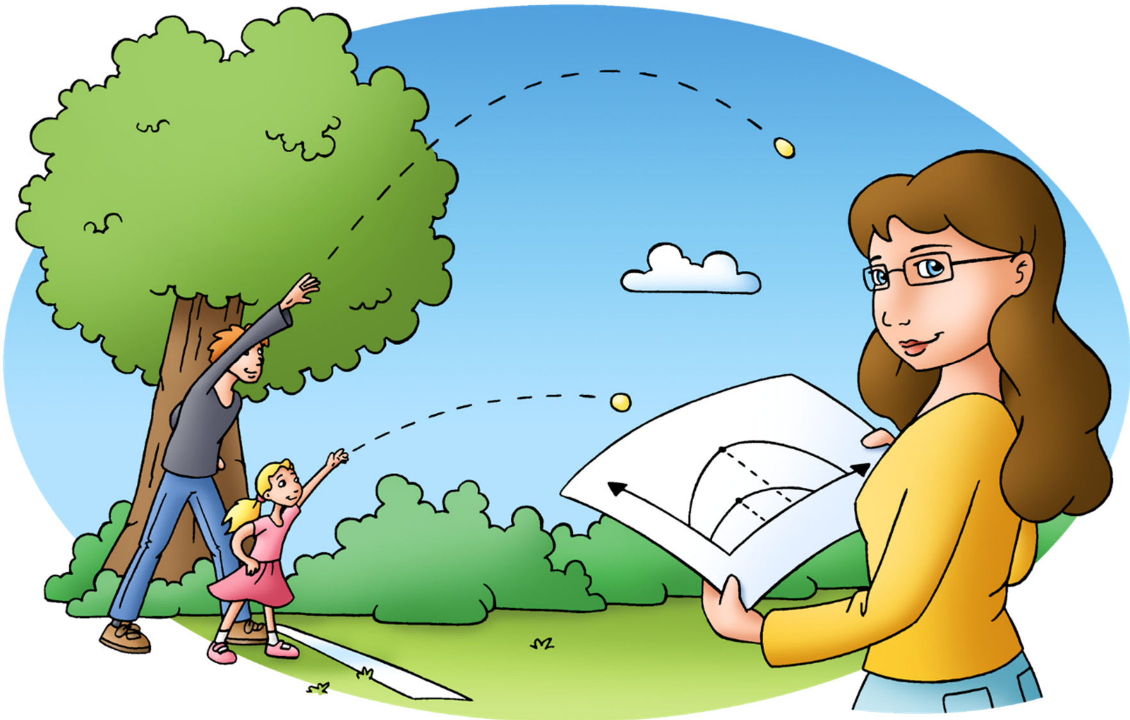
POLYNOMIER

- med vægt på andengradspolynomier



Udvidet med et appendiks B, august 2023.
Kontakt: vestergaard@matematiksider.dk

Billeder

Side 14: Johan Gørbitz [Public domain], via Wikimedia Commons from Wikimedia Commons (N. H. Abel)
Side 14: By JCSantos (Own work) [Public domain], via Wikimedia Commons (Ars Magna)
Side 21: ©iStock.com/danielvfung (Telecommunication Satellites)

Indholdsfortegnelse

1. Indledning 5
2. Andengradspolynomier og deres grafer 5
3. Toppunktsformel for parabel 6
4. Andengradsligninger 7
5. Fortegn for a, b, c og d 11
6. Faktorisering af et andengradspolynomium 12
7. Polynomier af højere grad 13
8. Polynomiel regression 15
9. Anvendelser af andengradspolynomier 18
Appendiks A. Parallelforskydning af grafer 23
Appendiks B. Bevis for toppunktsformlen 27
Opgaver 29

1. Indledning

Vi har tidligere set på begrebet en *lineær funktion*. En sådan funktion kan også betragtes som et *førstegradspolynomium*, idet den ubekendte x i $f(x) = a \cdot x + b$ har eksponenten 1. Der er imidlertid god grund til også at betragte funktioner, hvor der forekommer højere potenser af x. Det skal vi kigge på i det følgende.

2. Andengradspolynomier og deres grafer

Vi skal i dette afsnit studere de såkaldte andengradspolynomier og begynder derfor med nogle definitioner.

Definition 1

Et *andengradspolynomium* er en funktion på formen:

(1) $$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c\ , \quad a \neq 0$$

hvor a, b og c er reelle tal. Man kalder dem også for *koefficienterne* til henholdsvis 2. gradsleddet, 1. gradsleddet og 0. gradsleddet. Alternativt kan c også kaldes *konstantleddet*. Grafen for et andengradspolynomium kaldes en *parabel*.

For at få et indtryk af, hvordan grafen ser ud for forskellige værdier af koefficienterne a b og c, kan man med fordel bruge *GeoGebra* til få tegnet en graf, hvor koefficienterne kan varieres med skydere. Løs i den forbindelse gerne opgave 1 straks. I det efterfølgende vil vi angive nogle af de egenskaber, som du måske har eksperimenteret dig frem til.

Sætning 2

For et andengradspolynomium $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c\ ,\ a \neq 0$ gælder følgende:

a) Grafen for g skærer y-aksen i $(0, c)$.
b) Fortegnet for a afgør, om parablen vender grenene opad eller nedad. Hvis a er positiv, vender grenene på parablen opad, ellers vender de nedad. Jo større a er numerisk set, jo smallere er parablen.
c) Linjen $y = b \cdot x + c$ er tangent til grafen for f i punktet $(0, c)$.

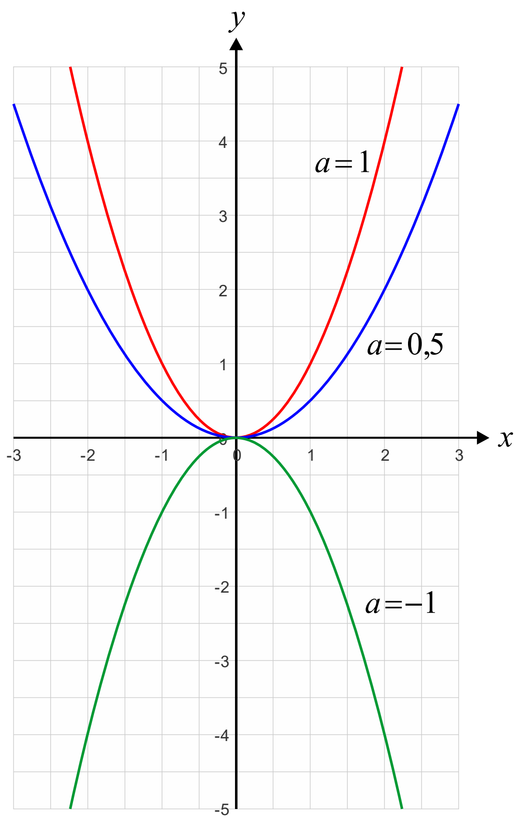
Bevis:

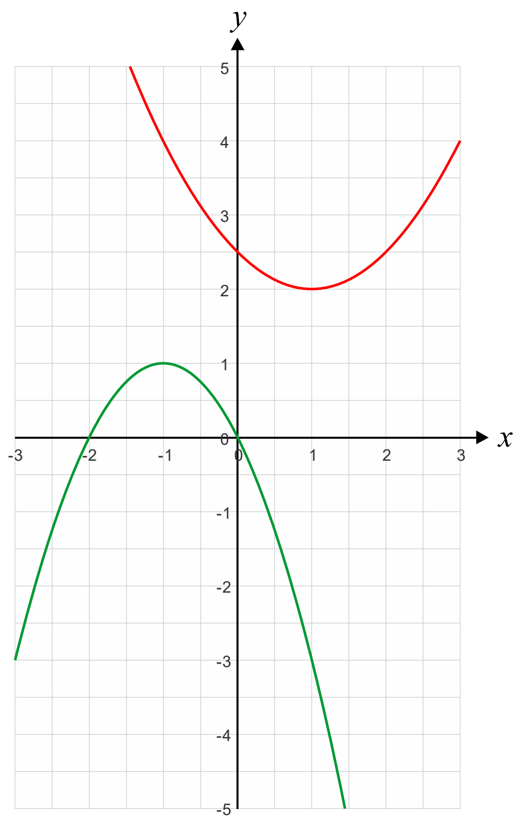
a) $f(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = c$.
b) Vi beviser det ikke.
c) Vi venter til vi kommer til differentialregningen med at bevise denne påstand om tangenten til grafen i punktet $(0, c)$.

□

På figuren nedenfor til venstre betragter vi et simpelt andengradspolynomium på formen $f(x)=a\cdot x^2$ for tre forskellige værdier for a. Som graferne på figuren til venstre antyder, vender *parablens grene* opad, når $a>0$ og nedad, når $a<0$. Og jo større a er numerisk set, jo mere *smal* bliver parablen. På figuren til højre er vist graferne for to ikke-simple andengradspolynomier. Den øverste røde kurve er graf for $f(x)=\frac{1}{2}x^2-x+\frac{5}{2}$, hvor vi ser, at koefficienterne er $a=\frac{1}{2}, b=-1$ og $c=\frac{5}{2}$. Den nederste grønne kurve er graf for andengradspolynomiet $f(x)=-x^2-2x$, hvor koefficienterne er $a=-1, b=-2$ og $c=0$.

Vi ser, at graferne for de simple andengradspolynomier er symmetriske omkring den lodrette akse, som går igennem parablens toppunkt, her y-aksen. Indsætter man nemlig tal med samme numeriske værdi, men med modsat fortegn, får man samme funktionsværdi. Det kan udtrykkes ved at $f(-x)=f(x)$. Man kan vise, at grafen for det generelle andengradspolynomium $g(x)=a\cdot x^2+b\cdot x+c$ er en parallelforskydning af grafen for det simple andengradspolynomium $f(x)=a\cdot x^2$ (se appendiks A). Derfor gælder symmetrien om en lodret akse igennem toppunktet også for dem.





3. Toppunktsformel for parabel

Et vigtigt punkt på en parabel er dens *toppunkt*. Det er her, at det tilhørende andengradspolynomium har et maksimum (hvis $a<0$) eller et minimum (hvis $a>0$). Ikke alene er toppunktet vigtigt i anvendelser, som vi snart skal se. Har man bestemt toppunktet, kan man også forholdsvist hurtigt skitsere parablen ud fra værdien af a.

Sætning 3 (Parablens toppunkt)

Lad $f(x) = ax^2 + bx + c$ og lad størrelsen $d = b^2 - 4ac$ betegne polynomiets såkaldte *diskriminant*. Da er toppunktets koordinater givet ved

(2) $$(x_T, y_T) = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{d}{4a}\right)$$

Bevis: I Appendiks B er der givet et bevis for sætningen, men det kræver brug af differentialregning, som måske ikke er gennemgået på dette tidspunkt. I appendiks A er der givet et alternativt bevis, som ikke kræver differentialregning, men dog er mere abstrakt. Det involverer parallelforskydning af grafer.

□

Eksempel 4

Betragt polynomiet $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{5}{2}$ fra forrige side. Vi aflæser her straks koefficienterne $a = \frac{1}{2}$, $b = -1$ og $c = \frac{5}{2}$. Vi udregner diskriminanten:

$$d = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{5}{2} = 1 - 5 = -4$$

Ved indsættelse i formel (2) får vi parablens toppunkt:

$$(x_T, y_T) = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{d}{4a}\right) = \left(-\frac{-1}{2 \cdot \frac{1}{2}}, -\frac{-4}{4 \cdot \frac{1}{2}}\right) = (1, 2)$$

Det stemmer med den øverste røde parabel vist på den højre delfigur på forrige side.

□

4. Andengradsligninger

En andengradsligning er en ligning på formen $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$. For et givet sæt koefficienter ønskes altså de x-værdier, som tilfredsstiller ligningen. Løsningerne betegnes i øvrigt også *rødderne* til andengradspolynomiet $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Sætning 5 (Andengradsligninger)

Andengradsligningen $ax^2 + bx + c = 0$, hvor $a \neq 0$ og diskriminanten $d = b^2 - 4ac$, har følgende løsninger:

Hvis $d < 0$: Der er ingen løsninger.

