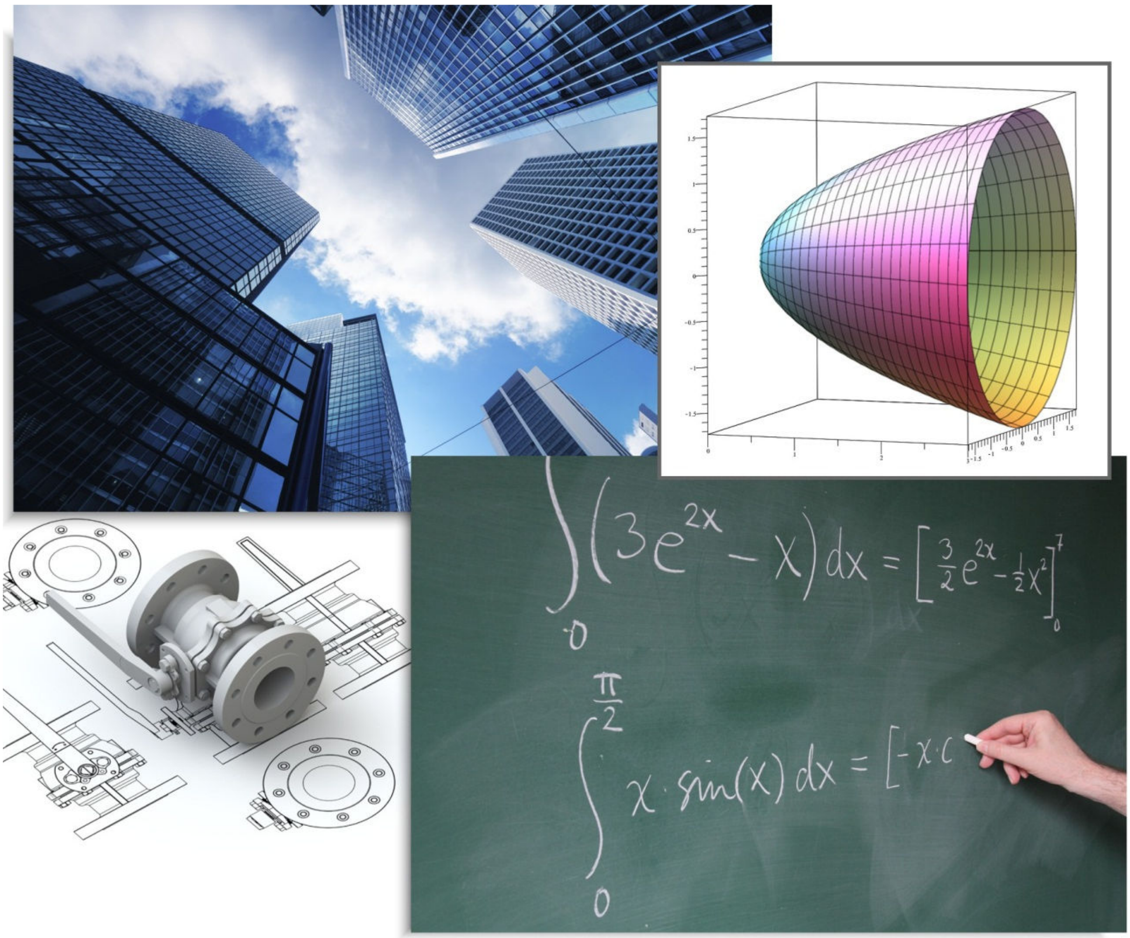
Integralregning



Indholdsfortegnelse

1. Indledning

I denne note skal vi kigge på begrebet *stamfunktion* og se, hvordan det giver anledning til en hel ny gren af matematikken kaldet *integralregning*. Endelig skal vi se, hvordan stamfunktioner på forunderlig vis kan bruges til at beregne arealer med samt løse en masse komplicerede opgaver fra det praktiske liv.

2. Stamfunktioner

At finde en stamfunktion til en funktion *f* er den omvendte proces af at differentiere en funktion. Stamfunktioner viser sig at have stor betydning i matematikken.

