente r til et startbeløb på K_0 i alt n gange, så får vi umiddelbart den såkaldte *renteformel*, som giver et udtryk for slutbeløbet K efter de n rentetilskrivninger:

$$K = \overbrace{(1+r)\cdot(1+r)\cdot\ldots\cdot(1+r)}^{n\text{ styk}}\cdot K_0 \quad\Leftrightarrow\quad K = K_0(1+r)^n$$

Sætning 4 (Renteformlen)

Hvis et startbeløb K_0 tilskrives renten r efter hver termin, fås følgende udtryk for slutbeløbet K efter i alt n terminer:

(2) $$K = K_0 \cdot (1+r)^n$$

Eksempel 5

Kurt indsætter 400 kr. på en bankbog til 5% i årlig rente. Hvor meget er beløbet vokset til efter 12 år?

Løsning: Vi benytter renteformlen:

$$K = K_0(1+r)^n = 400 \cdot (1+0,05)^{12} = 400 \cdot 1,05^{12} = 718,34$$

Så beløbet er vokset til 718, 34 kr.

□

Eksempel 6

Omsætningen i en virksomhed er på 5 år vokset fra 67 mill. kr. til 121 mill kr.

a) Hvor mange procent er indtjeningen vokset med i hele perioden?
b) Hvor meget er den *gennemsnitlige* årlige procentvise vækst i omsætningen?

Løsning: a) Her skal vi benytte formel (1). Sammenlign med eksempel 2.

$$r = \frac{S}{B} - 1 = \frac{121 \text{ mill.}}{67 \text{ mill.}} - 1 = 1,806 - 1 = 0,806 = 80,6\%$$

så svaret er, at omsætningen er steget med 80,6% i hele perioden. b) Denne opgave kan løses ved brug af renteformlen, idet man kan opfatte det som om at startbeløbet på de 67 mill. kr. står til en fast rente r i 5 år, og det bliver til 121 mill. kr. Den søgte gennemsnitlige rente er da netop r. Vi omskriver renteformlen:

$$K = K_0(1+r)^n \quad \Leftrightarrow \quad \frac{K}{K_0} = (1+r)^n \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt[n]{\frac{K}{K_0}} = 1+r \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt[n]{\frac{K}{K_0}} - 1 = r$$

og indsætter værdierne:

$$r = \sqrt[n]{\frac{K}{K_0}} - 1 = \sqrt[5]{\frac{121 \text{ mill.}}{67 \text{ mill.}}} - 1 = 1,125 - 1 = 0,125 = 12,5\%$$

så i gennemsnit er omsætningen vokset med 12,5% pr. år i den omtalte periode!

□

Bemærkning 7

I opgave 6 observerer man, at man *ikke* får den gennemsnitlige årlige procentvise vækst ved at dividere den procentvise vækst over alle fem år med 5. Det skyldes, at man i så fald ikke ville tage højde for *renters rente*!

Eksempel 8

Befolkningstallet i en amerikansk by er de sidste tre år vokset med 3,5% pr. år og er nu oppe på 800.000. Hvor mange år vil det tage før befolkningstallet når 1.000.000, hvis udviklingen fortsætter?

Løsning: Det er oplagt, at vi kan benytte renteformlen, da det er den samme procent, som tilskrives flere år efter hinanden. Den ubekendte er her antallet af år, *n*. For at løse dette problem, må vi ty til logaritmer:

$$K = K_0 \cdot (1+r)^n \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1.000.000}{800.000} = (1+0,035)^n \quad \Leftrightarrow \quad 1,25 = 1,035^n$$

$$\Leftrightarrow \quad \log\left(1,25\right) = \log(1,035^n) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\log(1,25)}{\log(1,035)} = n \quad \Leftrightarrow \quad 6,49 = n$$

Efter 7 år vil millionen altså være passeret, hvis udviklingen fortsætter!

□

3. Fremskrivningsfaktorer i forskellige perioder

Når man har at gøre med renter over forskellige perioder, kan vi også tale om fremskrivningsfaktorer for forskellige perioder. På nedenstående figur tilskrives renten r_1 pr. termin. Renten over *n* terminer betegnes med r_n.