Hvis $d = 0$: Der er netop én løsning: $x = -\dfrac{b}{2a}$

Hvis $d > 0$: Der er to løsninger: $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{d}}{2a}$

Bevis: Først ganger vi med $4a$ på begge sider af lighedstegnet og bruger potensregler:

$$ax^2+bx+c=0$$
$$\Updownarrow$$
$$4a\cdot(ax^2+bx+c)=4a\cdot 0$$
$$\Updownarrow$$
$$4a^2x^2+4abx+4ac=0$$

Derefter lægger vi lidt bagklogt udtrykket b^2-4ac til på begge sider af lighedstegnet og bruger til sidst potensregel (P4):

$$4a^2x^2+4abx+4ac+b^2-4ac=0+b^2-4ac$$
$$\Updownarrow$$
$$4a^2x^2+4abx+b^2=b^2-4ac$$
$$\Updownarrow$$
$$(2ax)^2+4abx+b^2=b^2-4ac$$

Potensregler	
(P1)	$a^n\cdot a^m=a^{n+m}$
(P2)	$\dfrac{a^n}{a^m}=a^{n-m}$
(P3)	$(a^n)^m=a^{n\cdot m}$
(P4)	$(a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n$
(P5)	$\left(\dfrac{a}{b}\right)^n=\dfrac{a^n}{b^n}$
Kvadratsætninger	
(K1)	$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$
(K2)	$(a-b)^2=a^2+b^2-2ab$
(K3)	$(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2$

Nu bruges kvadratsætningen (K1), og det udnyttes, at $d=b^2-4ac$:

$$(2ax+b)^2=b^2-4ac$$
$$\Updownarrow$$
$$(2ax+b)^2=d$$

Den oprindelige andengradsligning er altså ensbetydende med den sidste ligning ovenfor. Fordelen ved den sidste ligning er, at nu står den ubekendte x kun ét sted, godt nok pakket lidt ind. Vi deler op i tre tilfælde alt efter om diskriminanten d er negativ, 0 eller positiv.

$d<0$: Venstresiden, som er "noget" opløftet til 2. potens, vil altid være mindst 0. Da højresiden med antagelsen er negativ, er der ingen løsninger!

$d=0$: ”Noget” opløftet til 2. potens er lig med 0, hvis og kun hvis dette ”noget” selv er lig med 0. Vi har derfor:

$$(2ax+b)^2=0 \quad\Leftrightarrow\quad 2ax+b=0 \quad\Leftrightarrow\quad 2ax=-b \quad\Leftrightarrow\quad x=-\frac{b}{2a}$$

$d>0$: Hvis ”noget” opløftet til 2. potens er lig med et positivt tal, så må dette ”noget” være lig med plus eller minus kvadratroden af dette tal.

$$(2ax+b)^2=d \quad\Leftrightarrow\quad 2ax+b=\pm\sqrt{d} \quad\Leftrightarrow\quad 2ax=-b\pm\sqrt{d} \quad\Leftrightarrow\quad x=\frac{-b\pm\sqrt{d}}{2a}$$

hvor vi har behandlet begge løsninger samtidigt.

Sætningen er hermed bevist. □

Eksempel 6

Betragt andengradsligningen $x^2+2x-8=0$. Koefficienterne er $a=1$, $b=2$ og $c=-8$. Diskriminanten udregnes til $d=b^2-4ac=2^2-4\cdot 1\cdot(-8)=4+32=36$. Vi kan dermed straks sige, at der er tale om to løsninger, og at de er givet ved:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{d}}{2a}=\frac{-2\pm\sqrt{36}}{2\cdot 1}=\frac{-2\pm 6}{2}=\begin{cases}2\\-4\end{cases}$$

Plusset giver altså løsningen 2, mens minusset giver løsningen –4. Altså to løsninger!

□

Eksempel 7

Givet andengradspolynomiet $-x^2+8x-16=0$. I dette tilfælde har vi følgende koefficienter: $a=-1$, $b=8$ og $c=-16$ samt $d=b^2-4ac=8^2-4\cdot(-1)\cdot(-16)=64-64=0$. Da diskriminanten er lig med 0, er der netop én løsning:

$$x=-\frac{b}{2a}=-\frac{8}{2\cdot(-1)}=4$$

Løsningen til andengradsligningen er altså 4.

□

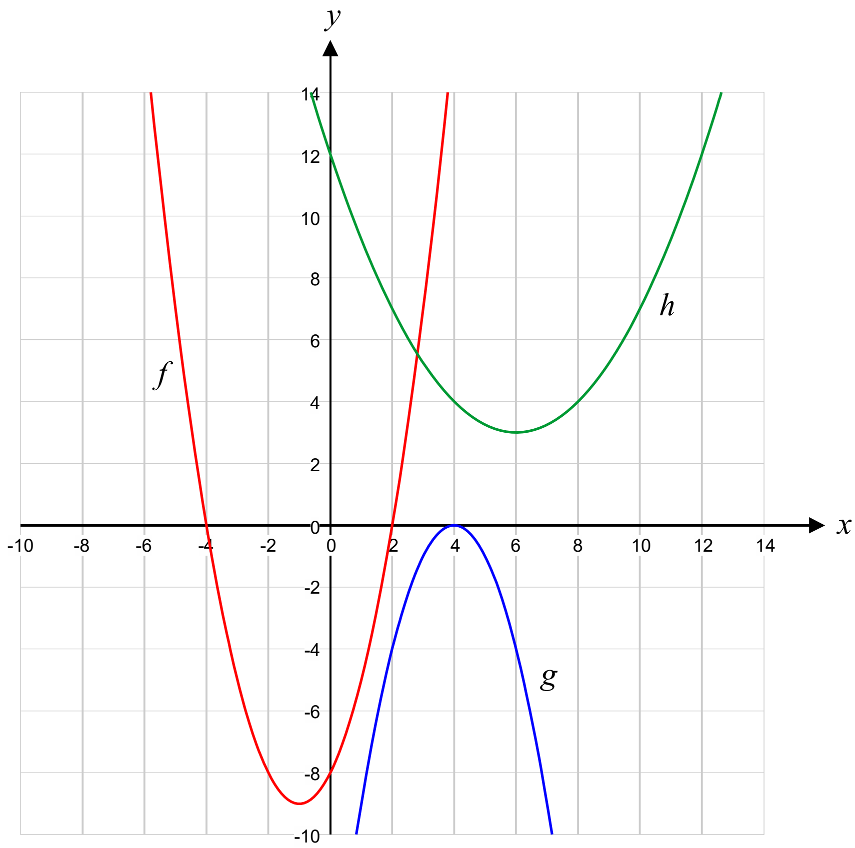
Eksempel 8

Betragt andengradsligningen $\frac{1}{4}x^2-3x+12=0$. Vi har $a=\frac{1}{4}$, $b=-3$ og $c=12$. Diskriminanten er $d=b^2-4ac=(-3)^2-4\cdot\frac{1}{4}\cdot 12=9-12=-3$. Da diskriminanten er negativ, kan vi straks sige, at andengradsligningen ikke har nogen løsninger.

□

Eksempel 9 (Grafisk set)

Lad $f(x)=x^2+2x-8$, $g(x)=-x^2+8x-16$ og $h(x)=\frac{1}{4}x^2-3x+12$. At løse andengradsligningerne fra eksemplerne 6, 7 og 8 svarer da til at bestemme nulpunkterne for hver af disse andengradspolynomier. Rent grafisk svarer det til at bestemme grafernes skæringer med x-aksen. Graferne for de tre andengradspolynomier er afbildet på figuren på næste side. For det første ser vi, at grafen for f skærer x-aksen i –4 og 2, hvilket stemmer med løsningerne i eksempel 6. Grafen for andengradspolynomiet g er en parabel, som netop *tangerer* x-aksen, hvilket stemmer med, at andengradsligningen i eksempel 7 kun har én løsning, her 4. Endelig er der grafen for h, som slet ikke rammer x-aksen, hvilket afspejler det faktum, at andengradsligningen i eksempel 8 ikke har nogen løsninger.



Simplere andengradsligninger

Sætning 5 kan benyttes til at løse *alle* typer andengradsligninger, men der er nogle tilfælde, hvor en andengradsligning kan løses på mere enkel vis.

Eksempel 10 (Hvis $b = 0$)

I tilfældet med $b = 0$ kan vi omskrive til en ligning på formen $x^2 = k$, der som bekendt har to løsninger, nemlig $x = \pm\sqrt{k}$. Et eksempel er:

$$2x^2 - 8 = 0 \quad\Leftrightarrow\quad 2x^2 = 8 \quad\Leftrightarrow\quad x^2 = 4 \quad\Leftrightarrow\quad x = \pm 2$$

□

Eksempel 11 (Hvis $c = 0$)

I det tilfælde kan vi sætte x uden for parentes og bruge den såkaldte *nulreglen*. Nulreglen siger, at hvis et produkt af to tal er 0, så er det ensbetydende med, at mindst det ene af de to tal er 0. Betragt for eksempel andengradsligningen $3x^2 - 6x = 0$. Vi har:

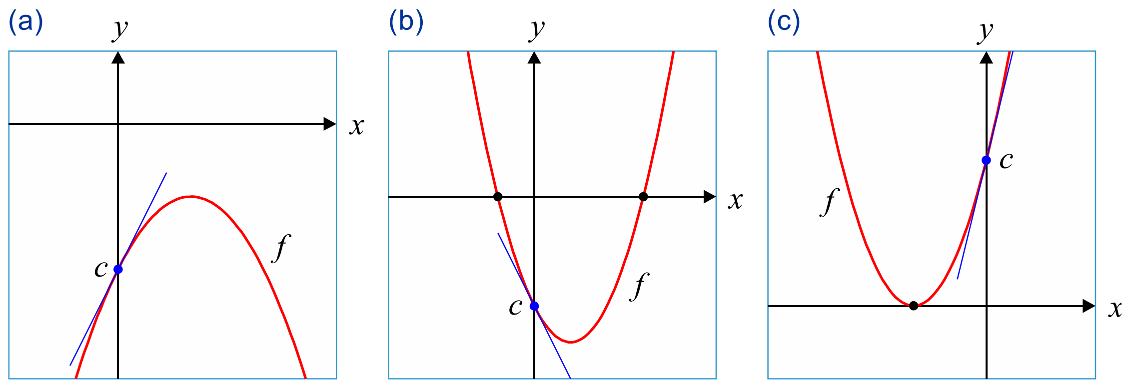
$$3x^2 - 6x = 0 \quad\Leftrightarrow\quad 3x\cdot(x-2) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad 3x = 0 \;\vee\; x-2 = 0 \quad\Leftrightarrow\quad x = 0 \;\vee\; x = 2$$

Altså er løsningerne 0 og 2.

□

5. Fortegn for *a*, *b*, *c* og *d*

Vi vil nu undersøge, hvad grafen fortæller om fortegnene på koefficienterne *a*, *b* og *c* for det tilhørende andengradspolynomium $f(x) = ax^2 + bx + c$ samt om fortegnet på diskriminanten *d*.



Ifølge sætning 2a) fås *c* som grafens skæring med *y*-aksen. Ifølge sætning 2c) er *b* hældningen af tangenten til grafen for andengradspolynomiet i $(0, c)$. Den pågældende tangent er vist med et blåt linjestykke. Eventuelle løsninger til $ax^2 + bx + c = 0$ ved vi også svarer til grafens skæringer med *x*-aksen samt at antallet af løsninger afgøres af diskriminanten *d*. $d > 0$ er ensbetydende med 2 løsninger, $d = 0$ er ensbetydende med 1 løsning, og $d < 0$ er ensbetydende med ingen løsninger. Med disse ting for øje, kan vi behandle hver af de tre tilfælde på figuren ovenfor:

Grafen (a): Vi ser straks, at $a < 0$, eftersom parablen vender grenene nedad. Da grafen skærer *y*-aksen på den negative del af *y*-aksen, har vi $c < 0$. Da den blå tangent har positiv hældning, er $b > 0$. Da grafen ikke skærer *x*-aksen, må vi have $d < 0$.

Grafen (b): Vi ser at $a > 0$, da parablen vender grenene opad. Da grafen skærer *y*-aksen på den negative del af *y*-aksen, har vi $c < 0$. Da den blå tangent har negativ hældning, er $b < 0$. Da grafen skærer *x*-aksen to steder, er der to løsninger til andengradsligningen, så $d > 0$.

Grafen (c): Vi ser at $a > 0$, da parablen vender grenene opad. Da grafen skærer *y*-aksen på den positive del af aksen, har vi $c > 0$. Da den blå tangent har positiv hældning, er $b > 0$. Da grafen tangerer *x*-aksen i ét punkt, har andengradsligningen netop én løsning, så $d = 0$.

Bemærkning 12

En alternativ måde at afgøre, hvilket fortegn *b* og *d* har, er at udnytte formlen for toppunktet for et andengradspolynomium, dvs. (2) i sætning 3. Man observerer fortegnene for koordinaterne x_T og y_T til toppunktet. Ud fra disse og viden om fortegnet for *a*, kan fortegnene for *b og d* findes.

6. Faktorisering af et andengradspolynomium

I dette afsnit skal vi se, at hvis et andengradspolynomium har mindst én reel rod, så kan det *faktoriseres* til et produkt af to førstegradspolynomier.

Sætning 13 (Faktorisering af 2. gradspolynomium)

Givet et andengradspolynomium $f(x) = ax^2 + bx + c$. Hvis diskriminanten $d \geq 0$ kan polynomiet faktoriseres på følgende måde:

(3) $$f(x) \;=\; ax^2 + bx + c \;=\; a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$$

hvor x_1 og x_2 er rødderne i andengradspolynomiet. Hvis $d = 0$ og der dermed kun er én rod, så bruges denne rod (også kaldet en *dobbeltrod*) som både x_1 og x_2.

Bevis: Overladt til læseren i opgave 21 med lidt hjælp til.

□

Eksempel 14

Sætning 13 er rigtig nyttig. Den kan undertiden bruges til at reducere tilsyneladende komplicerede brøker. Tag for eksempel brøken

$$\frac{2x^2 + 7x - 4}{x + 4} \quad \text{for} \quad x \neq -4$$

Det overlades til læseren at vise, at rødderne i tælleren $2x^2 + 7x - 4$ er $\frac{1}{2}$ og –4. Ifølge (3) kan vi da foretage en omskrivning af tælleren, hvorefter reduceringer giver følgende:

$$\frac{2x^2 + 7x - 4}{x + 4} \;=\; \frac{2 \cdot (x - \frac{1}{2}) \cdot (x - (-4))}{x + 4} \;=\; \frac{2 \cdot (x - \frac{1}{2}) \cdot (x + 4)}{x + 4} \;=\; 2 \cdot (x - \tfrac{1}{2}) \;=\; 2x - 1$$

Vi får med andre ord et meget simplere udtryk, fordi faktoren $x + 4$ forkorter væk.

□

Bemærkning 15 (Lærerens metode)

Ifølge *nulreglen* er det indlysende, at udsagnet i sætning 13 også virker den modsatte vej: Et polynomium på formen $f(x) = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$, hvor x_1 og x_2 er reelle tal, vil nødvendigvis have rødderne x_1 og x_2. Denne kendsgerning bruger matematiklærere ofte til at konstruere andengradsligninger med bestemte rødder til deres elever. For eksempel vil følgende polynomium have rødderne $\frac{2}{3}$ og –2:

$$\begin{aligned} f(x) \;&=\; a \cdot (x - x_1)(x - x_2) \;=\; 3 \cdot (x - \tfrac{2}{3})(x - (-2)) \;=\; 3 \cdot (x - \tfrac{2}{3})(x + 2) \\ &=\; (3x - 2)(x + 2) \;=\; 3x^2 + 6x - 2x - 4 \;=\; 3x^2 + 4x - 4 \end{aligned}$$

□

7. Polynomier af højere grad

Polynomier har været studeret intenst i matematikken igennem tiderne. Det generelle polynomium af grad n er defineret således:

Definition 16 (Polynomium af n'te grad)

En funktion på formen: $p(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ \ldots + a_1 \cdot x + a_0$, hvor *koefficienterne* $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ er konstanter og hvor $a_n \neq 0$, kaldes for et polynomium af grad n.

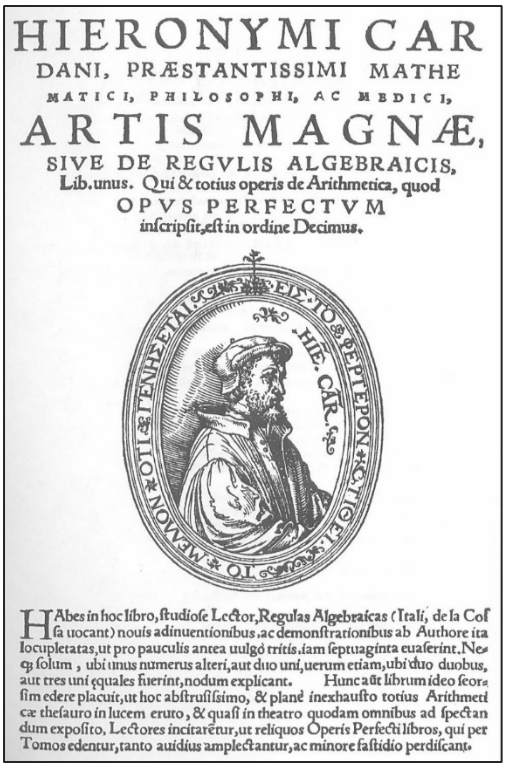
I begyndelsen af 1900-tallet lykkedes det endeligt at levere et stringent bevis for *Algebraens fundamentalsætning*. Denne berømte sætning siger, at ethvert polynomium af grad n (endda med komplekse koefficienter) har netop n rødder – når roddernes multiplicitet tælles med. Rødderne kan eventuelt være komplekse tal. Vi arbejder imidlertid kun med reelle tal i denne note, så algebraens fundamentalsætning fortæller os, at et polynomium af grad n med reelle koefficienter *højst* har n reelle rødder. Et eksempel er følgende tredjegradspolynomium:

(4) $$p(x) \ = \ 2x^3 - 3x^2 - 5x + 6$$

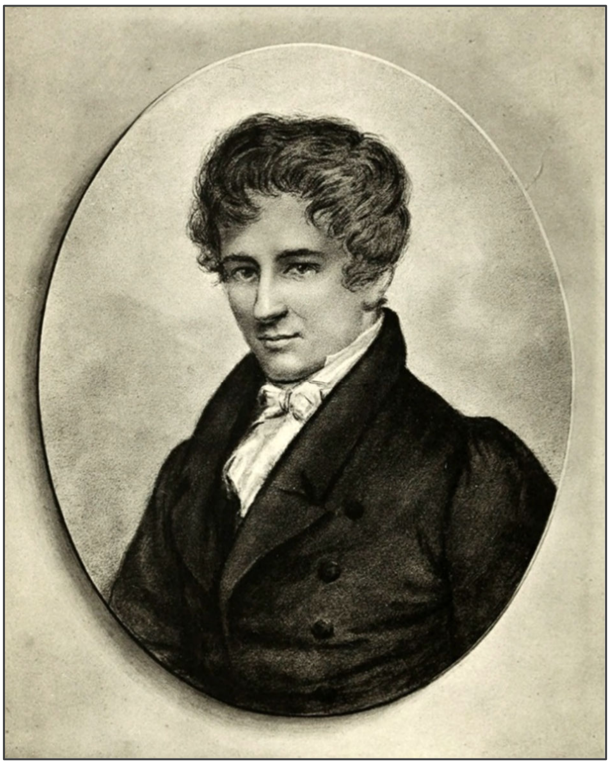
eller følgende fjerdegradspolynomium:

(5) $$p(x) \ = \ x^4 - 10x^3 + 28x^2 - 70x + 147$$

Men hvordan bestemmer man de eventuelle rødder? Ja, vi kan selvfølgelig løse det med vores CAS-værktøj, men dette værktøj bygger netop på vore forfædres opdagelser. Vi har allerede set på formler til bestemmelse af rødder for andengradspolynomier, men hvad med polynomier af 3. grad og 4. grad? En formel til løsning af en generel 3. gradsligning blev i 1545 publiceret af italieneren *Gerolamo Cardano* (1501-1576) i hans matematiske værk *Ars Magna*. Den var resultatet af bidrag fra flere italienske matematikere. Forsiden af Cardanos værk ses på næste side. Det lykkedes endvidere for Cardanos egen elev *Lodovico Ferrari* (1522-1565) at finde en formel til bestemmelse af løsningerne til en fjerdegradsligning. I meget lang tid derefter søgte man efter formler til bestemmelse af rødderne i polynomier af 5. grad og højere grad. Det skulle vise sig at være en umulig opgave … Først troede det unge norske matematikgeni *Niels Henrik Abel* (1802-1829), at han havde fundet en formel til løsning af femtegradsligningen. Ved nærmere eftersyn opdagede han dog, at det ikke var tilfældet. I det følgende lykkedes det Abel med abstrakt matematik at bevise, at en sådan formel slet *ikke findes*. Hans opdagelse vakte stor forundring i matematikverdenen. Abels bevis, som også er gældende for ligninger af højere grad end 5, blev publiceret i det matematiske tidsskrift *Journal für die reine und Angewandte Mathematik* i året 1826. Formlerne for tredje- og fjerdegradsligningerne er for komplicerede til at blive omtalt nærmere her. Cardanos formel til løsning af tredjegradsligningen er fx beskrevet side 80-83 i bogen *Cirklens kvadratur, Vinklens tredeling, Terningens fordobling. Fra oldtidens geometri til moderne algebra* af Jesper Lûtzen, Systime, 1985. At der slet ikke findes en formel, som kan give løsningerne til en generel femtegradsligning ud fra viden om koefficienterne i ligningen, betyder *ikke*, at løsningerne ikke findes. Algebraens fundamentalsætning siger jo netop, at de findes. Der findes blot ikke nogen formel, der kan udtrykke dem *eksakt* – med de krav man har til en sådan formel. Derimod er der altid mulighed for at bestemme løsningerne *numerisk*, dvs. tilnærmet med kommatal. For matematikere er der dog stor forskel på eksakte løsninger og tilnærmede løsninger.



Ars Magna (forside) udgivet af
Gerolamo Cardano (1501-1576)



Niels Henrik Abel (1802-1829).
Maler: Johan Görbitz.

Sætning 17

Et polynomium af *ulige* grad har altid mindst én reel rod.

Bevis: Dette indses nemt ud fra vor viden om, at alle polynomier er defineret for alle reelle tal og er kontinuerte: Da $p(x) \to \infty$ for $x \to \infty$ og $p(x) \to -\infty$ for $x \to -\infty$, må grafen for polynomiet krydse x-aksen mindst et sted. Dette sted er en reel rod i polynomiet.

$\square$

8. Polynomiel regression

Vi ved allerede, at igennem to punkter med forskellige x-koordinater går grafen for netop én lineær funktion (eller konstant funktion). På samme måde går der gennem tre punkter med forskellige x-koordinater grafen for netop et polynomium af grad højst 2. Det resultat kan generaliseres:

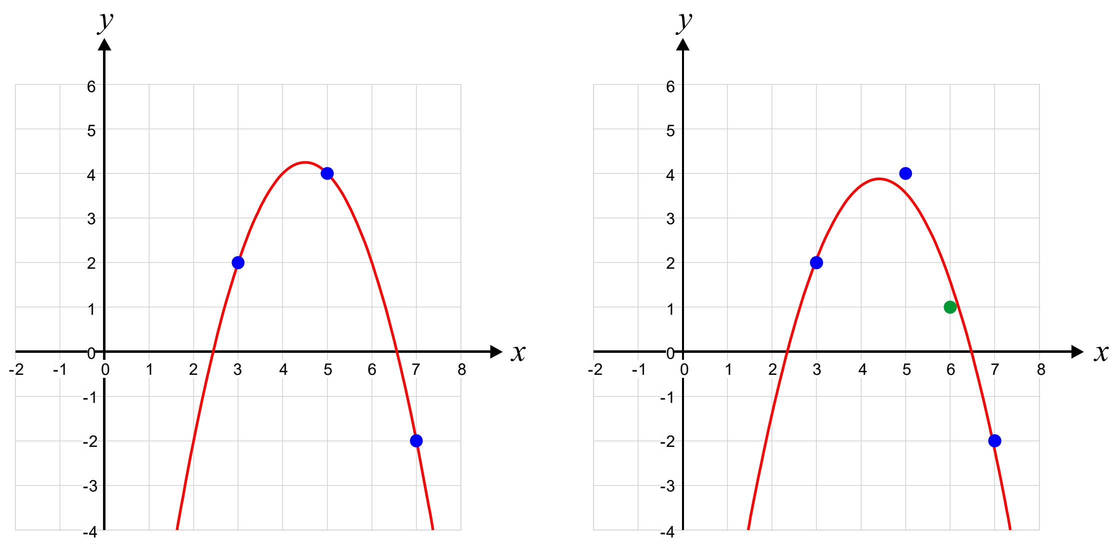
Sætning 18

Givet $n+1$ punkter med forskellige x-koordinater i planen. Der findes ét og kun et polynomium af grad højst n, hvis graf går igennem punkterne.

Vi skal ikke bevise denne sætning, blot med et eksempel for tilfældet $n=2$ antyde den problematik, man kommer ud i, hvis man forsøger at løse opgaven manuelt. Lad der være givet de tre punkter $(3,2)$, $(5,4)$ og $(7,-2)$. Hvis man ønsker at bestemme det polynomium $f(x)=ax^2+bx+c$ af grad højst 2, hvis graf går igennem disse tre punkter, så må man have følgende opfyldt: $f(3)=2$, $f(5)=4$ og $f(7)=-2$. Det giver anledning til følgende ligningssystem, som er tre ligninger med tre ubekendte.

$$\begin{cases} a\cdot 3^2 + b\cdot 3 + c = 2 \\ a\cdot 5^2 + b\cdot 5 + c = 4 \\ a\cdot 7^2 + b\cdot 7 + c = -2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 9a + 3b + c = 2 \\ 25a + 5b + c = 4 \\ 49a + 7b + c = -2 \end{cases}$$

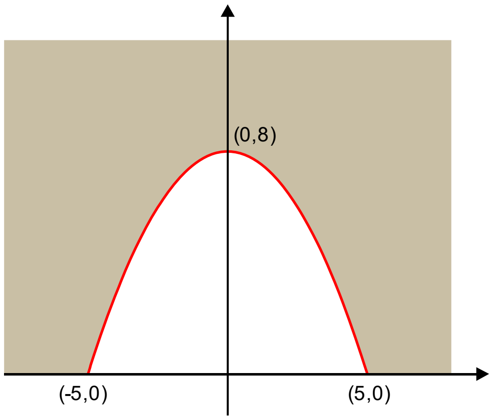
Løser man det, får man $a=-1$, $b=9$ og $c=-16$. Dermed er $f(x)=-x^2+9x-16$ det ønskede andengradspolynomium. Grafen er afbildet til venstre på figuren herunder.



Tilføjer man et ekstra punkt kan man normalt ikke forvente, at der eksisterer et andengradspolynomium, hvis graf går igennem alle fire punkter. Alligevel kan man godt foretage et *fit* med et andengradspolynomium for at få det andengradspolynomium, som bedst muligt tilnærmer punkterne. Regressionspolynomiet er bestemt ved *mindste kvadraters* *metode*, dvs. polynomiet er bestemt således, at det gør kvadratsummen af residualerne mindst mulig. På højre del af figuren på forrige side er tilføjet punktet $(6,1)$. Ved at udføre *polynomiel regression* med et polynomium af grad 2 med det CAS-værktøj, man har til rådighed, får man andengradspolynomiet $f(x) = -0{,}90909x^2 + 8{,}0182x - 13{,}800$.

Eksempel 19 (Parabelformet tunnel)

Tværsnittet af en tunnel igennem et bjerg har på indersiden form som en parabel med bredden 10 meter og højden 8 meter. Sat ind i et koordinatsystem som nedenfor har vi tre punkter på parablen: $(-5,0), (5,0)$ og $(0,8)$. Vi ønsker at bestemme de tre koefficienter a, b og c i det tilhørende andengradspolynomium. Vi vil både vise, hvordan det kan gøres manuelt og ved brug af CAS-værktøj.



Manuelt: Symmetrien gør, at vi ikke behøver opskrive tre ligninger med tre ubekendte. Der er flere andre måder at gøre det på. En er ved at indse, at polynomiet må have toppunkt på y-aksen, så b-leddet er 0. En anden elegant måde er ved at benytte faktorisering fra afsnit 6. Da rødderne i polynomiet er -5 og 5, må polynomiet ifølge sætning 13 have formen:

$$\begin{aligned} f(x) &= a\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2) = a\cdot(x-(-5))\cdot(x-5) = a\cdot(x+5)\cdot(x-5) \\ &= a\cdot(x^2-5^2) = a\cdot(x^2-25) \end{aligned}$$

Toppunktet $(0,8)$ bruges til at bestemme a:

$$f(0)=8 \quad\Leftrightarrow\quad a\cdot(0^2-25)=8 \quad\Leftrightarrow\quad 25a=8 \quad\Leftrightarrow\quad a=\frac{8}{25}=\frac{32}{100}=0{,}32$$

Altså haves $f(x) = \frac{8}{25}\cdot(x^2-25) = \frac{8}{25}x^2 - 8 = 0{,}32x^2 - 8$.

Via CAS: Antag at værktøjet/kommandoen til at udføre polynomiel regression i CAS-værktøjet hedder *PolyReg*. Først defineres listen $[-5,0,5]$ af x-værdier og listen $[0,8,0]$ af y-værdier, og de to lister gives navnene henholdsvis X og Y. Derefter vil $PolyReg(X,Y,2)$ give det ønskede regressionspolynomium af grad 2. Svaret er igen $y = 0{,}32x^2 - 8$.

□

Undertiden har man data i form af en række enkeltpunkter men ønsker at tilnærme datapunkterne med grafen for en funktion, som kan gøre det nemmere at besvare spørgsmål såsom væksthastighed (jf. differentialregning) eller give prognoser. Er der tale om data, som man ikke på forhånd kan sige bør følge en bestemt teoretisk funktion (fx hverken lineær, eksponentiel, ...), så kan det være en god idé at forsøge sig med et polynomiumsfit med et polynomium af ikke for stor grad, fx 3 eller 4. Vi ser på et eksempel.

Eksempel 20 (Vægtudvikling af nyfødte drengebørn)

I det aktuelle tilfælde har vi data for vægtudviklingen for nyfødte drengebørn. Der er tale om (indirekte) data fra WHO. For hver måned er angivet medianvægten af drengebørnene i løbet af drengenes første to leveår.

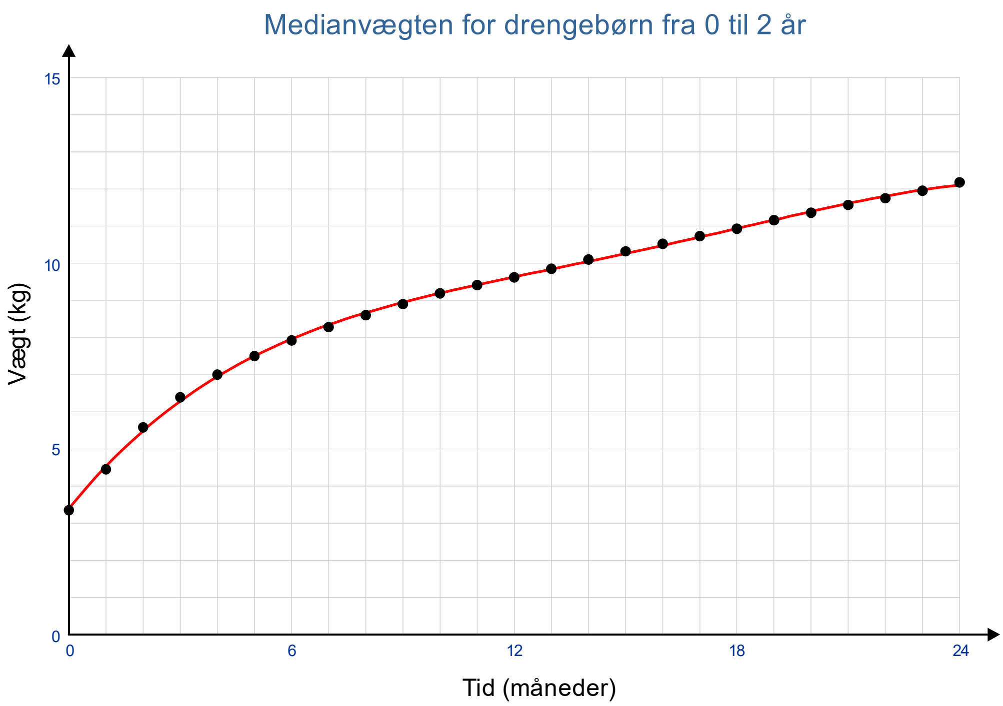
Tid (mdr.)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Vægt (kg)	3,35	4,45	5,58	6,39	7,00	7,50	7,92	8,28	8,60	8,90	9,19	9,41	9,62

Tid (mdr.)	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	
Vægt (kg)	9,85	10,10	10,32	10,52	10,73	10,93	11,16	11,36	11,57	11,75	11,95	12,18	

Vi vil foretage et fit af data med et polynomium. Man kan prøve sig frem i forhold til graden af polynomiet. Vælg en så lav grad som muligt samtidigt med, at data bliver tilnærmet pænt. Efter en undersøgelse blev $n = 4$ valgt. Polynomiel regression med et CAS-værktøj giver i dette tilfælde følgende polynomium:

$$f(t) \;=\; -0{,}000073629 \cdot t^4 + 0{,}0046006 \cdot t^3 - 0{,}10449 \cdot t^2 + 1{,}2387 \cdot t + 3{,}3904$$

Grafen for regressionspolynomiet med datapunkter ser således ud:



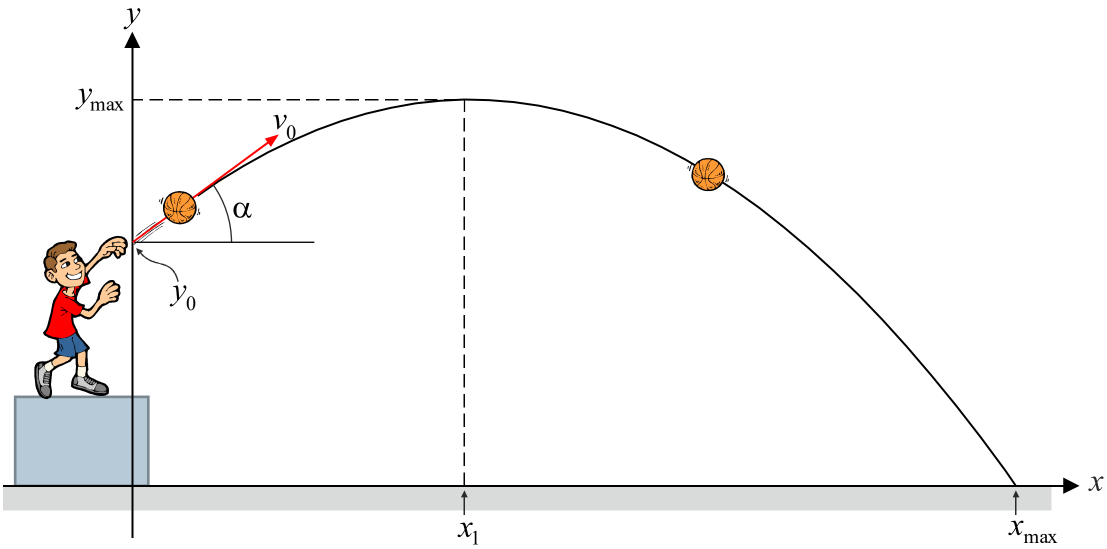
Det ville som nævnt være oplagt at bruge regressionspolynomiet til at bestemme væksthastigheder til forskellige tidspunkter. Det må vi dog vente med indtil vi har differentialregningen til rådighed. Man kan også bruge polynomiet til at bestemme værdier for medianvægten til tidspunkter, som ligger *imellem* to datapunkters tidskoordinater (*interpolation*), mens man skal være forsigtig med at bruge polynomiet for tidspunkter udenfor "datapunkternes tidsinterval" (*ekstrapolation*), da polynomiegrafer kan "svinge" meget.

9. Anvendelser af andengradspolynomier

Polynomier har altid spillet en stor rolle i matematikken. Andengradsligninger blev løst helt tilbage til de første civilisationer: *Babylonerne*. Her har man gennem kileskrifter på lertavler vidnesbyrd om, at andengradsproblemer blev løst tidligere end 1600 år f.Kr. Grafen for et andengradspolynomium er som bekendt en *parabel*. Den fremkommer også som et af flere såkaldte *keglesnit*, som allerede blev studeret af de gamle grækere, særlig af *Apollonius af Perga* (262 f.Kr.–190f.Kr.). Derudover dukker andengradspolynomier op i et utal af uventede sammenhænge. Et eksempel er i *det gyldne snit* (se opgave 34). Det er med andre ord vigtigt at kende til andengradspolynomier. Vi skal kigge på forskellige anvendelser.

Eksempel 21 (Kasteparabel)

Et af de mest berømte eksempler er *kasteparablen*. Når der foretages et *skråt* kast med en bold, og der kan ses bort fra luftmodstand, viser det sig, at bolden gennemløber en bane, som er en del af en parabel. På figuren nedenfor er der lagt et koordinatsystem ind, så x-aksen er vandret, og bolden forlader personens hånd i punktet $(0, y_0)$. Til dette tidspunkt har bolden en fart på v_0, og boldens retning er angivet ved vinklen α i forhold til vandret.



Man kan vise, at boldens bane er graf for polynomiet givet ved følgende forskrift:

(6) $$p(x) = \left(-\frac{g}{2v_0^2 \cdot (\cos(\alpha))^2}\right) \cdot x^2 + \tan(\alpha) \cdot x + y_0$$

hvor g er tyngdeaccelerationen $9{,}82\,\mathrm{m/s^2}$. I det følgende antager vi, at en bold sendes afsted med farten 14 m/s i en vinkel (*elevation*) på 38°, og at bolden forlader hånden i en højde af 1,90 m over jorden. Det overlades til læseren at vise, at (6) giver anledning til følgende andengradspolynomium:

(7) $$p(x) = -0{,}04034234438 \cdot x^2 + 0{,}7812856266 \cdot x + 1{,}90$$

Følgende spørgsmål er interessante i den henseende:

a) Hvor højt når bolden op over jordoverfladen, og hvor langt fra kasteren opnås denne maksimale højde – underforstået i vandret retning?
b) Bestem kastelængden, dvs. den vandrette afstand fra kasteren til nedslagspunktet.

Løsning:

a)
Vi vil benytte toppunktsformlen (2) i sætning 3. Først bestemmes diskriminanten:

$$d \;=\; b^2 - 4\cdot a\cdot c \;=\; 0{,}7812856266^2 - 4\cdot(-0{,}04034234438)\cdot 1{,}90 \;=\; 0{,}9170090476$$

Toppunktet kan dernæst bestemmes:

$$(8) \qquad (x_0, y_0) \;=\; \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{d}{4a}\right) \;=\; \left(-\frac{0{,}7812856266}{2\cdot(-0{,}04034234438)}, -\frac{0{,}9170090476}{4\cdot(-0{,}04034234438)}\right)$$
$$= (9{,}683195639 ; 5{,}682670788)$$

Boldens maksimale højde er altså 5,68 m, og den opnås i afstanden 9,68 m fra kasteren.

b)
Nedslagspunktet kan karakteriseres ved, at $y = 0$ eller $p(x) = 0$. Derfor skal vi løse andengradsligningen $-0{,}04034234438\cdot x^2 + 0{,}7812856266\cdot x + 1{,}90 = 0$. Hertil benytter vi formlen i sætning 5. For det første ser vi, at der er to løsninger, da $d > 0$.

$$(9) \qquad x \;=\; \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2a} \;=\; \frac{-0{,}7812856266 \pm \sqrt{0{,}9170090476}}{2\cdot(-0{,}04034234438)} \;=\; \begin{cases} 21{,}55169148 \\ -2{,}185300207 \end{cases}$$

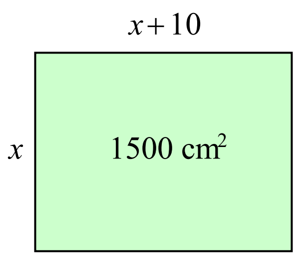
Den negative løsning er en "kunstig" løsning, som fremkommer, hvis man forlænger boldens parabelbane bagud til skæring med *x*-aksen. Det er ikke ualmindeligt, at man ved anvendelser af andengradsligninger får kunstige løsninger. Man skal blot argumentere og kassere dem. Svaret på delspørgsmålet er altså at kastelængden er 21,55 m.

NB! Formlen (6) involver slet ikke tiden *t*. Derfor er det ikke muligt at stille spørgsmål, som angår tiden. Vi må vente til 3g for at se parabelbevægelsen beskrevet ved en såkaldt *vektorfunktion*, hvori tiden er den ubekendte!

□

Eksempel 22

Det oplyses, at længden af en rektangulær plakat er 10 cm større end dens bredde. Endvidere er plakatens areal lig med 1500 cm^2. Bestem plakatens sidelængder.



Løsning: Vi sætter bredden af plakaten til *x*. Dermed er dens længde $x + 10$. Idet vi underforstår enheden cm, kan vi opstille følgende ligning:

$$(10) \qquad x\cdot(x+10) = 1500 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + 10x = 1500 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + 10x - 1500 = 0$$

En andengradsligning med disse koefficienter: $a = 1, b = 10$ og $c = -1500$. Diskriminanten fås til: $d = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 10^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1500) = 6100$. Sætning 6 giver:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2a} = \frac{-10 \pm \sqrt{6100}}{2 \cdot 1} = \begin{cases} 34{,}05124838 \\ -44{,}05124838 \end{cases} \tag{11}$$

Den negative løsning kasseres. Dermed er plakatens længde 44,05 cm, mens dens bredde er 34,05 cm.

□

Eksempel 23 (Hængebro)

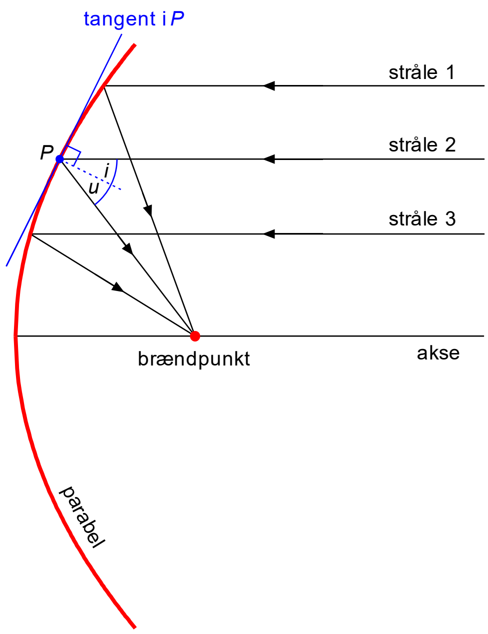
De to midterste bærekabler på en hængebro danner en parabel under idealiserede forudsætninger. Forudsætningen er, at massen af bærekablerne + de lodrette hængekabler kan negligeres i forhold til massen af selve broelementet. Endvidere skal selve vejbanen være vandret og have samme massefordeling overalt. Dette kan med nogen tilnærmelse siges at være tilfældet for vor egen Storebæltsbro.

Storebæltsbroens to midterste bærekabler hænger tilnærmelsesvist i en parabelbue

Eksempel 24 (Radioteleskoper og paraboler)

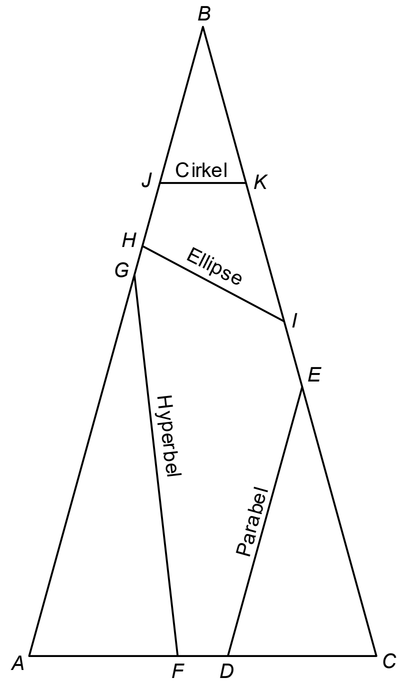
Hvis man roterer en parabel om dens symmetriakse, får man en såkaldt *omdrejningsparaboloide*. Den fremkomne flade viser sig at være overordentlig nyttig. Den udnyttes i *radioteleskoper* til at fokusere og forstærke de meget svage radiosignaler fra rummet. Ud fra samme grundidé benyttes formen i *paraboler* til modtagelse af TV-signaler fra satellitter. Hvis man har et parabolformet spejl, kan man endda bruge det til at stege en bøf i solskinsvejr!

Den egenskab, der gælder for en parabel og som udnyttes i en parabol, er følgende: Stråler, som er parallelle med parablens akse, vil alle blive reflekteret af parablen, så den reflekterede stråle rammer et fælles punkt kaldet *brændpunktet* for parablen. I opgave 35 kan egenskaberne studeres i GeoGebra.



Eksempel 25 (Keglesnit)

Allerede i indledningen til dette afsnit om anvendelser blev det nævnt, at grækeren *Apollonius af Perga* (262 f.Kr.–190f.Kr.) indgående studerede *keglesnit*. Han formulerede og udledte en imponerende række af egenskaber for de fire keglesnit. Keglesnittene, hvoraf parablen er den ene, kan bedst forklares ved at kigge på figuren nedenfor til højre. Det skal forestille den tredimensionelle situation projiceret vinkelret ind i en plan, så keglen bliver til en trekant. Er snittet vinkelret på keglens (lodrette) akse, fås en *cirkel*. Er snittet skråt, så snittet går ud gennem "siden" af keglen, fås en *ellipse*. Er snittet parallelt med en af "siderne" i keglen (DE parallel med AB), fås en *parabel*. Endelig får man *hyperblen* ved at foretage et snit, som *ikke* er parallelt med nogen af "siderne", og så snittet ikke når ud gennem nogen af "siderne". I princippet kan keglen tænkes at være uendelig lang.



Keglesnit kommer i spil i mange sammenhænge. Vi har allerede set eksempler på hvor parabler dukker op. Hvad angår ellipsen, så kan det nævnes, at en planet bevæger sig i en ellipsebane omkring Solen, med Solen i ellipsens ene brændpunkt. Denne geometriske egenskab kan udledes (omend svært) ud fra gravitationsloven, der siger, at de to himmellegemer påvirker hinanden med en kraft, som er proportional med produktet af de to masser og omvendt proportional med kvadratet på afstanden mellem deres centre.

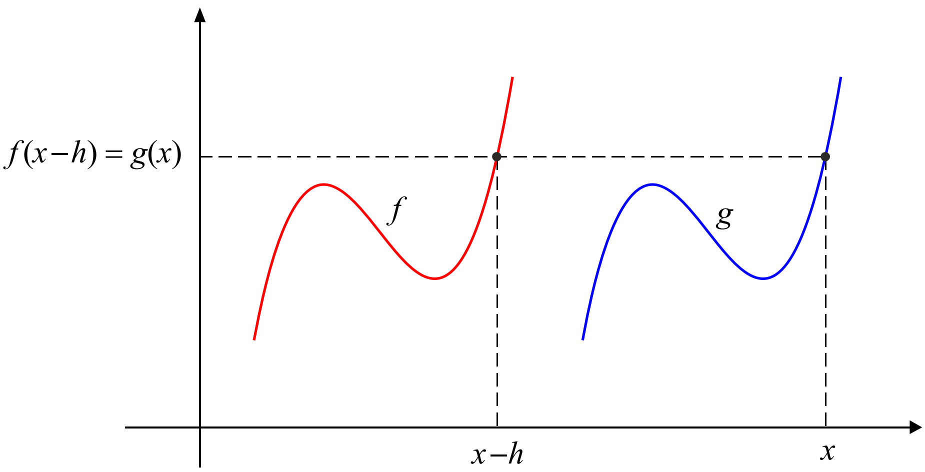
Appendiks A. Parallelforskydning af grafer

I dette appendiks vil vi først bevise en sætning om parallelforskydning af grafen for en generel funktion *f*. Dernæst vil vi bruge resultatet til at vise, at grafen for det generelle andengradspolynomium $g(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ er en parallelforskydning af grafen for det "simple andengradspolynomium" $f(x) = a \cdot x^2$. Det vil samtidigt give os koordinaterne for toppunktet for den parabel, som er graf for *g*. Først det generelle om parallelforskydning af grafer.

Sætning A1

Parallelforskydes grafen for en funktion *f* med *h* i *x*-aksens retning, så fås grafen for funktionen $g(x) = f(x-h)$. Forskriften for *g* fås altså ved at udskifte alle forekomster af *x* med $x-h$.

Bevis: Den blå graf er en parallelforskydning af den røde graf på figuren nedenfor. Spørgsmålet er hvad forskriften er for den funktion, der har den blå kurve som graf. Vi skal fortælle, hvilken værdi *g* skal have i ethvert *x*. Men det er nemt, for vi kan jo bare "hente" *y*-værdien fra den oprindelige graf: *g* skal have samme funktionsværdi i *x*, som *f* har i $x-h$. Det kan udtrykkes ved $g(x) = f(x-h)$.

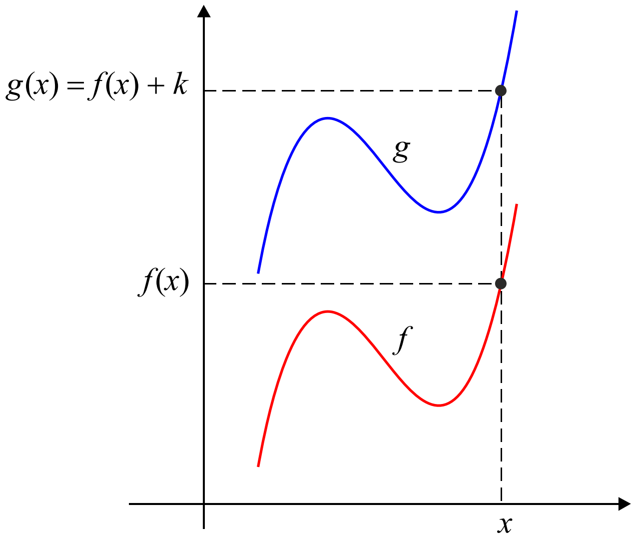


Sætning A2

Parallelforskydes grafen for en funktion *f* med *k* i *y*-aksens retning, så fås grafen for funktionen $g(x) = f(x)+k$. Forskriften for *g* fås altså ved at lægge *k* til i forskriften for *f*.

Bevis: Vi får funktionsværdien for *g* i *x* ved at lægge *k* til funktionsværdien for *f* i det samme punkt. Med andre ord: $g(x) = f(x)+k$.

□



□

Vi kan sammenfatte de to sætninger med parallelforskydning i én:

Sætning A3

Parallelforskydes grafen for f med vektoren (h, k), dvs. med h i x-aksens retning og med k i y-aksens retning, så fås grafen for $g(x) = f(x-h)+k$. Forskriften for g fås altså ved i forskriften for f at udskifte alle forekomster af x med $x-h$ og derefter lægge k til.

Lad os herefter undersøge, hvad der sker, når vi parallelforskyder grafen for et simpelt andengradspolynomium af typen $f(x) = ax^2$. Hvilken forskrift har den nye graf? Vi kigger først på et eksempel, hvorefter vi kigger på det generelt.

Eksempel A4

Givet det simple andengradspolynomium $f(x) = \frac{1}{2}x^2$. Vi ønsker at parallelforskyde grafen for denne funktion med vektoren (1,2), dvs. med 1 i x-aksens retning og med 2 i y-aksens retning. Vi bruger sætning A3 og får, at den nye kurve er graf for funktionen:

$$g(x) \;=\; f(x-1)+2 \;=\; \tfrac{1}{2}(x-1)^2+2 \;=\; \tfrac{1}{2}(x^2-2x+1)+2 \;=\; \tfrac{1}{2}x^2-x+2\tfrac{1}{2}$$

Vi får med andre ord igen et andengradspolynomium, nu med $a = \frac{1}{2}, b = -1$ og $c = 2\frac{1}{2}$.

□

Det store spørgsmål er, om grafen for *ethvert* andengradspolynomium fås som en parallelforskydning af grafen for et simpelt andengradspolynomium. Svaret er bekræftende, som den næste sætning viser.

Sætning A5 (Parablens toppunkt)

Lad $g(x)=ax^2+bx+c$ og størrelsen $d=b^2-4ac$ betegne polynomiets såkaldte *diskriminant*. Grafen for *g* fås da ved at parallelforskyde grafen for det simple andengradspolynomium $f(x)=ax^2$ med vektoren

(A1)
$$(h,k) \;=\; \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{d}{4a}\right)$$

Specielt er koordinaterne til toppunktet for grafen for *g* givet ved (A1).

Bevis: Vi starter med at parallelforskyde grafen for $f(x)=ax^2$ med (h,k), og vi vil så først senere afgøre, hvad *h* og *k* skal sættes lig med, for at få grafen for *g*. Ligesom i eksempel A4 bruger vi sætning A3 og reducerer:

(A2)
$$\begin{aligned} g(x) &= f(x-h)+k \;=\; a(x-h)^2+k \;=\; a(x^2-2hx+h^2)+k \\ &= ax^2-2ahx+ah^2+k \;=\; ax^2+(-2ah)x+(ah^2+k) \end{aligned}$$

Husk at det er *x*, der er den variable, og at *h* og *k* skal betragtes som konstanter. *g* er derfor et andengradspolynomium, hvor koefficienten til 2. gradsleddet er *a*, koefficienten til 1. gradsleddet er $-2ah$ og konstantleddet er ah^2+k. Vi skal nu afstemme koefficienter. For at $ax^2+bx+c=ax^2+(-2ah)x+(ah^2+k)$ for alle *x*, må koefficienterne være ens. Koefficienten til 2. gradsleddet passer allerede. Derudover må vi kræve, at

(A3)
$$-2ah=b \quad \text{og} \quad ah^2+k=c$$

Første ligning giver straks $h=-b/(2a)$. Man isolerer *k* i den anden ligning og indsætter værdien for *h* og reducerer, idet vi bruger potensreglerne (P4) og (P5) side 8:

(A4)
$$\begin{aligned} k &= c-ah^2 \;=\; c-a\cdot\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 \;=\; c-a\cdot\frac{b^2}{4a^2} \;=\; c-\frac{b^2}{4a} \\ &= \frac{4ac}{4a}-\frac{b^2}{4a} \;=\; \frac{4ac-b^2}{4a} \;=\; \frac{-(b^2-4ac)}{4a} \;=\; \frac{-d}{4a} \;=\; -\frac{d}{4a} \end{aligned}$$

hvor vi i 5. lighedstegn har forlænget $c=c/1$ med $4a$ i tæller og nævner. I 8. lighedstegn har vi indført størrelsen $d=b^2-4ac$, kaldet *diskriminanten*. Alt i alt ser vi, at grafen for $g(x)=ax^2+bx+c$ fremkommer ved at parallelforskyde grafen for det simple 2. gradspolynomium $f(x)=ax^2$ med vektoren givet ved (A1). Påstanden om, at (A3) samtidigt altid angiver toppunktet for *g*'s graf (parablen), er herefter en simpel konsekvens af, at toppunktet for grafen for *f* er (0,0). Under parallelforskydningen vil dette toppunkt nemlig flyttes hen i punktet giver ved koordinatsættet (h,k).

□

Vi skal i de følgende to bemærkninger gøre et par vigtige iagttagelser, som er en direkte følge af sætning A5. Den sidste kan endda nemt føre til et bevis for løsningerne til en generel andengradsligning – altså et alternativt bevis for sætning 5.

Bemærkning A6 (Symmetriakse)

Vi ved, at grafen for det simple andengradspolynomium $f(x) = a \cdot x^2$ er symmetrisk omkring y-aksen, for man får klart samme funktionsværdi, hvad enten man sætter x eller $-x$ ind i forskriften. Ifølge sætning A5 har det dermed som konsekvens, at grafen for det generelle andengradspolynomium er symmetrisk omkring den lodrette linje $x = -b/2a$.

□

Bemærkning A7 (Andengradspolynomiet på toppunktsform)

Indsættes udtrykkene for h og k fra sætning A5 i $g(x) = f(x-h) + k$, kan vi se, at et generelt andengradspolynomium kan skrives på følgende måde:

(A5) $$ax^2 + bx + c \;=\; a \cdot \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{d}{4a}$$

Øvelse A1*

Benyt andengradspolynomiet på toppunktsform fra (A5) til at bevise sætning 5 for løsningerne til en generel andengradsligning. Fordelen ved denne form er, at x kun står anført ét sted!

Appendiks B. Bevis for toppunktsformlen

I dette appendiks skal vi se, at toppunktsformlen for en parabel fra afsnit 3 nemt kan bevises ved hjælp af differentialregning.

Sætning 3 (Parablens toppunkt)

Lad $f(x) = ax^2 + bx + c$ og lad størrelsen $d = b^2 - 4ac$ betegne polynomiets *diskriminant*. Da er toppunktets koordinater givet ved

$$(x_T, y_T) = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{d}{4a}\right)$$

Bevis: Udgangspunktet er, at vi ved, at grafen er en parabel. Den har netop ét toppunkt. Punktet er karakteriseret ved, at i dette punkt har grafen *vandret* tangent. Derfor løser vi ligningen $f'(x) = 0$:

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2ax + b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2ax = -b \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{b}{2a}$$

For at bestemme den tilhørende y-koordinat, indsættes denne x-værdi i andengradspolynomiets forskrift:

$$\begin{aligned}
f\left(-\frac{b}{2a}\right) &= a\cdot\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\cdot\left(-\frac{b}{2a}\right) + c \\
&= a\cdot\frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + c \\
&= \frac{b^2}{4a} - \frac{2\cdot b^2}{2\cdot 2a} + \frac{4a\cdot c}{4a} \\
&= \frac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a} \\
&= \frac{-b^2 + 4ac}{4a} \\
&= \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a} \\
&= -\frac{d}{4a}
\end{aligned}$$

I linje 2 har vi benyttet potensreglerne (P4) og (P5) fra side 8. I linje 3 er et a forkortet væk i første brøk, mens de to sidste led fra forrige linje er forlænget med henholdsvis 2 og $4a$. Herefter er der sat på fælles brøkstreg og forkortet… Hermed er sætningen bevist.

□

Opgaver

Opgaver med en stjerne * forventes at være lidt sværere end de øvrige.

2. Andengradspolynomier og deres grafer

Opgave 1

Benyt *GeoGebra* til at få lavet en interaktiv graf for funktionen $f(x)=a\cdot x^2+b\cdot x+c$, hvor du kan variere koefficienterne a, b og c med skydere. Det kan gøres ved i *Inputlinjen* at skrive følgende, efterfulgt af en tryk på **Enter** tasten: `f(x)=a*x^2+b*x+c` (Husk gangetegn efter koefficienterne a, b og c). Derved vil der automatisk blive oprettet en skyder for hver koefficient, a, b og c. Du kan eventuelt ændre det interval, hver skyder løber i. Default er fra –5 til +5.

a) Start med at variere c. Hvilken betydning har værdien af c på parablens beliggenhed? Kan du forklare det teoretisk?
b) Varier nu a. Hvilken betydning har koefficienten a for parablens udseende og hvordan parablen vender?
c) Varier til sidst b. Betydningen af denne koefficient er lidt mere kompliceret, men forsøg at sige et eller andet.
d) Tilføj grafen for funktionen $g(x)=b\cdot x+c$ i samme koordinatsystem ved at indtaste forskriften i inputlinjen i GeoGebra: `g(x)=b*x+c`. Varier derefter b. Hvad observerer du?

Vi vil gøre rede for nogle af de egenskaber i hovedteksten, som du kan observere her.

Opgave 2

Angiv koefficienterne a, b og c for nedenstående andengradspolynomier:

a) $f(x)=2x^2-10x+6$ b) $f(x)=-x^2-5x-10$ c) $f(x)=0.5x^2+14x-8$
d) $f(x)=x^2-1$ e) $f(x)=-5x^2+16x-1$ f) $f(x)=8x^2-8x$
g) $f(x)=-x^2+2x+5$ h) $f(x)=5x^2$

Opgave 3

Afgør for hver af andengradspolynomierne nedenfor følgende: Hvor skærer grafen y-aksen og hvordan vender parablens grene?

a) $f(x)=2x^2+7x+5$ b) $f(x)=-x^2-x+2$ c) $f(x)=x^2+10x$

Opgave 4

Tegn i GeoGebra grafen for andengradspolynomiet $f(x)=\frac{1}{2}x^2-2x+6$ sammen med grafens tangent i $(0,c)$, jf. sætning 2.

3. Toppunktsformel for parabel

Opgave 5

Anvend GeoGebra eller et CAS-værktøj til at tegne graferne for nedenstående andengradspolynomier samt aflæs parablernes toppunkter.

a) $f(x) = x^2 - 2x + 4$ b) $f(x) = x^2 - 8x + 14$ c) $f(x) = -x^2 - 10x - 24$
d) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 4x$

Opgave 6

Benyt formlerne i sætning 3 til at bestemme toppunkterne for parablerne hørende til nedenstående andengradspolynomier.

a) $f(x) = x^2 - 4x + 5$ b) $f(x) = x^2 - 3x + 3$ c) $f(x) = 3x^2 + 4$
d) $f(x) = -2x^2 + 6x$

Opgave 7

Benyt formlerne i sætning 3 til at bestemme toppunkterne for parablerne hørende til andengradspolynomierne nedenfor.

a) $f(x) = x^2 - 8x + 1$ b) $f(x) = 3x^2 + 6x - 10$ c) $f(x) = -2x^2 + 4x - 2$
d) $f(x) = -x^2 + x - 2$ e) $f(x) = x^2 - 4x + 10$ f) $f(x) = 0{,}25x^2 - x + 3{,}5$

Opgave 8*

Grafen for et andengradspolynomium $f(x) = x^2 + bx + c$ har toppunkt i $(4,-6)$. Bestem b og c. *Hjælp*: Udnyt formlerne for toppunktet i sætning 3.

Opgave 9*

Det kan vises (se eventuelt appendiks A), at et andengradspolynomium, hvis graf har toppunkt i punktet (x_T, y_T), kan skrives på formen $f(x) = a \cdot (x - x_T)^2 + y_T$. Anvend formlen til at konstruere et andengradspolynomium, hvis graf har toppunkt i $(-4,1)$. Tegn derefter grafen for det pågældende andengradspolynomium.

Opgave 10

Lad $f(x) = 2x^2 - 4x + c$ være et andengradspolynomium, hvor koefficienten c er ukendt. Det oplyses nu, at grafen går gennem punktet (4,12). Bestem c.

4. Andengradsligninger

Opgave 11

Benyt sætning 5 til at bestemme løsningerne til nedenstående andengradsligninger.

a) $x^2 - x - 2 = 0$ b) $x^2 + 6x + 9 = 0$ c) $2x^2 - 5x - 12 = 0$ d) $-x^2 + 4x - 8 = 0$

e) $x^2 - 7x - 30 = 0$ f) $-x^2 + 8 = 0$ g) $x^2 - x + 3 = 0$ h) $4x^2 - 20x + 25 = 0$

Opgave 12

Benyt sætning 5 til at bestemme løsningerne til nedenstående andengradsligninger.

a) $x^2 + 7 = 0$ b) $3x^2 + 5x - 2 = 0$ c) $4x^2 - 4x + 1 = 0$ d) $x^2 - 3x - 28 = 0$

Opgave 13

Benyt teknikken i eksempel 10 og 11 til at løse nedenstående ”simple” andengradsligninger *uden* brug af formlen i sætning 5.

a) $x^2 = 100$ b) $2x^2 = 18$ c) $x^2 + 6x = 0$ d) $2x^2 - 8x = 0$

e) $4x^2 - 6x = 0$ f) $(x-3)\cdot(x+2) = 0$

Opgave 14

Løs nedenstående ”simple” andengradsligninger. *Hjælp*: Undlad at gange parentesen ud. Hvilke løsninger er der for hele parentesen? Bestem derefter mulighederne for x.

a) $(x-1)^2 = 9$ b) $(10x-5)^2 = 0$ c) $(5x-2)^2 = 1$

Opgave 15

Betragt andengradspolynomiet $f(x) = x^2 - 2x - 1$ og den lineære funktion $g(x) = -x + 5$ og bestem løsningerne til $f(x) = g(x)$ ved at løse en andengradsligning manuelt. *Hjælp*: Sørg for at reducere først, så der i der i ligningen kommer til at stå 0 på højre side. Tegn derefter graferne for de to funktioner i GeoGebra eller et CAS-værktøj. Stemmer dine beregnede løsninger med dem, du kan aflæse grafisk?

Opgave 16*

Løs nedenstående lidt skjulte andengradsligninger. *Hjælp*: Du må først foretage omskrivninger, så du får en almindelig andengradsligning på formen $ax^2 + bx + c = 0$.

a) $2x - \dfrac{3}{x} = 7$ b) $4x^2 + 7x = 2$ c) $x = \dfrac{8}{x+7}$

Opgave 17*

Nedenstående uafhængige opgaver er *parameter*-opgaver, hvor du skal bestemme parameteren, for at noget bestemt er opfyldt. *Hjælp*: Husk, at det er diskriminanten, som afgør, hvor mange løsninger en andengradsligning har, så den skal du bringe på bane …

a) Lad $2x^2 - 2x + c = 0$ være en andengradsligning, hvor c er en parameter. Bestem c således, at andengradsligningen har netop én løsning.
b) Lad $x^2 - 4x + c = 0$ være en andengradsligning, hvor c er en parameter. Hvad skal c opfylde, for at andengradsligningen har netop to løsninger?
c) Lad $2x^2 + bx + 8 = 0$ være en andengradsligning, hvor b er en parameter. Bestem de værdier af b, som betyder, at andengradsligningen har netop én løsning.

Opgave 18*

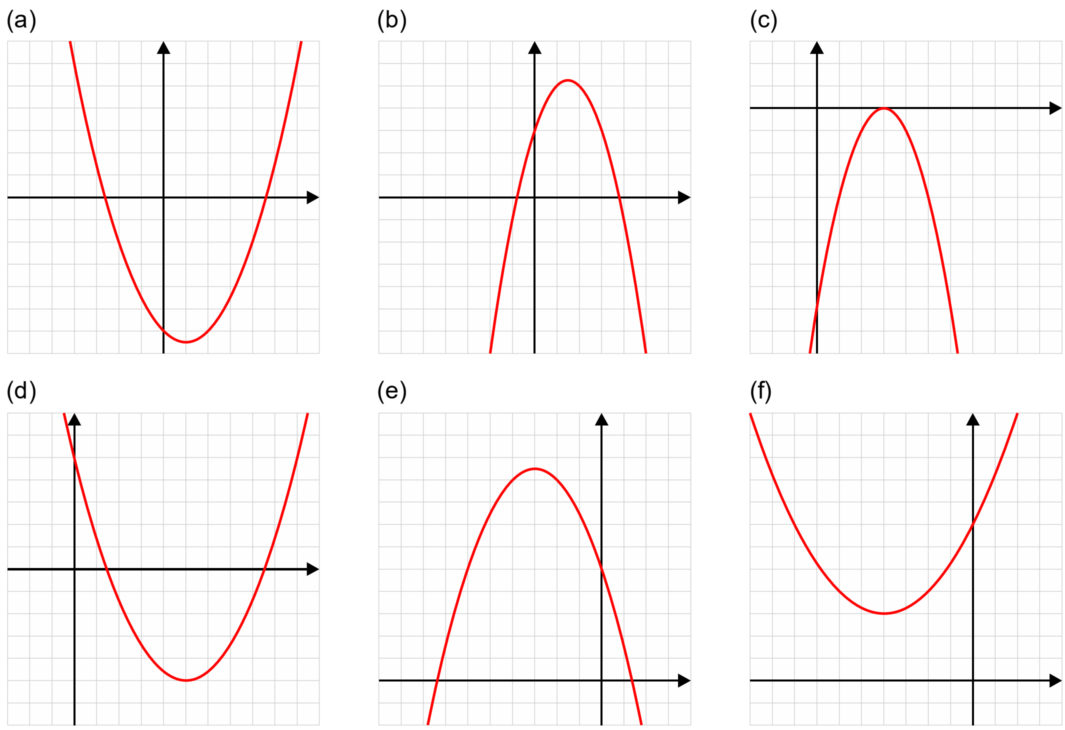
Løs manuelt nedenstående andengradsuligheder. *Hjælp*: Løsningerne er et interval eller en forening af intervaller. Bestem først løsningerne, som om der står et lighedstegn. Overvej derefter, hvordan grafen for andengradspolynomiet på venstre side ligger i forhold til x-aksen … over eller under ...

a) $x^2 - 2x - 3 \geq 0$ b) $x^2 + 2x - 20 < 0$ c) $-x^2 - 3 < 0$

5. Fortegn for a, b, c og d

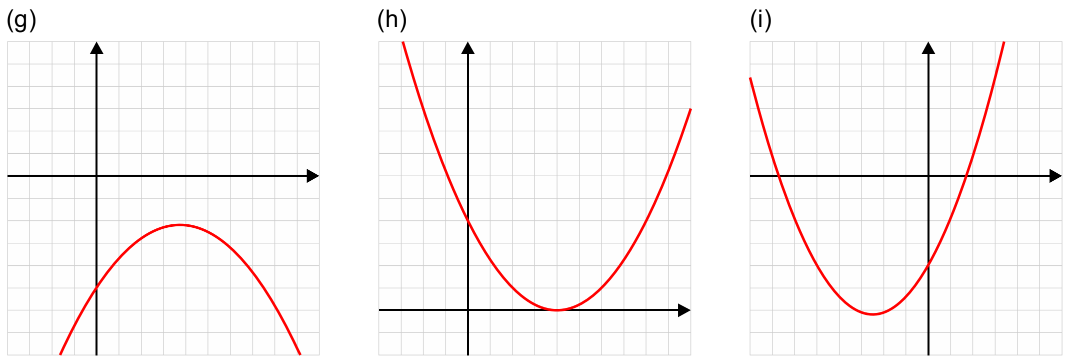
Opgave 19

Bestem fortegnene på koefficienterne a, b og c samt diskriminanten d for de andengradspolynomier, som har graferne vist nedenfor.



Opgave 20

Bestem fortegnene på koefficienterne *a*, *b* og *c* samt diskriminanten *d* for de andengrads-polynomier, som har graferne vist nedenfor.



6. Faktorisering af et andengradspolynomium

Opgave 21* (Bevis for sætning 13)

I denne opgave skal du forsøge at bevise sætningen om faktorisering af andengradspoly-nomier fra sætning 13.

a) Eftervis, at $a\cdot(x-x_1)(x-x_2) \;=\; a\cdot\left(x^2-(x_1+x_2)\cdot x+x_1\cdot x_2\right)$

I det følgende skal du udnytte udtrykkene for rødderne for andengradspolynomiet fra sætning 5 for tilfældet $d>0$:

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{d}}{2a} \quad\wedge\quad x_2=\frac{-b-\sqrt{d}}{2a}$$

Husk at formlerne egentligt også gælder for tilfældet $d=0$. Her vil de to rødder blot give det samme (dobbeltrod).

b) Indsæt udtrykkene for x_1 og x_2 i udtrykket x_1+x_2 og vis, at det reducerer til $-b/a$.

c) Indsæt udtrykkene for x_1 og x_2 i udtrykket $x_1\cdot x_2$ og vis, at det reducerer til c/a.

d) Indsæt endelig de reducerede udtryk for x_1+x_2 og $x_1\cdot x_2$ i højresiden i ligningen fra spørgsmål a) og vis, at det giver ax^2+bx+c, hvorefter sætningen vil være bevist.

Opgave 22

Bestem manuelt rødderne i nedenstående andengradspolynomier og benyt dem til at *faktorisere* andengradspolynomierne, jf. sætning 13.

a) $p(x)=2x^2-11x+15$ b) $p(x)=x^2-6x-7$

c) $p(x)=x^2-6x+9$ d) $p(x)=-2x^2-11x+6$

Opgave 23

Betragt udtrykket $\dfrac{2x^2+9x-5}{2x+10}$, $x \neq -5$.

Benyt teknikken fra eksempel 14 til manuelt at faktorisere tæller og nævner i brøken. Reducer herefter brøken.

Opgave 24

Benyt dit CAS-værktøj til at faktorisere nedenstående andengradspolynomier. Typisk skal du lede efter et værktøj, som kan hedde noget i retningen af *Factor*.

a) $p(x)=x^2+9x-52$ b) $p(x)=3x^2-31x+10$

b) $p(x)=x^2-7x-294$ d) $p(x)=-x^2+10x-25$

Opgave 25

Andengradspolynomierne på venstre side i ligningerne nedenfor er allerede faktoriseret. Benyt *nulreglen* til manuelt at løse ligningerne.

a) $(x-2)\cdot(x+5)=0$ b) $4\cdot(x-1)\cdot(x-1)=0$

b) $(3x-6)\cdot(x-8)=0$ d) $(3x-1)\cdot(2x+5)=0$

8. Polynomiel regression

Opgave 26

Grafen for et andengradspolynomium går igennem punkterne $(-2,0)$, $(1,-18)$ og $(4,0)$.

a) Bestem koefficienterne i polynomiet manuelt. Benyt eventuelt idéen i eksempel 19.
b) Løs samme problem i et CAS-værktøj.

Opgave 27

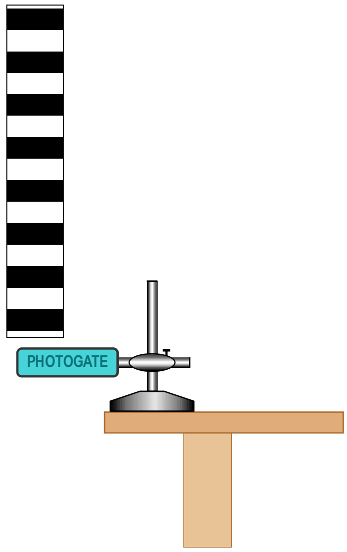
Bestem grafen for det andengradspolynomium, hvis graf går igennem følgende punkter: $(-3,-1)$, $(1,3)$ og $(8,-2)$. Der må benyttes CAS-værktøj.

Opgave 28

Givet punkterne $(-3,25)$, $(0,3)$, $(1,0)$, $(4,-6)$, $(6,-7)$ og $(9,-1)$.

a) Benyt et CAS-værktøj til at bestemme det bedste andengradspolynomium, som tilnærmer datapunkterne.
b) Samme spørgsmål for et tredjegradspolynomium.

Opgave 29



I et fysikforsøg undersøges det frie fald. Man lader et såkaldt ”Picket Fence”, som er en gennemsigtig plexiglasplade med sorte uigennemsigtige striber, falde ned igennem gabet på en *Photogate*. Sidstnævnte indeholder fotoceller, som kan registrere, hvornår en infrarød stråle bliver afbrudt af de sorte felter. Det giver anledning til en række sammenhørende værdier af tiden t i sekunder og den tilbagelagt strækning s i meter. Data kan ses i tabellen nedenfor. Ifølge bevægelsesligningerne indenfor mekanikken er sammenhængen mellem strækning og tid følgende, idet der regnes positivt nedefter:

$$s(t) = \tfrac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 + v_0 \cdot t + s_0$$

hvor s_0 er startpositionen og v_0 er starthastigheden til tiden $t = 0$. Vi ønsker en værdi for tyngdeaccelerationen g.

a) Foretag regression på data med et andengradspolynomium. Hvilken værdi får man for tyngdeaccelerationen g?

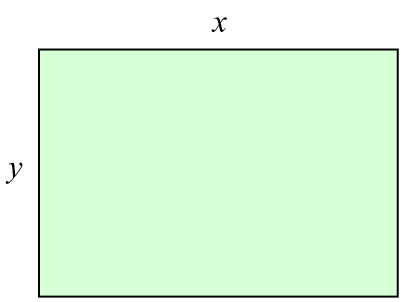
t (s)	0,00000	0,05990	0,09788	0,12817	0,15411	0,17718	0,19817	0,21754
s (m)	0,000	0,050	0,100	0,150	0,200	0,250	0,300	0,350

9. Anvendelser af andengradspolynomier

Opgave 30

Længden af et maleri på væggen er 20 cm længere end det er bredt. Maleriet har et areal på 2400 cm^2. Bestem sidelængderne af maleriet. *Hjælp*: Se eksempel 22.

Opgave 31*



En rektangulær grund har en omkreds på 96 meter og et areal på 560 m^2. Bestem grundens sidelængder.

Hjælp: Betegn grundens længde med x og bredde med y. Udnyt de to oplysninger til at opstille to ligninger med de ubekendte x og y. Isoler herefter y i den ene ligning og indsæt udtrykket i den anden ligning. Det skal gerne give en andengradsligning i x.

Opgave 32

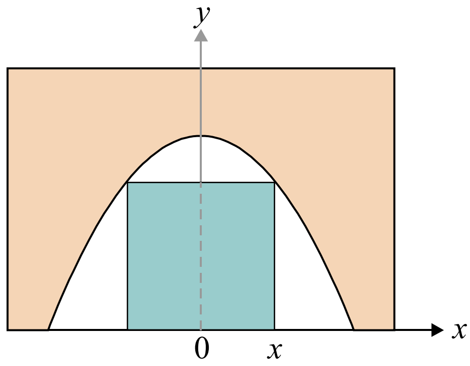
Figuren viser en tunnel, hvis indre har et tværsnit som en parabel, som er graf for andengradspolynomiet $f(x) = -0{,}32x^2 + 5$. Enheden er meter.

a) Bestem bredden af tunnellen ved jorden.

Nogle containere har en kvadratisk endeflade, og de skal kunne gå igennem tunnelen.

b) Hvor stor må sidelængden i den kvadratiske endeflade maksimalt være, for at containeren kan passere igennem tunnellen?

Hjælp: Kald det stykke den kvadratiske container rager ud fra midten for x. Hvor stor skal højden da være, for at der er tale om et kvadrat? Udnyt herefter forskriften for tunnellens tværsnitprofil til at opstille en ligning, og løs derefter denne.



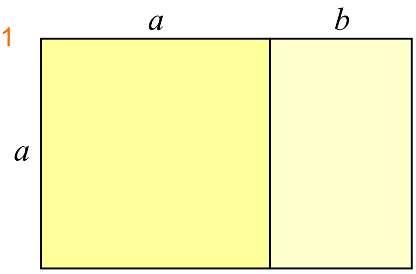
Opgave 33

Vi er i situationen med et skråt kast fra eksempel 21. Boldens starthastighed v_0 er 15 m/s, elevationen (vinklen) α er 52° og begyndelseshøjden y_0 er 1,80 m.

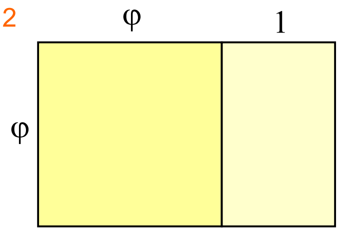
a) Bestem koefficienterne i det andengradspolynomium, hvis graf beskriver boldens banekurve.
b) Udregn toppunktet for parablen med henblik på at afgøre, hvor højt bolden når op og hvor langt fra kastestedet, det sker.
c) Løs en andengradsligning for at kunne bestemme kastelængden.
d) Tegn grafen for kasteparablen. Husk samme skalering på akserne.

Opgave 34 (Det gyldne snit – det gyldne rektangel)

Figur 1



Figur 2



Givet et rektangel, som ikke er et kvadrat. Hvis man bortskærer et kvadrat, har man tilbage et nyt rektangel, som vist på figur 1. Vi kalder det oprindelige rektangel for det *store* rektangel og det nye for det *lille* rektangel. Det lille rektangel er farvet svagt gult på figur 1. Det oprindelige store rektangel kaldes *gyldent*, såfremt forholdet mellem den lange side og den korte side er ens i begge rektangler.

a) Redegør for, at betingelsen for at rektanglet er gyldent kan udtrykkes således:

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$$

Dette forhold kaldes i øvrigt også for det *gyldne snits forhold*, og man betegner det med det græske symbol *phi* : $\varphi = a/b$. Vi ved, at hvis vi dividerer alle størrelser i en figur med et bestemt tal, så fås en figur, som er *ligedannet* med den oprindelige. Dermed er alle forhold bevaret. Hvis vi "nedkopierer" figur 1 med faktoren *b*, altså dividerer alle længder med *b*, så fås figur 2. Figur 2 kan bruges til at bestemme talværdien for det gyldne snit.

b) Vis, ved at iagttage figur 2, at det gyldne snit φ opfylder: $\dfrac{\varphi+1}{\varphi} = \dfrac{\varphi}{1}$

c) Vis at det gyldne snit opfylder andengradsligningen $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$.

d) Løs andengradsligningen og angiv en talværdi for φ med 4 decimalers nøjagtighed.

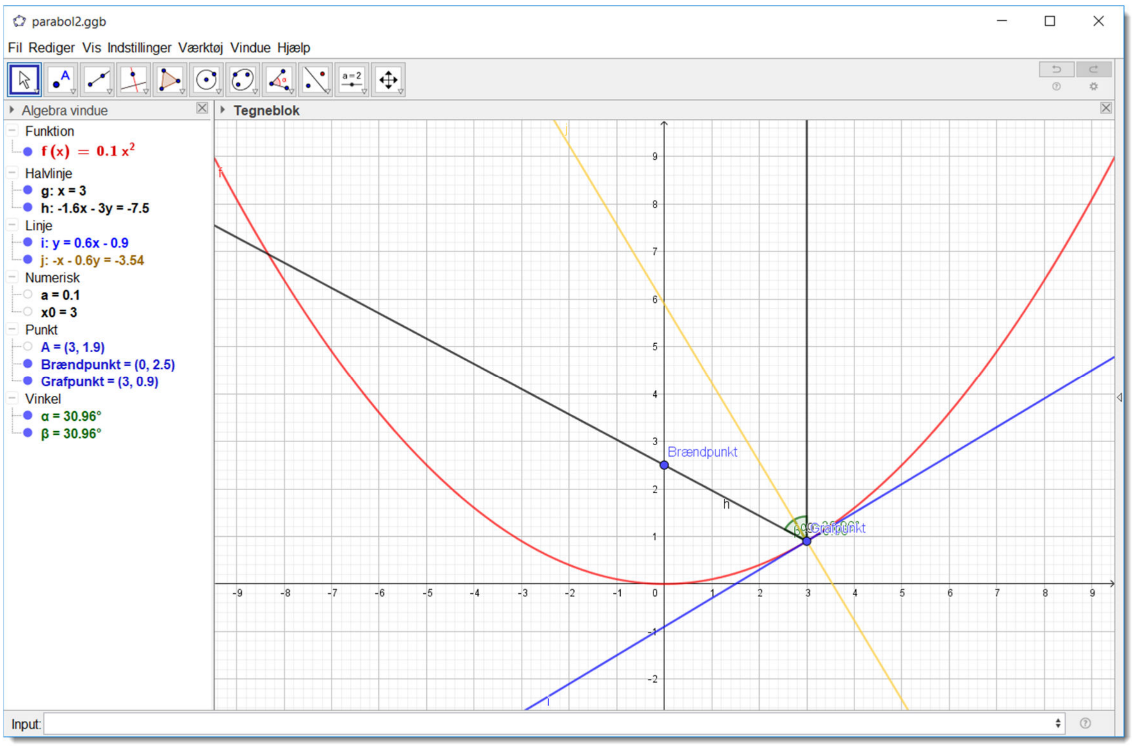
Det gyldne snit har i øvrigt en lang og interessant historie. Noget af den kan du studere på min hjemmeside https://www.matematiksider.dk/det_gyldne_snit.html.

Opgave 35 (Induktive undersøgelser for parabelegenskaber med GeoGebra)

I denne opgave skal vi bruge den klassiske udgave af software-programmet GeoGebra. Hvis du ikke allerede har det installeret, kan du hente programmet gratis fra hjemmesiden https://www.geogebra.org og installere det. Der er tale om et fremragende program til at foretage geometriske konstruktioner og analysere grafer. Meningen i denne opgave er at eksperimentere med parabler og derved få en bedre fornemmelse for nogle af de egenskaber, der gælder for parabler. Til at begynde med påstår vi uden videre, at den parabel, som er graf for funktionen $f(x) = a \cdot x^2$, har *brændpunkt* i punktet $\left(0, \frac{1}{4a}\right)$. Herefter følger de instruktioner, du skal foretage, før du kan begynde eksperimenterne.

1. Skriv a=0.10 i *Input*-linjen og tryk **Enter**.
2. Skriv f(x)=a*x^2 i *Input*-linjen og tryk **Enter**. Herved skulle grafen for andengrads-polynomiet $f(x) = 0{,}10 \cdot x^2$ gerne komme til syne.
3. Vælg værktøjet *Flyt* (ikonen er en pil) og træk i tegnefladen, så origo kommer til at befinde sig lidt under midten af den synlige del af tegnefladen.
4. Vælg værktøjet *Punkt* og klik et vilkårligt sted på tegnefladen for at afsætte et punkt.
5. Højreklik på punktet og vælg punktet *Egenskaber* i kontekstmenuen for at redigere punktet. For det første kan du give det navnet "Brændpunkt". Under definition skrives: (0,1/(4*a)). Tryk på **Enter** og luk boksen.
6. Skriv x0=3 i *Input*-linjen og tryk **Enter**.
7. Vælg værktøjet *Punkt* igen og afsæt et punkt på tegnefladen. Herefter skal du ligesom under punkt 4 ændre punktets navn til "Grafpunkt" og skrive følgende i feltet *Værdi*: (x0,f(x0)). Tryk derefter på **Enter** og luk boksen. NB! Feltet skifter efterfølgende navn til *Definition*, nok fordi der nu står et udtryk, som afhænger af en variabel.
8. Vi skal have lavet en lodret halvlinje fra grafpunktet og opefter. Begynd derfor med at oprette et ny punkt med følgende i feltet *Værdi*: (x0,f(x0)+1).

9. Vælg værktøjet *Halvlinje*. Bemærk, at det ligger i en undermenu til *Linje*-værktøjet og kan fås frem ved at klikke på den lille trekant i nederste højre hjørne af værktøjet *Linje*. Når *Halvlinje*-værktøjet er valgt, skal du klikke på først punktet kaldet "Grafpunkt" og derefter på punktet, skabt under punkt 8. Nu skal du gerne kunne se den ønskede halvlinje.
10. Gå over i *Algebra vindue* i venstre side og klik på den lille blå bolle til venstre for punktet *A*. Det får det pågældende hjælpepunkt til at blive usynligt.
11. Lav igen en halvlinje, denne gang fra "Grafpunkt" gennem "Brændpunkt".
12. Vi skal have tegnet en tangent til grafen for *f* igennem grafpunktet: Vælg værktøjet *Tangenter* og klik på først grafen for *f* og derefter på punktet "Grafpunkt". Højreklik derefter på den fremkomne tangent og vælg *Egenskaber*. I boksen vælges fanen *Farve*, hvorefter man kan give tangenten farven blå.
13. Giv grafen farven rød ved at højreklikke på den, vælge *Egenskaber* og fanen *Farve*...
14. Vælg værktøjet *Vinkelret linje* og klik derefter på den blå tangent og derefter på punktet "Grafpunkt". Nu skulle du gerne kunne se en linje gennem "Grafpunkt", stående vinkelret på tangenten. Farv den orange.
15. Vælg værktøjet *Vinkel* og klik på først den lodrette sorte halvlinje og derefter på den orange vinkelrette linje fra punkt 14. En vinkelangivelse skulle gerne kunne ses. Hvis den beregne vinkel er dækket til af andre elementer, kan man alternativt se den i *Algebra vindue* til venstre. Højreklik derefter på den fremkomne vinkel, vælg *Egenskaber* og se under fanen *Basis* efter *Vinkel mellem*. Her vælger du 0° til 180°.
16. Vælg igen værktøjet *Vinkel* og klik på først halvlinjen gennem brændpunktet og derefter på den orange vinkelrette linje fra punkt 14. Sørg igen for, at vinklen angives mellem 0° og 180°.



Konstruktionen er færdig. Bemærk, at du nu med værktøjet *Flyt* kan trække grafpunktet "Grafpunkt" langs med grafen og se alle de øvrige elementer flytte sig med. Det er også muligt at flytte punktet ved i *Algebra vindue* at dobbeltklikke på elementet `x0=3` og ændre værdien af x0 fra 3 til en anden værdi. Forsøg at besvare følgende spørgsmål:

a) Kig på eksempel 24 omhandlende anvendelser af parabler og de tredimensionelle udgaver i form af omdrejningsparaboloider i forbindelse med radioteleskoper og paraboler. Hvad repræsenterer de enkelte elementer i vore tegning i relation hertil?

b) Hvorfor blev du mon bedt om at få beregnet de to vinkler? Hvad sker der med vinklerne i forhold til hinanden, når du bevæger grafpunktet? Kig eventuelt i *Algebra vindue* for at kunne se vinklerne tydeligt. Hvilken rolle spiller de to vinkler rent *fysisk* set? Hvad konkluderer du om brændpunktets rolle?

c) Du kan også ændre på værdien af konstanten a i forskriften for andengradspolynomiet. Dobbeltklik på `a=0.1` i *Algebra vindue* og lad a få en anden værdi. Hvad betyder det med hensyn til parablen og dets brændpunkt?

d) Hvis du i *Algebra vindue* klikker på den hvide bolle til venstre for `a=0.1`, bliver bollen blå, og en skyder kommer til syne på tegnefladen. Med den kan man hurtigt variere, hvor bred parablen er. Højreklik på skyderen og vælg *Egenskaber*. Under fanen *Skyder* kan man for eksempel ændre det interval, skyderen kan ændre a i. Under *Interval* kan du give *min* værdien 0 og *maks* værdien 1. Prøv derefter at trække i skyderen. For en given værdi af a valgt via skyderen, kan man derefter trække i grafpunktet og se, hvad der nu sker ...