Definition 1 (Stamfunktion)

Med en *stamfunktion* til en funktion *f* menes en funktion *F*, der har *f* som differentialkvotient, altså: $F'(x) = f(x)$.

Eksempel 2

a) $\frac{1}{3}x^3$ er stamfunktion til x^2, fordi $\left(\frac{1}{3}x^3\right)' = 3\cdot\frac{1}{3}x^{3-1} = x^2$.

b) $\frac{1}{3}x^3+7$ er også stamfunktion til x^2, fordi $\left(\frac{1}{3}x^3+7\right)' = 3\cdot\frac{1}{3}x^{3-1}+0 = x^2$.

c) $\frac{1}{x}-1$ er stamfunktion til $\ln(x)-x$, fordi $\left(\ln(x)-x\right)' = \frac{1}{x}-1$.

Sætning 3

Lad *F* være en stamfunktion til funktionen *f* og antag at *f* er defineret i et interval. Da er $F(x)+k$, hvor *k* er en vilkårlig konstant, også en stamfunktion til *f*, og der findes ikke andre stamfunktioner til *f*.

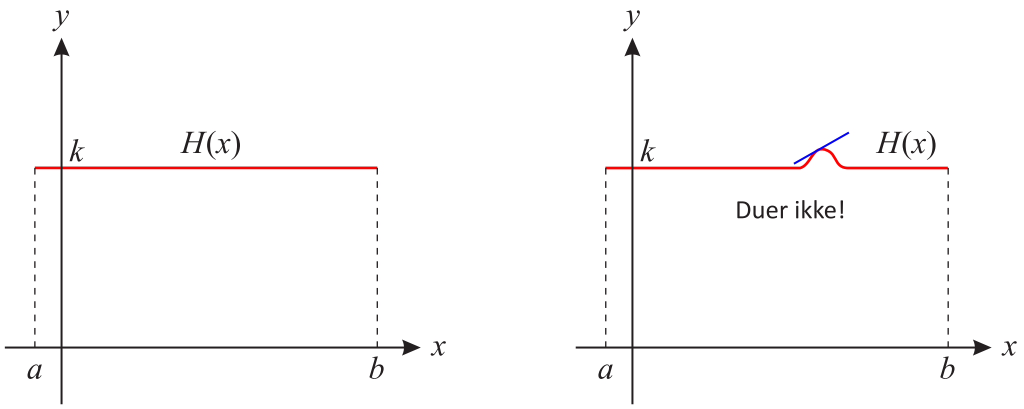
Bevis: At $F(x)+k$ også er en stamfunktion til *f* ses ved at bruge regnereglen for differentiation af en sum af to funktioner samt udnytte at differentialkvotienten af en konstant er lig med 0:

(1) $$\left(F(x)+k\right)' = F'(x)+(k)' = f(x)+0 = f(x)$$

Vi mangler at vise, at der ikke findes andre end dem, hvor man lægger en konstant til. Antag at $G(x)$ er en vilkårlig stamfunktion til *f*. Vi ved altså at $G'(x) = f(x)$. For at komme videre udfører vi et lille trick. Vi indfører en hjælpefunktion *H*, som skal være differensen mellem *G* og *F*: $H(x) = G(x)-F(x)$. Lad os prøve at differentiere hjælpefunktionen, idet vi udnytter reglen for differentiation af en differens af to funktioner:

(2) $$H'(x) = \left(G(x)-F(x)\right)' = G'(x)-F'(x) = f(x)-f(x) = 0$$

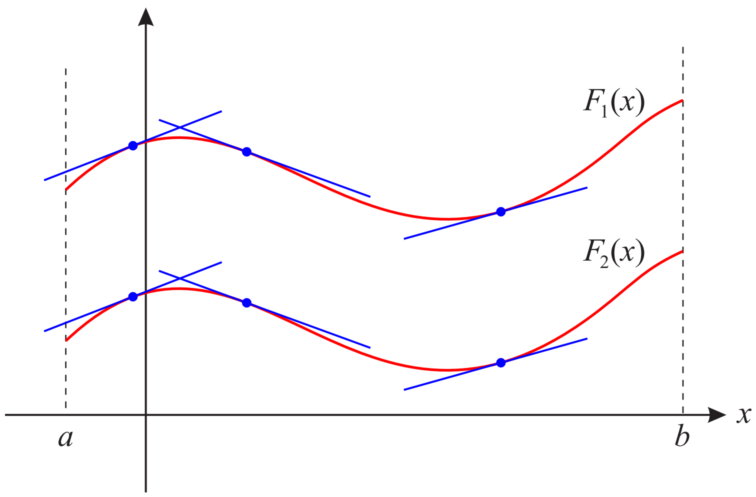
Differentialkvotienten af H er altså 0 for alle x i intervallet. Det betyder at grafen til H har en vandret tangent i alle punkter i intervallet. Den eneste funktion, der opfylder denne egenskab er en *konstant* funktion, som det ses til højre. Slår grafen for H blot den mindste bugt, som vist på figuren til højre, så vil der være et sted hvor tangenten ikke er vandret, i modstrid med det vi ved om $H'(x)$.



Vi har altså $H(x) = k$ for en eller anden konstant k. Ifølge definitionen af hjælpefunktionen haves da $G(x) - F(x) = k \;\Leftrightarrow\; G(x) = F(x) + k$. Den vilkårlige stamfunktion viser sig altså at være på formen $F(x) + k$, som vi ville vise.

□

Forskellene mellem stamfunktionerne til en funktion f, der er defineret på et interval, er altså blot en konstant. Rent grafisk viser det sig ved at graferne for de forskellige stamfunktioner blot er parallelforskudt i y-aksens retning i forhold til hinanden. Dette er illustreret på figuren nedenfor for to stamfunktioner, F_1 og F_2. Her er indtegnet tangenterne i tre punkter for at antyde at stamfunktionerne har samme tangenthældning i ethvert punkt i intervallet. Det er jo indlysende, eftersom F_1 og F_2 har samme differentialkvotient, nemlig f!



I opgaver bliver man ofte bedt om at bestemme den stamfunktion, hvis graf går igennem et bestemt punkt i koordinatsystemet. Vi skal se et eksempel på dette.

Eksempel 4

Bestem den stamfunktion til $f(x)=3x-5$, hvis graf går igennem punktet (2,6).

Løsning: Først findes en generel stamfunktion. Vi gætter på $F(x)=\frac{3}{2}\cdot x^2-5x+k$. Vi efterviser det ved at differentiere:

$$F'(x) \;=\; \left(\tfrac{3}{2}x^2-5x+k\right)' \;=\; 2\cdot\tfrac{3}{2}x^{2-1}-5+0 \;=\; 3x-5$$

Vi ser at vi har fundet den rigtige stamfunktion. Vi skal have bestemt konstanten *k*, så punktet $(2,6)$ ligger på grafen, eller sagt på en anden måde: så $F(2)=6$. Vi indsætter:

$$\tfrac{3}{2}\cdot 2^2-5\cdot 2+k=6 \quad\Leftrightarrow\quad 6-10+k=6 \quad\Leftrightarrow\quad k=10$$

Dermed er den søgte stamfunktion $F(x)=\frac{3}{2}\cdot x^2-5x+10$.

□

At finde stamfunktionen til $f(x)$ kaldes også at *integrere* $f(x)$. Selve processen kaldes *integration*. Som eksempel får man $\frac{1}{3}x^3$, når man integrerer x^2. Det skrives ofte ved hjælp af et særligt tegn, som ligner et stiliseret *S*:

(3) $$\int x^2\,dx \;=\; \tfrac{1}{3}x^3$$

Man siger også: *integralet* af x^2 er $\frac{1}{3}x^3$. Funktionen under integraltegnet kaldes *integranden*. Vi har her at gøre med det såkaldte *ubestemte* integral. Der findes også noget, der hedder et *bestemt integral*, som vi vil stifte bekendtskab med senere. Det skal lige bemærkes, at man lige så godt kunne have lagt en konstant til på højre side i (3). Det ville også have været rigtig ifølge sætning 3. Når man udtaler sig om ubestemte integraler, interesserer man sig altså ikke for eventuelle konstanter, der er lagt til.

Mens det at bestemme differentialkvotienten til en funktion er forholdsvist let, så er det ofte meget kompliceret at bestemme integralet eller en stamfunktion til en given funktion. Der findes funktioner, hvor man ikke en gang kan udtrykke integralet ved hjælp af de sædvanlige matematiske funktioner. Funktionen $\exp(x^2)$ er et eksempel herpå. Ligesom der findes differentiationsregneregler, så findes der også integrationsregneregler, men de kan ikke bruges i så mange situationer, som tilfældet er i differentialregning. Reglerne, som benævnes *partiel integration* og *integration ved substitution*, vil ikke blive gennemgået i denne lille note. I dag nøjes man ofte med at lade et CAS-værktøj udregne integralerne for sig. Der er dog nogle standardfunktioner, som man bør huske stamfunktionerne til. Den mest vigtige er måske x^n, hvor *n* er et vilkårligt reelt tal. For at bestemme stamfunktionen hertil kan man gøre sig følgende overvejelser: Vi ved, at når man differentierer en potensfunktion, så ganger man eksponenten ned foran og trækker 1 fra i eksponenten. Når man skal finde en stamfunktion til en potensfunktion, så er det derfor nærliggende at gætte på en potensfunktion, hvor eksponenten er 1 *højere*. Det er altså nærliggende at starte med at kigge på x^{n+1}. Når denne funktion differentieres fås $(x^{n+1})'=(n+1)\cdot x^n$. Vi får altså næsten den rigtige funktion. Der er blot en konstant, der er ganget på. Det får os til at forsøge med et nyt gæt, hvor vi "reparerer" med denne konstant ved at dividere med den:

(4) $$\left(\tfrac{1}{n+1}x^{n+1}\right)' \;=\; (n+1)\cdot\tfrac{1}{n+1}x^{n+1-1} \;=\; \tfrac{n+1}{n+1}x^{n} \;=\; x^{n}$$

Vi skal imidlertid passe på her: nævneren må ikke blive 0, så ovenstående duer ikke i tilfældet $n=-1$. I alle andre situationer er udledningen gyldig. Tilfældet $n=-1$ svarer til at vi har at gøre med funktionen $f(x)=x^{-1}=1/x$. Fra differentialregningen ved vi, at $(\ln(x))'=1/x$. Dette gælder i det interval, hvor logaritmen er defineret, dvs. for alle positive tal. Tilføjer man et numerisk tegn om *x*, kan vi få en identitet, som gælder for alle $x\neq 0$: $(\ln|x|)'=1/x$. Detaljerne herfor undlader vi. Dermed er $\ln|x|$ en stamfunktion til $1/x$. Nedenfor er der en liste med de mest kendte stamfunktioner:

Funktion $f(x)$	**Stamfunktion** $F(x)$
0	k
k	$k\cdot x$
x	$\frac{1}{2}x^2$
$x^n \quad (n\neq -1)$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} \quad (x\neq -1)$
$\sqrt{x}$ eller $x^{\frac{1}{2}}$	$\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$
$\dfrac{1}{x}$ eller x^{-1}	$\ln|x|$
e^x	e^x
e^{kx}	$\frac{1}{k}e^{kx}$
a^x	$\frac{1}{\ln(a)}a^x$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$
$\cos(x)$	$\sin(x)$
$\ln(x)$	$x\cdot\ln(x)-x$

Eksempel 5

Flere af de funktioner, der er opskrevet eksplicit i skemaet ovenfor er faktisk specialtilfælde af reglen om hvordan en potensfunktion integreres:

$$\int\sqrt{x}\,dx \;=\; \int x^{\frac{1}{2}}\,dx \;=\; \tfrac{1}{\frac{1}{2}+1}x^{\frac{1}{2}+1} \;=\; \tfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$$

$$\int x\,dx \;=\; \int x^{1}\,dx \;=\; \tfrac{1}{1+1}x^{1+1} \;=\; \tfrac{1}{2}x^{2}$$

□

Man kommer dog ikke langt med ovenstående liste med stamfunktioner. Ofte har man at gøre med udtryk, som er blandinger af ovenstående funktioner. Derfor er det vigtigt med nogle *integrationsregler*. Som nævnt undlader vi at komme ind på de mere avancerede regler nævnt på forrige side. Der er dog et par regler, som er nemt udledt:

Sætning 6

Lad f og g være kontinuerte funktioner og k en konstant. Da gælder:

a) $\int k \cdot f(x)\,dx \;=\; k \cdot \int f(x)\,dx$

b) $\int \big(f(x)+g(x)\big)\,dx \;=\; \int f(x)\,dx \;+\; \int g(x)\,dx$

c) $\int \big(f(x)-g(x)\big)\,dx \;=\; \int f(x)\,dx \;-\; \int g(x)\,dx$

Bevis: Vi skal blot vise, at når vi differentierer højresiden af lighedstegnet, så får vi integranden på venstre side:

(5) $$\left(k \cdot \int f(x)\,dx\right)' \;=\; k \cdot \left(\int f(x)\,dx\right)' \;=\; k \cdot f(x)$$

(6) $$\left(\int f(x)\,dx \;+\; \int g(x)\,dx\right)' \;=\; \left(\int f(x)\,dx\right)' + \left(\int g(x)\,dx\right)' \;=\; f(x)+g(x)$$

I første lighedstegn i (5) har vi benyttet differentiationsreglen, der løst sagt siger, at man kan sætte en multiplikationskonstant udenfor. I første lighedstegn i (6) har vi tilsvarende benyttet den regel, der siger at man kan differentiere en sum af to funktioner ved at differentiere funktionerne hver for sig og lægge resultaterne sammen. Punkt c) bevises på analog måde som b).

□

Eksempel 7

Bestem stamfunktionen til $f(x) = 6x^{-2} + e^{2x}$.

$$\begin{aligned}
\int (6x^{-2} + e^{2x})\,dx \;&=\; \int 6x^{-2}\,dx \;+\; \int e^{2x}\,dx \\
&=\; 6 \cdot \int x^{-2}\,dx \;+\; \int e^{2x}\,dx \\
&=\; 6 \cdot \tfrac{1}{(-2)+1} x^{-2+1} + \tfrac{1}{2} e^{2x} \\
&=\; -6x^{-1} + \tfrac{1}{2} e^{2x}
\end{aligned}$$

hvor vi i første lighedstegn har benyttet sætning 6b). I andet lighedstegn er sætning 6a) benyttet. I tredje lighedstegn er skemaet fra forrige side benyttet.

□

Eksempel 8

Bestem den stamfunktion til $f(x) = x \cdot \exp(2x) + 1$, hvis graf går igennem punktet (0,1).

Løsning: Her kunne man måske få den idé at sætning 6a) og sætte x udenfor integraltegnet, men den går ikke! Det er kun konstanter, der kan sættes udenfor integraltegnet. Derfor er de værktøjer vi har i kraft af sætning 6 og skemaet med standardfunktioner ikke tilstrækkeligt her. Derfor benytter vi CAS-værktøjet Maple til at løse problemet. Forklaringer fremgår af løsningen.

restart

$$\int (x \cdot \exp(2\,x) + 1)\, dx = x + \frac{x\,e^{2\,x}}{2} - \frac{e^{2\,x}}{4}$$

som er en stamfunktion. For at finde den stamfunktion, hvis graf passerer igennem (0,1) lægger vi en arbitrær konstant k til ovenstående og kalder funktionen $F(x)$. At grafen passerer igennem (0,1) oversættes til $F(0) = 1$. Derefter løses med hensyn til k:

$$F(x) := x + \frac{x\,e^{2\,x}}{2} - \frac{e^{2\,x}}{4} + k:$$

$$solve(F(0) = 1, k) = \frac{5}{4}$$

Den søgte stamfunktion er altså $F(x) = x + \frac{x\,e^{2\,x}}{2} - \frac{e^{2\,x}}{4} + \frac{5}{4}$.

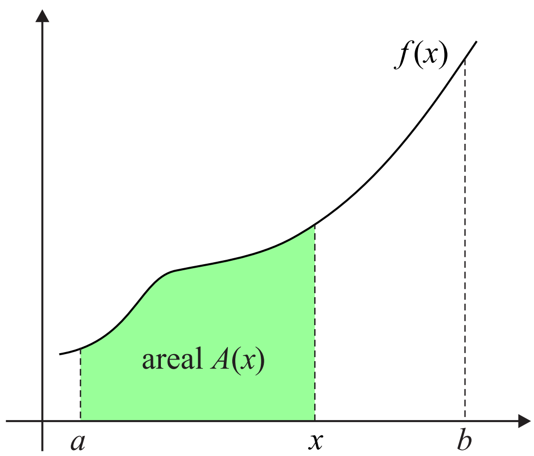
□

3. Sammenhængen mellem areal og stamfunktion

I dette afsnit skal vi bevise en meget vigtig sætning, som implicerer at man kan beregne arealer under grafen for en funktion *f* ved hjælp af en stamfunktion til *f*. Det er umiddelbart en meget overraskende egenskab at integraler kan bruges til arealberegning. Vi vil ikke gå ind i nogen diskussion af hvilke egenskaber man skal stille til funktioner for at man overhovedet kan tale om at grafen for funktionen begrænser et areal, blot nævne at kontinuitet er en tilstrækkelig egenskab!

Definition 9 (Arealfunktion)

Givet en kontinuert funktion *f*, som er ikke-negativ i et interval $[a,b]$. Med *arealfunktionen* vil vi mene den funktion $A(x)$, som angiver arealet under grafen, ned til x-aksen, fra a til x.

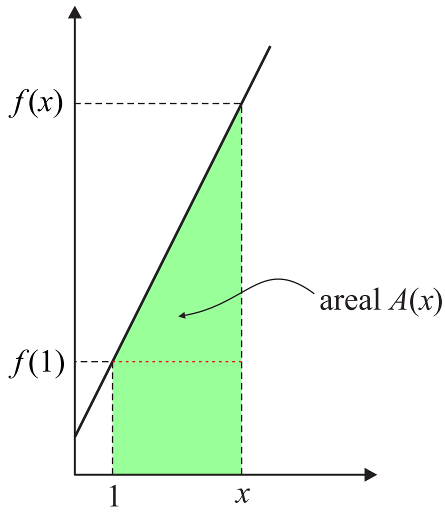


Eksempel 10

Det er ikke normalt at begynde at regne på konkrete arealfunktioner. Vi skal udelukkende bruge begrebet arealfunktion til at bevise den vigtige sætning 14 senere. For rigtigt at forstå, hvad en arealfunktion er, er det imidlertid hensigtsmæssigt at kigge på et enkelt konkret eksempel. Lad os sige, at vi har givet funktionen $f(x)=2x+1$, og at $a=1$. Den tilhørende arealfunktion skal angive arealet af det grønne område på figuren nedenfor. Vi kan dele området op i et rektangel med bredden $x-1$ og højden $f(1)$ samt en trekant med grundlinje $x-1$ og højde $f(x)-f(1)$. Da $f(1)=2\cdot 1+1=3$ giver det følgende areal:

$$\begin{aligned}A(x) &= (x-1)\cdot f(1)+\tfrac{1}{2}\cdot(x-1)\cdot(f(x)-f(1))\\ &= (x-1)\cdot 3+\tfrac{1}{2}\cdot(x-1)\cdot(2x+1-3)\\ &= 3x-3+\tfrac{1}{2}\cdot(x-1)\cdot(2x-2)\\ &= 3x-3+\tfrac{1}{2}\cdot(2x^2-2x-2x+2)\\ &= 3x-3+x^2-x-x+1\\ &= x^2+x-2\end{aligned}$$

For ethvert x har vi dermed et udtryk for arealet under grafen fra 1 til x.