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\cdot(1+r_1)"] \arrow[rrrr, bend left, "\cdot(1+r_n)"] & S_1 \arrow[r, "\cdot(1+r_1)"] & S_2 \quad \cdots\cdots & S_{n-1} \arrow[r, "\cdot(1+r_1)"] & S_n \end{tikzcd}$$

Det giver følgende sammenhæng mellem r_1 og r_n: $1+r_n \; = \; (1+r_1)^n$, så vi har:

> **Sætning 9**
>
> Sammenhængen mellem fremskrivningsfaktoren $F_1 = 1+r_1$ for én termin og den tilhørende fremskrivningsfaktor $F_n = 1+r_n$ for *n* terminer er følgende:
>
> (3) $$F_n = F_1^n \quad \Leftrightarrow \quad 1+r_n = (1+r_1)^n$$

Eksempel 10

Betina køber et TV på afbetaling. Det oplyses, at den månedlige rente er 2,4%. Hvad svarer det til i årlig rente?

Løsning: Ifølge bemærkning 6 har vi $1+r_{12} = (1+r_1)^{12}$, hvormed

$$r_{12} = (1+r_1)^{12}-1 = (1+0,024)^{12}-1 = 1,024^{12}-1 = 0,329 = 32,9\%$$

så det svarer altså til en årlig rente på 32,9%.

□

4. Gennemsnitlig rente

Det sidste vi skal se på i denne omgang er *gennemsnitlig rente*. Hvis renterne i hver termin har været henholdsvis $r_1, r_2, \ldots, r_n$, hvad har den gennemsnitlige rente r pr. termin da været? For at løse dette problem skal vi igen tænke i fremskrivningsfaktorer: Produktet af de n fremskrivningsfaktorer hørende til de gennemsnitlige renter på r skal være lig med produktet af fremskrivningsfaktorerne hørende til de n forskellige renter:

$$\overbrace{(1+r)\cdot(1+r)\cdot\ldots\cdot(1+r)}^{n \text{ styk}} = (1+r_1)\cdot(1+r_2)\cdot\ldots(1+r_n)$$
$$\Updownarrow$$
$$(1+r)^n = (1+r_1)\cdot(1+r_2)\cdot\ldots(1+r_n)$$
$$\Updownarrow$$
$$1+r = \sqrt[n]{(1+r_1)\cdot(1+r_2)\cdot\ldots(1+r_n)}$$

Sætning 11

Hvis renten i første termin er r_1, i næste termin er r_2, ... , i n'te termin er r_n, så er den gennemsnitlige rente r pr. termin givet ved formlen

(4) $$1+r = \sqrt[n]{(1+r_1)\cdot(1+r_2)\cdot\ldots(1+r_n)}$$

Eksempel 12

Steen ejer nogle aktier. Hvert år i perioden fra 2001 til 2006 er deres værdi vokset med henholdsvis –18%, 8%, 38%, –2% og 14%. Bestem hvor meget aktierne er vokset med i gennemsnit pr. år.

Løsning: Vi benytter formlen i (4):

$$\begin{aligned} 1+r &= \sqrt[n]{(1+r_1)\cdot(1+r_2)\cdot\ldots(1+r_n)} \\ &= \sqrt[5]{(1+(-0,18))\cdot(1+0,08)\cdot(1+0,38)\cdot(1+(-0,02))\cdot(1+0,14)} \\ &= \sqrt[5]{0,82\cdot1,08\cdot1,38\cdot0,98\cdot1,14} \\ &= 1,064 \end{aligned}$$

Altså er den gennemsnitlige årlige værditilvækst lig med $r = 1,064-1 = 0,064 = 6,4\%$.

□

Opgaver

Opgave 1

I det følgende skal du

a) Lægge 31% til 430 kr. b) Trække 56% fra 200 kr.
c) Lægge 117% til 4300 kr. d) Trække 0,9% fra 33,457 kg

Opgave 2

Løs nedenstående opgaver.

a) Momsen er i dag 25%. Prisen for en traktor inkl. moms er 345000 kr. Hvad var prisen uden moms?
b) En befolkning er på otte år steget med 13% og er blevet til 56000 personer. Hvor mange var der for otte år siden?
c) I en radioaktiv kilde er strålingen aftaget med 87% og aktiviteten er nu 590000 Bq. Hvor stor var aktiviteten fra starten, regnet i Bq?

Opgave 3

Et Van Gogh maleri er på en række år vokset i værdi fra 540.000 kr. til 710.000 kr. Hvor mange procent er dets værdi vokset med?

Opgave 4

Et TV-program havde sidste år et seertal på 800.000. I år ses programmet kun af 535.000. Hvor meget er faldet på i procent?

Opgave 5

Et beløb på 600 kr. indsættes på en konto til 8,5% i årlig rente. Hvor meget bliver beløbet til på 50 år?

Opgave 6

For 14 år siden indsatte Per et beløb på 6000 kr. og han hæver nu 21377 kr. Hvor meget har den årlige rente været?

Opgave 7

Fem år i træk er tilskuertallet til en klub i Superligen faldet med 10% pr. år, og er nu nede på 16000. Hvor stort var tilskuertallet for fem år siden?

Opgave 8

En aktie vokser med 12% hvert år i 4 år. Startkursen var 780. Hvad er kursen efter de 4 år?

Opgave 9

Et hus i det indre København er på 7 år steget i værdi fra 850.000 kr. til 2.200.000 kr. Hvor meget er det steget med i procent pr. år? (Antag samme procent hvert år).

Opgave 10

Hvor lang tid skal et beløb på 5000 kr. stå på en konto til 4,5% i årlig rente for at det bliver til 11000 kr.?

Opgave 11

Et beløb på 3000 kr. bliver til 4355 kr. på 6 år. Hvad har den årlige rente været?

Opgave 12

I 1999 var der i en lille by i alt 2300 indbyggere. I de næste tre år voksede befolkningstallet årligt med 3%.

a) Hvor mange indbyggere var der så i år 2002?
b) Hvornår vil indbyggertallet nå 4000, hvis man stiller den prognose, at indbyggertallet fortsætter med at vokse med 3% pr. år?

Opgave 13

a) Hvad svarer en årlig rente på 30% til i månedlig rente?
b) Hvad svarer en månedlig rente på 3,8% til i årlig rente?

Opgave 14

En bank giver de første tre år en rente på 5,50% pr. år, de næste 4 år giver de en rente på 1,85% pr. år. Hvad har den gennemsnitlige årlige rente været i syvårsperioden? Angiv resultatet med 2 decimaler.

Opgave 15

Værdien af et sjældent maleri vokser på 10 år fra 400.000 kr. til 1.000.000 kr.

a) Hvor mange procent er maleriets værdi steget på de 10 år?
b) Hvad svarer det til i gennemsnitlig årlig procentvis stigning?

Opgave 16

De første tre år voksede værdien af en aktie med henholdsvis 13%, 23% og 34%. Det næste år faldt aktiens værdi med 17%. Hvor mange procent er aktien vokset med i gennemsnit pr. år?

Opgave 17

Værdien af en sjælden mønt vokser på 11 år med 78%. Hvad er den gennemsnitlige årlige procentvise værditilvækst? *Hjælp*: Bestem først fremskrivningsfaktoren for alle 11 år. Hvad er fremskrivningsfaktoren svarende til 1 år?

Opgave 18 (svær)

For tre år siden udtalte direktøren i et firma, at firmaet som målsætning havde at øge sin værdi med i gennemsnit 10% pr. år i en femårig periode. De første 3 år har firmaet kun øget sin værdi med 4,5% pr. år. Hvor meget skal firmaet i gennemsnit øge sin værdi med de sidste to år, for at nå sit mål? *Hjælp*: Benyt sætning 11 og opstil en ligning!

Opgave 19

En vare på udsalg er nedsat med en bestemt procent. Hvad er mest fordelagtigt for køberen, hvis han kunne bestemme: At momsen først lægges til og rabatten derefter trækkes fra eller omvendt?

Løsninger

Opgave 1:	a)	563 kr.
	b)	88 kr.
	c)	9331 kr.
	d)	33,156 kg
Opgave 2:	a)	276000 kr.
	b)	49558 personer
	c)	4538462 Bq
Opgave 3:	31,5%	
Opgave 4:	33,1%	
Opgave 5:	35452 kr.	
Opgave 6:	9,5%	
Opgave 7:	27096 tilskuere	
Opgave 8:	kurs 1227	
Opgave 9:	14,6%	
Opgave 10:	18 år	
Opgave 11:	6,4%	
Opgave 12:	a)	2513 indbyggere
	b)	i år 2018
Opgave 13:	a)	2,21%
	b)	56,4%
Opgave 14:	3,40%	
Opgave 15:	a)	150%
	b)	9,6%
Opgave 16:	11,5%	
Opgave 17:	5,4%	
Opgave 18:	18,8%	