## Produktreglen for differentiation

Vi har tidligere set, at hvis to funktioner *f* og *g* er differentiable i et punkt , så er *sum­men* af funktionerne også differentiabel i , og differentialkvotienten kan fås ved at dif­ferentiere de to funktioner hver for sig og lægge resultaterne sammen. Sagt med matematik: . Vi fik også set, at en konstant *k* gange *f* er dif­ferentiabel i  og at differentialkvotienten fås ved løst sagt ”at sætte konstanten uden­for”: . Disse regneregler er overordentlig nyttige, for det be­tyder nemlig, at vi umid­del­bart kan differentiere en masse nye funktioner, uden at skulle til at ”gå tilbage til Adam og Eva”, hvormed menes opskrive differenskvotienten, re­du­ce­re udtrykket og under­søge for grænseværdier, når . Vi kan altså umiddelbart spare en masse tid. Det næste nærliggende spørgsmål, der trænger sig på, er om *pro­duk­tet*  er dif­fe­ren­tia­bel i , og om man i så fald kan differentiere produktfunktionen ved at differentiere funk­tionerne hver for sig og gange resultaterne sammen til sidst, alt­så om følgende gæl­der: ? Svaret er her NEJ!! Det er des­vær­­re lidt mere kom­­pliceret, men dog stadig til at have med at gøre.

|  |
| --- |
| Sætning 1Antag at funktionerne *f* og *g* er differentiable i punktet . Da er produktfunktionen  differentiabel i  og differentialkvotienten fås således:(1)  |

*Bevis*: For at bevise sætningen er vi nødt til at gå helt tilbage til definitionen for dif­fe­ren­tialkvotient. Lad os kalde produktfunktionen for , altså: . Vi skal have fat i differenskvotienten for produktfunktionen. Da der er flere differens­kvo­ti­en­ter i spil, anbringer vi indekset *h* på :



*Forklaringer*: 3. lighedstegn: Vi har benyttet et trick, idet vi har indskudt to led i midten i tælleren. Vi har trukket  fra og lagt leddet til igen. Dermed er der ikke sket noget reelt. 4. lighedstegn: Vi har opdelt brøken i to dele. 5. lighedstegn: I tæl­le­ren i første brøk kan  sættes uden for parentes, da den er en fælles faktor. Til­svarende kan  sættes udenfor parentes i tælleren i det andet led. 7. lighedstegn: Vi kan nu se meningen med tricket højere oppe. Vi opdager at første brøk netop er dif­fe­renskvotienten for funktionen *f*,og at den anden brøk er differenskvotienten for funk­tio­nen *g*.

Vi har nu fået et udtryk for differenskvotienten for produktfunktionen *h* og reduceret den så meget vi kan. Sidste trin i raketten er at afgøre, om udtrykket har en grænseværdi for  og, hvis grænseværdien eksisterer, bestemme den. I sætningen er antaget, at *f* og *g* begge er differentiable i . Pr. definition betyder det, at så har differens­kvo­ti­en­ter­ne for *f* og *g* hver en grænseværdi for , og grænseværdierne er henholdsvis  og . Sagt med matematik har vi  og  for . Vi mangler stadig at kigge på to led:  er fast og ændrer sig ikke, når . Det fjerde led: Da *g* er differentiabel i , er *g* også kontinuert i  ifølge en sætning. Derfor har vi  for . Alt i alt får vi ifølge reglerne for grænseværdier:

(2) 

Differenskvotienten for *h* har altså en grænseværdi. Derfor er produktfunktionen *h* dif­fe­ren­tiabel i , og differentialkvotienten er lig med ovenstående grænseværdi, altså:



eller . Det ønskede er dermed vist.



#### Bemærkning 2

Læg mærke til symmetrien i formlen. Det gør den nemmere at huske. I det første led på højre side differentierer man den første funktion og lader den anden funktion stå. I det andet led lader man den første funktion stå og differentierer den anden funktion!

#### Eksempel 3

Lad  og . Bestem differentialkvotienten for produktfunktionen . Iføl­ge sætning 1 har vi:

