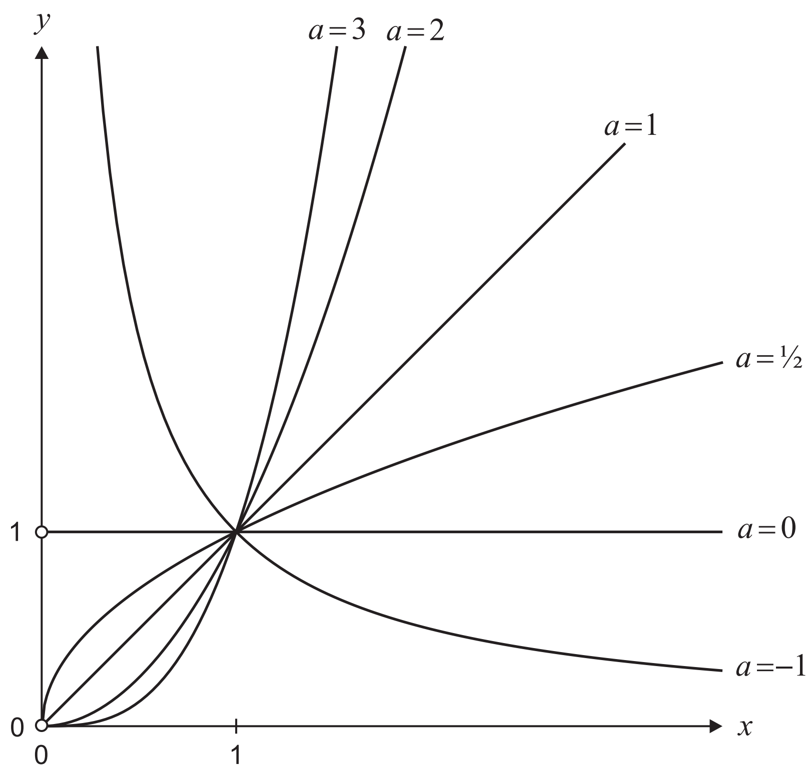
Potensielle funktioner

Definition 1

En funktion på formen $f(x) = b \cdot x^a$, $x \in R_+$, hvor $b \in R_+$ og $a \in R$ er konstanter, kaldes for en *potensudvikling* eller en *potensiel funktion*. Bemærk, at man konsekvent har valgt at definere funktionerne for udelukkende positive x-værdier, selvom man for visse værdier af a godt kunne have indsat negative værdier af x. For andre værdier af a, for eksempel $a = ½$, vil det derimod ikke give mening at indsætte negative x-værdier (Overvej!). Hvis $b = 1$ kaldes funktionen for en *potensfunktion*.

Eksempel 2

Nedenfor er afbildet graferne for forskellige potensfunktioner (dvs. $b = 1$). Vi ser, at potensfunktionen er *voksende* når $a > 0$ og *aftagende* når $a < 0$. For $a = 0$ er funktionen *konstant*.



Hvis man ændrer på b-værdierne i forskrifterne for de afbildede funktioner, så vil de nye grafer <u>*ikke*</u> være en parallelforskydning i forhold til de gamle; derimod vil der være tale om en *skalering* i y-aksens retning. Det vil svare til, at man strækker eller komprimerer grafen i y-aksens retning (Overvej hvorfor!).

Sætning 3

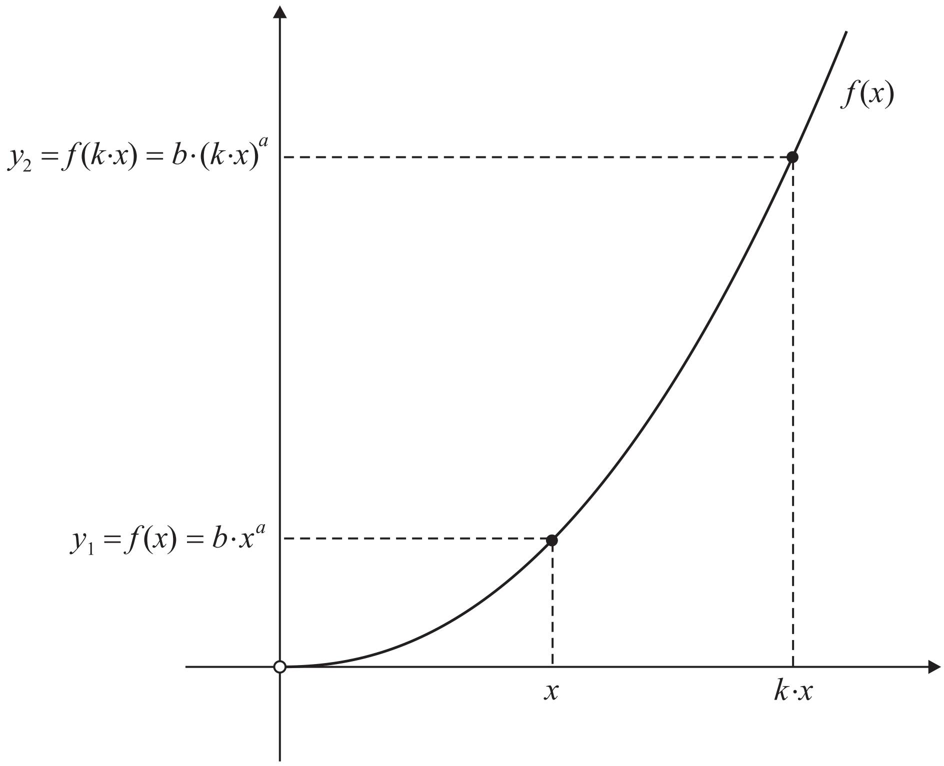
Lad $f(x) = b \cdot x^a$; $x \in R_+$. Da gælder:

a) Grafen for f går igennem punktet $(1, b)$.
b) x ganges (*fremskrives*) med $k \Rightarrow y$ ganges (*fremskrives*) med k^a.
c) Funktionen er *voksende*, hvis $a > 0$, *aftagende*, hvis $a < 0$ og *konstant*, hvis $a = 0$.

Bevis: $f(1) = b \cdot 1^a = b \cdot 1 = b$. Dette viser a). For at vise b) indsætter vi $k \cdot x$ i forskriften for f og omskriver:

(1) $$y_2 = f(k \cdot x) = b \cdot (k \cdot x)^a = b \cdot k^a \cdot x^a = k^a \cdot (b \cdot x^a) = k^a \cdot f(x) = k^a \cdot y_1$$

hvor vi for at få tredje lighedstegn har benyttet en af potensreglerne. Udregningen (1) viser, at hvis x ganges med k, så bliver den nye y-værdi k^a gange så stor som den forrige y-værdi. c) Overlades til læseren at overveje.



□

Bemærk, at sætning 3b) fortæller os, at hvis x ganges med et bestemt tal, så ganges også y med et bestemt tal – *uafhængigt* af hvilket x man startede med!

Husk fra rentesregningen, at når man ganger med et tal F (*fremskrivningsfaktoren*), så svarer det til at lægge *renten* r til, hvor sammenhængen mellem F og r er $F = 1 + r$. At lægge 25% til 500 svarer altså til at gange 500 med 1,25, idet $F = 1 + r = 1 + 0{,}25 = 1{,}25$. Vi siger, at 500 har fået en *relativ tilvækst* på 0,25 eller 25%. Omvendt svarer en fremskrivningsfaktor på 0,88 til at trække 12% fra, idet $r = F - 1 = 0{,}88 - 1 = -0{,}12 = -12\%$.

Denne sammenhæng mellem fremskrivningsfaktoren F og den relative tilvækst r betyder, at vi kan omformulere sætning 3b). Da vi har at gøre med fremskrivning af både x og y, vil vi indføre betegnelsen F_1, som det x fremskrives med, mens F_2 skal betegne det, som y fremskrives med. Tilsvarende vil vi lade r_1 betegne den relative tilvækst i x, mens r_2 skal betegne den relative tilvækst i y. Vi har dermed

(2) $$F_1 = 1 + r_1 \quad \text{og} \quad F_2 = 1 + r_2$$

Sætning 3b) kan dermed udtrykkes på følgende måde: $F_1 = k \;\Rightarrow\; F_2 = k^a$, hvormed

(3) $$F_2 = F_1^a$$

Indsættes udtrykkene fra (2) i (3), fås følgende sætning:

Sætning 4 (Relative tilvækster)

Givet en potensiel udvikling. Hvis x gives en *relativ tilvækst* på r_1, så får y en relativ tilvækst på r_2, bestemt ved:

(4) $$1 + r_2 \;=\; (1 + r_1)^a$$

Eksempel 5

Betragt potensudviklingen med forskrift $f(x) = 2 \cdot x^{2,3}$.

a) Hvad sker der med y, hvis x ganges med 1,12?

b) Oversæt det, som sker i spørgsmål a), til relative tilvækster i x og y.

c) Hvor meget skal man gange x med, for at y fordobles?

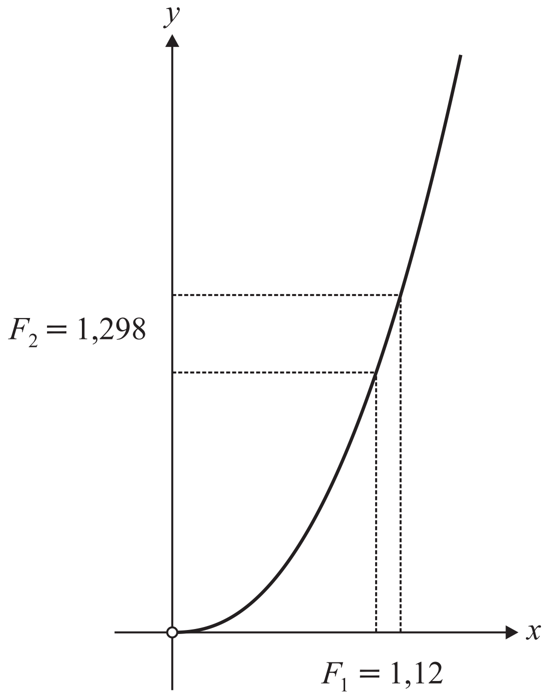
Løsning:

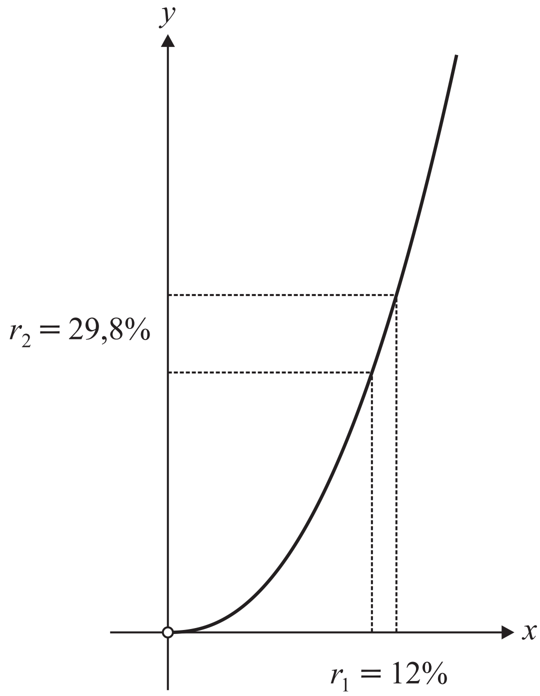
a) Ifølge (3) fås: $F_1 = 1{,}12 \;\Rightarrow\; F_2 = F_1^a = 1{,}12^{2,3} = 1{,}298$, så y ganges med 1,298.

b) Ifølge (2) haves: $r_1 = F_1 - 1 = 1{,}12 - 1 = 0{,}12 = 12\%$ og $r_2 = F_2 - 1 = 1{,}298 - 1 = 0{,}298$ $= 29{,}8\%$. En relativ tilvækst på 12% i x giver altså en relativ tilvækst på 29,8% i y.

c) Da $F_2 = 2$ fås ifølge (3): $F_2 = F_1^a \;\Leftrightarrow\; 2 = F_1^{2,3} \;\Leftrightarrow\; \sqrt[2,3]{2} = F_1 \;\Leftrightarrow\; 1{,}352 = F_1$. Svaret er altså, at x skal ganges med 1,352.

Figuren på næste side illustrerer skematisk situationen i spørgsmålene a) og b).





□

Eksempel 6

Betragt potensudviklingen med forskrift $f(x) = 13{,}4 \cdot x^{0{,}54}$.

a) Hvis x vokser med 17%, hvor mange procent vokser y da med?

b) Hvor mange procent skal x vokse med, for at y vokser med 27%?

Løsning: Vi benytter sætning 4.

a) $1+r_2 = (1+r_1)^a \;\Leftrightarrow\; 1+r_2 = (1+0{,}17)^{0{,}54} \;\Leftrightarrow\; 1+r_2 = 1{,}17^{0{,}54} \;\Leftrightarrow\; 1+r_2 = 1{,}088$

$\Leftrightarrow\; r_2 = 1{,}088 - 1 = 0{,}088 = 8{,}8\%$

Svaret er altså, at y vokser med 8,8%.

b) $1+r_2 = (1+r_1)^a \;\Leftrightarrow\; 1+0{,}27 = (1+r_1)^{0{,}54} \;\Leftrightarrow\; 1{,}27 = (1+r_1)^{0{,}54} \;\Leftrightarrow\; \sqrt[0{,}54]{1{,}27} = 1+r_1$

$\Leftrightarrow\; 1{,}557 = 1+r_1 \;\Leftrightarrow\; 1{,}557 - 1 = r_1 \;\Leftrightarrow\; 0{,}557 = r_1 \;\Leftrightarrow\; 55{,}7\% = r_1$

Dermed konkluderer vi, at x skal vokse med 55,7%, for at y vokser med 27%.

□

Eksempel 7

Lad $f(x) = 480 \cdot x^{-0{,}84}$. Hvor mange procent øges y med, hvis x reduceres med 22%?

Løsning: Vi benytter igen sætning 4.

$1+r_2 = (1+r_1)^a \;\Leftrightarrow\; 1+r_2 = (1+(-0{,}22))^{-0{,}84} \;\Leftrightarrow\; 1+r_2 = 0{,}78^{-0{,}84} \;\Leftrightarrow\; 1+r_2 = 1{,}232$

$\Leftrightarrow\; r_2 = 1{,}232 - 1 = 0{,}232 = 23{,}2\%$.

Vi konkluderer, at y vokser med 23,3%.

□

Forskriften ud fra to støttepunkter

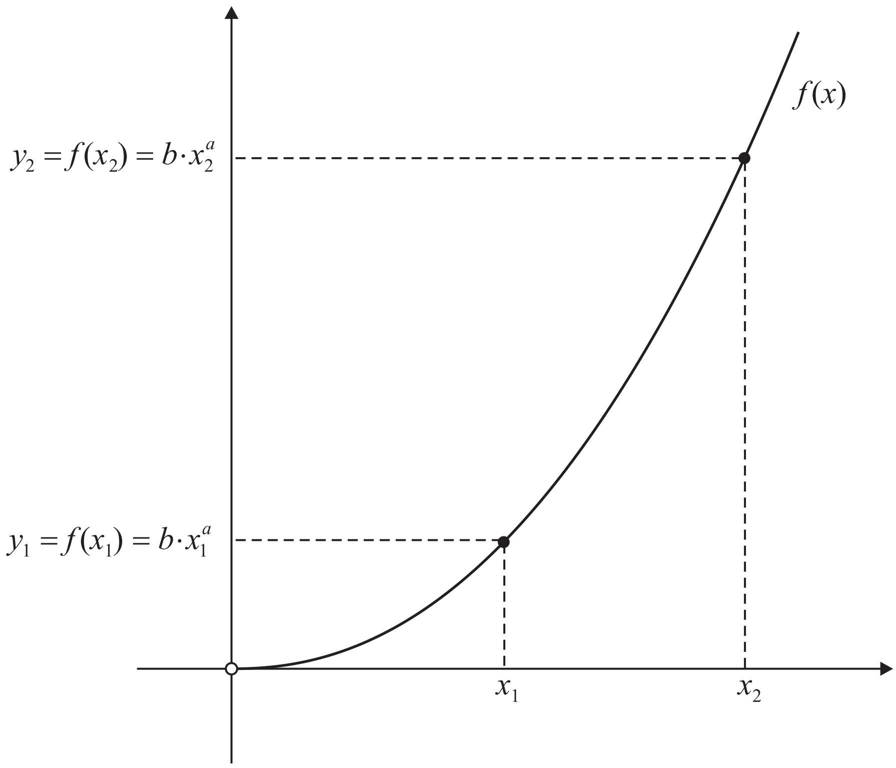
Vi har tidligere set, at man kan bestemme forskriften for en lineær funktion og en eksponentiel funktion, når man kender to punkter på funktionens graf. Dette er også tilfældet med potensudviklinger. Det vil vi se på nu.

Sætning 8

Lad $f(x) = b \cdot x^a$ og lad (x_1, y_1) og (x_2, y_2) være to punkter på grafen for f. Da kan eksponenten a bestemmes ved følgende formel:

(5) $$a = \frac{\log(y_2) - \log(y_1)}{\log(x_2) - \log(x_1)}$$

Bevis:



Da punkterne ligger på grafen, haves $y_1 = b \cdot x_1{}^a$ og $y_2 = b \cdot x_2{}^a$, som angivet på figuren. x_1, x_2, y_1 og y_2 skal her antages at være kendte. Derimod er a og b ukendte. Man ser snedigt, at man kan skaffe sig af med den ene ubekendte, b, ved at tage forholdet mellem de to y-værdier:

(6) $$\frac{y_2}{y_1} = \frac{b \cdot x_2{}^a}{b \cdot x_1{}^a} = \frac{x_2{}^a}{x_1{}^a} = \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^a$$

hvor vi blandt andet har brugt en potensregel. For at isolere a tager vi logaritmen på begge sider af (6). Herved fås:

$$\log\left(\frac{y_2}{y_1}\right) = a \cdot \log\left(\frac{x_2}{x_1}\right)$$

$$\Updownarrow$$

(7) $$\log(y_2) - \log(y_1) = a \cdot \left[\log(x_2) - \log(x_1)\right]$$

$$\Updownarrow$$

$$a = \frac{\log(y_2) - \log(y_1)}{\log(x_2) - \log(x_1)}$$

hvor logaritmereglerne er blevet anvendt. □

Eksempel 9

Bestem forskriften for den potensielle funktion, hvis graf går igennem følgende to punkter: (2,5) og (6,27).

Løsning:

$$a = \frac{\log(y_2) - \log(y_1)}{\log(x_2) - \log(x_1)} = \frac{\log(27) - \log(5)}{\log(6) - \log(2)} = 1,5350$$

Dermed haves foreløbigt: $f(x) = b \cdot x^{1,5350}$. For at bestemme b indsættes ét af de to opgivne datapunkter, ligegyldigt hvilket. Vi vælger (2,5):

$$5 = b \cdot 2^{1,5350} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{5}{2^{1,5350}} = b \quad \Leftrightarrow \quad 1,7254 = b$$

Altså fås $f(x) = 1,7254 \cdot x^{1,5350}$.

□

Bemærkning 10

For at finde b, kan du også skrive mere direkte: $b = \dfrac{y}{x^a} = \dfrac{5}{2^{1,5350}} = 1,7254$.

Bemærkning 11

Af (7) fremgår det, at man kan bruge følgende alternative udtryk for a:

(8) $$a = \frac{\log\left(\frac{y_2}{y_1}\right)}{\log\left(\frac{x_2}{x_1}\right)}$$