Renteformlen

Billeder:

Forside: ©iStock.com/ilbusca
Side 4: ©iStock.com/andresrimaging
Desuden egne illustrationer.

Renteformlen

I dette tillæg skal vi formulere og bevise den såkaldte renteformel samt give eksempler på dens anvendelse.

> **Sætning 1** (Renteformlen)
>
> Hvis et startbeløb K tilskrives renten r efter hver termin, fås følgende udtryk for slutbeløbet K_n efter i alt n terminer:
>
> (1) $$K_n \;=\; K \cdot (1+r)^n$$

Bevis: Vi har tidligere set, at man kan lægge renten r til *en enkelt gang* ved at benytte formlen $S = (1+r) \cdot B$, hvor B er begyndelsesværdien og S er slutværdien. For at bevise renteformlen skal vi altså blot benytte denne formel n gange. Hver gang ganges det forrige resultat med $(1+r)$.

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "\cdot(1+r)"] \arrow[rrrr, bend left, "\cdot(1+r)\cdot(1+r)\cdot(1+r)\cdot(1+r)\,=\,(1+r)^4"] & S_1 \arrow[r, "\cdot(1+r)"] & S_2 \arrow[r, "\cdot(1+r)"] & S_3 \arrow[r, "\cdot(1+r)"] & S_4
\end{tikzcd}$$

Det er ikke svært at indse, at i stedet for at gange med $(1+r)$ i alt n gange, så kunne vi lige så godt have klaret det hele på én gang ved at gange med $(1+r)^n$. Dette er illustreret på figuren ovenfor for tilfældet $n = 4$. I tilfældet i sætningen hedder begyndelsesværdien K og slutbeløbet K_n, hvorved man får $K_n = K \cdot (1+r)^n$.

□

Bemærkning 2

Vi kan også sætte tal på: Hvis vi for eksempel har 200 kr. stående på en bankkonto til en årlig rente på 3% i sammenlagt 4 år, så får vi altså slutbeløbet ved at gange de 200 kr. med fremskrivningsfaktoren 1,03 fire gange eller blot $1{,}03^4$ én gang. Vi ser her det smarte ved den nye teknik med fremskrivningsfaktorer: Vi behøver ikke udregne *mellemresultaterne* efter hvert år; vi kan tage hele skridtet på en gang! Havde vi argumenteret ved hjælp af den ”gammeldags fremgangsmåde” med at udregne hvor meget de 3% af tallet udgør og lægge dette resultat til det oprindelige, så var det hele blevet meget mere besværligt: (Idet vi udelader kr.) Først findes 3% af 200, som fås til $\frac{3}{100} \cdot 200 = 6$. Dette lægges til det forrige beløb, og man får 206. Herefter tages 3% af det nye beløb på 206: $\frac{3}{100} \cdot 206 = 6{,}18$, som lægges til de 206, så man får 212,18, etc.

□

Renteformlen kan benyttes i *alle* situationer, hvor den samme procent lægges til eller den samme procent trækkes fra et tal et antal gange. Det er altså ikke blot ved indeståender i en bank, at formlen kan benyttes. Et andet godt eksempel på en anvendelse er ved forøgelser/formindskelser af *populationer*. Det kan være en befolkning i en by eller endnu bedre: en bakteriepopulation. Eneste forudsætning er, at populationen vokser eller aftager med den samme procent i hver periode.

Anvendelser af renteformlen

Der figurerer fire forskellige størrelser i renteformlen. Derfor får vi fire forskellige typer opgaver, hvor tre af størrelserne er kendte og den sidste skal findes. Lad os se på et eksempel af hver type.

Slutbeløbet K_n skal findes

En bakteriekultur starter med 5000 bakterier. Hver time vokser populationen med 8%. Hvor stor er populationen efter én dag?

Løsning: Der er 24 timer på en dag, så vi får følgende:

$$K_n \;=\; K\cdot(1+r)^n \;=\; 5000\cdot(1+0,08)^{24} \;=\; 31706$$

Så efter en dag er der efter prognosen 31.706 bakterier.

Begyndelsesbeløbet K skal findes

Bent vil gerne spare op, så han om 5 år har 8.000 kr. til at købe en racercykel for. Banken giver i perioden en årlig rente på 4,5%. Hvor meget skal han indsætte fra starten?

Løsning: Vi isolerer først begyndelsesværdien K ved at dividere med $(1+r)^n$ på begge sider i renteformlen:

$$K_n \;=\; K\cdot(1+r)^n \quad\Leftrightarrow\quad K \;=\; \frac{K_n}{(1+r)^n} \;=\; \frac{8000}{(1+0,045)^5} \;=\; \frac{8000}{1,045^5} \;=\; 6420$$

Så Bent skal altså indsætte 6420 kr. fra start.

Renten r skal findes

Ulla ejer en lille villa i Århus. Den er på 7 år vokset i værdi fra 800.000 kr. til 1.200.000 kr. Hvor meget er værdien i gennemsnit vokset med pr. år i den anførte periode?

Løsning: Når man bruger udtrykket ”i gennemsnit” her, så mener man at man ønsker den procent, som hvis den tilskrives hvert år, vil give den rigtige slutværdi. Vi indsætter alle oplysningerne i renteformlen:

$$
\begin{aligned}
& K_n = K \cdot (1+r)^n \\
\Updownarrow \quad & \\
& 1200000 = 800000 \cdot (1+r)^7 \\
\Updownarrow \quad & \\
& \frac{1200000}{800000} = (1+r)^7 \\
\Updownarrow \quad & \\
& 1,5 = (1+r)^7 \\
\Updownarrow \quad & \\
& \sqrt[7]{1,5} = 1+r \\
\Updownarrow \quad & \\
& 1,0596 = 1+r \\
\Updownarrow \quad & \\
& 0,0596 = r
\end{aligned}
$$

så den gennemsnitlige årlige procentvise stigning i husets værdi er på 5,96%.

Antal terminer *n* skal findes

Simonsen indsætter 10.000 kr. på en bankkonto til en årlig rente på 4%. Hvor mange år tager det før han kan hæve 25.000 kr.?

Løsning: Vi indsætter de kendte størrelser i renteformlen:

$$
\begin{aligned}
& K_n = K \cdot (1+r)^n \\
\Updownarrow \quad & \\
& 25000 = 10000 \cdot (1+0,04)^n \\
\Updownarrow \quad & \\
& \frac{25000}{10000} = (1+0,04)^n \\
\Updownarrow \quad & \\
& 2,5 = 1,04^n \\
\Updownarrow \quad & \\
& \log(2,5) = \log(1,04^n) \\
\Updownarrow \quad & \\
& \log(2,5) = n \cdot \log(1,04) \\
\Updownarrow \quad & \\
& \frac{\log(2,5)}{\log(1,04)} = n \\
\Updownarrow \quad & \\
& 23,4 = n
\end{aligned}
$$

Vi ser i linje 4, at vi er nødt til at benytte logaritmer, fordi den ubekendte står i eksponenten. Derfor tages logaritmen på begge sider, som vi ser i linje 5. I linje 6 benyttes herefter logaritmeregel nr. 3, som udtrykker at eksponenten i en potens kan ganges ned foran. Alt i alt fås, at det tager ca. 24 år før kontoen er oppe på de 25.000 kr.

Renter for forskellige perioder

Lad os sige at renten er 3% pr. år. Hvor meget er renten så på 2 år? Nogle vil måske foreslå at man blot ganger med 2, så det giver 6%. Det er desværre ikke så enkelt. Der er nemlig ikke taget hensyn til *renters rente*, som opstår ved at de 3% det andet år skal tages af et større tal. Men det gode råd med at *tænke i fremskrivningsfaktorer* kommer os igen til hjælp: Det første år fremskrives beløbet (uanset hvad det er) med 1,03. Det samme sker det andet år. I alt er der i hele perioden på de to år fremskrevet med faktoren $1,03 \cdot 1,03 = 1,03^2 = 1,0609$, hvilket svarer til en samlet 2-årlig rente på 6,09%. Generelt får man følgende direkte fra renteformlen:

Sætning 3

Hvis renten i én periode er r_1, så er renten i n perioder, betegnet r_n, givet ved formlen $1 + r_n = (1 + r_1)^n$.

Vi skal se på to eksempler: Et hvor vi udregner renten for en længere periode, og en hvor vi udregner renten for en kortere periode.

Eksempel 4

Kurt ønsker at købe en fladskærm, og i TV forretningen ser han et tilbud om en afbetalingsordning, som svarer til at han skal betale en *månedlig* rente på 2,25%. For at kunne forholde sig til rentens størrelse vil han gerne vide, hvor meget det svarer til i *årlig rente*. Kan du hjælpe ham?

Løsning: Vi benytter sætning 3, idet $r_1 = 2,25\% = 0,0225$ og $n = 12$, da der er 12 måneder på et år:

$$1 + r_n = (1 + r_1)^n = (1 + 0,0225)^{12} = 1,0225^{12} = 1,306$$
$$\Updownarrow$$
$$r_n = 1,306 - 1 = 0,306 = 30,6\%$$

Så det er altså en pæn stor årlig rente på 30,6%, som forretningen tager sig!

Eksempel 5

Ifølge tal fra *Danmarks Statistik* er prisen på æg fra januar 2000 til januar 2010 vokset med 41,9%. Hvor meget svarer det til i årlig procentvis stigning?

Løsning: Vi går her fra en 10-årig periode til en 1-årig periode. Vi arbejder derfor med en periode på 1 år og 10 perioder på 1 år, dvs. $n = 10$. Samtidig er $r_n = 0,419$. Vi benytter sætning 3:

$$
\begin{gathered}
1 + r_n = (1 + r_1)^n \\
\Updownarrow \\
1 + 0,419 = (1 + r_1)^{10} \\
\Updownarrow \\
1,419 = (1 + r_1)^{10} \\
\Updownarrow \\
\sqrt[10]{1,419} = 1 + r_1 \\
\Updownarrow \\
1,036 = 1 + r_1 \\
\Updownarrow \\
0,036 = r_1
\end{gathered}
$$

Så den årlige procentvise stigning i prisen på æg er altså på 3,6%.

Opgaver

Opgave 1

Løs følgende blandede opgaver ved hjælp af renteformlen. *Hjælp*: Gør dig først klart hvilken størrelse, som skal findes og hvilke du kender.

a) Rolf sætter 50.000 kr. ind på en bankkonto til en årlig rente på 5%. Hvor meget står der på kontoen efter 10 år?
b) Irene sætter et beløb ind på en konto til en årlig rente på 3,25%. Efter 8 år står der 2300 kr. på kontoen. Hvor meget satte hun ind fra begyndelsen?
c) En by i Rusland har 35.000 indbyggere. Man regner med at byens befolkningstal vokser med 3,2% pr. år. Hvor mange indbyggere vil der ifølge prognosen være i byen 20 år senere?
d) Forklar hvorfor det ofte er rimeligt at antage, at befolkningen i en by vokser med en bestemt *procent* hver år, i modsætning til med et bestemt *tal* hvert år.
e) En bakteriekultur indeholder fra begyndelsen 20.000 bakterier. Det vides, at den formerer sig med 18% hver time. Hvor lang tid går der før bakteriekulturen når en størrelse af 100.000 bakterier?
f) En aktie er i en 5-årig periode vokset i værdi fra 550 kr. til 940 kr. Hvor stort er det årlige procentvise afkast?
g) Man regner med at befolkningen i et af Danmarks yderkantsområder vil falde med 1,5% om året. I dag bor der 150.000 mennesker. Hvor mange vil der efter prognosen være om 20 år?
h) I dag er der 13.000 indbyggere i en by i USA, og befolkningen er (gennemsnitlig) vokset med 8,1% hvert år de sidste 6 år. Hvor mange indbyggere var der for 6 år siden?
i) Det antages, at indbyggertallet i en by i provinsen vil falde med (gennemsnitligt) 3% om året i de næste mange år. I dag bor der 42.000 personer. Hvor lang tid går der, før indbyggertallet er halveret?
j) Danmarks Statistik giver nedenstående oplysninger om antallet af motorkøretøjer pr. døgn på strækningen E45 Sydjyske Motorvej, vest for Haderslev. I hvilken periode har den gennemsnitlige årlige procentvise stigning været størst: I perioden fra 1990 til 2000 eller i perioden fra 2000 til 2008?

1990	2000	2008
14.500	24.000	33.043

Opgave 2

Benyt sætning 3 til at løse nedenstående blandede opgaver.

a) En bank tager en månedlig rente på 1,2% for et lån. Hvad svarer det til i årlig rente?
b) Ifølge Danmarks Statistik er brød og kornprodukter fra januar 2005 til januar 2010 vokset med 21,4%. Hvor meget giver det i gennemsnitlig årlig procentvis stigning?
c) Ifølge Danmarks Statistik er produktionen af naturgas fra januar 1990 til januar 2009 vokset med 153%. Hvor stor er den gennemsnitlige årlige procentvise stigning i nævnte periode?

Løsninger

Opgave 1:

a) 81445 kr.
b) 1781 kr.
c) 65.715 kr.
d) …
e) Små 10 timer.
f) 11,3%
g) 110.870 indbyggere
h) 8147 indbyggere
i) 23 år
j) Den er størst i perioden 1990-2000

Opgave 2:

a) 15,4%
b) 1,63%
c) 10,9%