Betingelsen at f skal være kontinuert sikrer, at man i det hele taget kan tale om, at grafen begrænser et areal. Med betingelsen at funktionen skal være ikke-negativ sikrer vi os desuden, at grafen ikke rækker ned under x-aksen. Vi skal bevise følgende meget smukke egenskab for arealfunktionen:

Sætning 11

Lad f være en funktion, som er kontinuert og ikke-negativ i intervallet $[a,b]$. Da er den tilhørende arealfunktion differentiabel med den afledede $f(x)$, dvs.

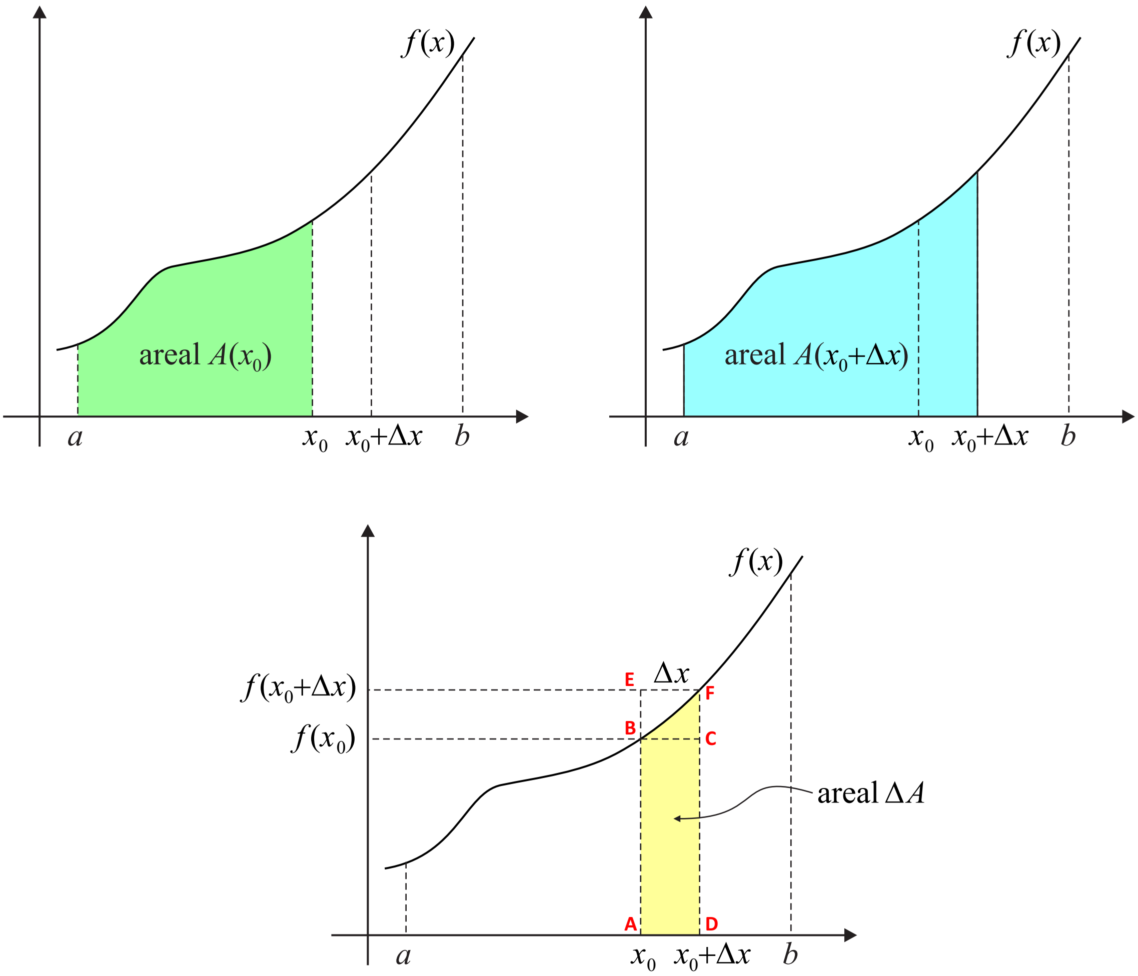
(7) $$A'(x)=f(x)$$

for alle $x\in]a,b[$. Arealfunktionen er altså en stamfunktion til $f(x)$.

Bevis: Vi skal helt tilbage til definitionen af differentiabilitet. Vi skal have kigget på *differenskvotienten* for arealfunktionen:

(8) $$\frac{\Delta A}{\Delta x}=\frac{A(x_0+\Delta x)-A(x_0)}{\Delta x}$$

Det kan virke som en umulig opgave at sige noget om denne differenskvotient, da vi ikke ved hvilken funktion, der er tale om. Det viser sig imidlertid, at vi kan vurdere størrelsen nedadtil og opadtil ved at kigge på arealer på figurerne herunder.



Tælleren i differenskvotienten $\Delta A = A(x_0 + \Delta x) - A(x_0)$ kan tolkes som arealet af det blå område øverst til højre minus arealet af det grønne område øverst til venstre. Det er indlysende, at denne differens er lig med arealet af den gule strimmel nederst i midten. Vi skal have vurderet arealet af dette område. Her gør vi lige en ekstra antagelse om vores funktion *f*, nemlig at den er *voksende*. Det kan vises at sætningen gælder selv uden denne antagelse, men beviset bliver mere medgørlig, hvis vi gør antagelsen. Det betyder nemlig at vi kan sige følgende (overvej!):

(9) Arealet af ▭ABCD $\leq$ Arealet af den gule strimmel $\leq$ Arealet af ▭AEFD

Rektangel ABCD har bredden Δx og højden $f(x_0)$ og dermed arealet $f(x_0) \cdot \Delta x$. Tilsvarende for arealet af rektangel AEFD. (9) kan dermed omskrives til:

(10) $$f(x_0) \cdot \Delta x \;\leq\; \Delta A \;\leq\; f(x_0 + \Delta x) \cdot \Delta x$$

Allerede på tegningerne har vi stiltiende antaget at tilvæksten $\Delta x > 0$. Lad os fortsætte med denne antagelse. Vi vil nemlig dividere alle størrelserne i uligheden med Δx. Når man dividerer med et positivt tal, bevares ulighedstegnene:

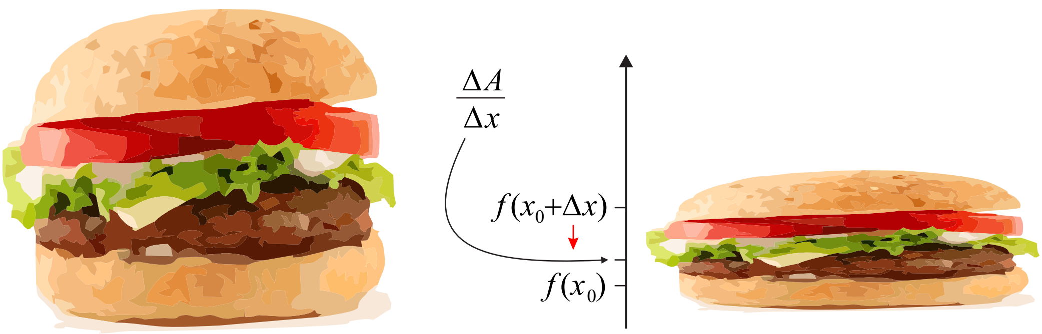
(11)
$$\frac{f(x_0)\cdot\Delta x}{\Delta x} \le \frac{\Delta A}{\Delta x} \le \frac{f(x_0+\Delta x)\cdot\Delta x}{\Delta x}$$
$$\Updownarrow$$
$$f(x_0) \le \frac{\Delta A}{\Delta x} \le f(x_0+\Delta x)$$

Det sidste trin i *tretrinsreglen* består i at undersøge om differenskvotienten $\Delta A/\Delta x$ har en grænseværdi for $\Delta x \to 0$. Vi har med (11) fået klemt differenskvotienten inde mellem to størrelser. Det ville ikke være brugbart, hvis det ikke var fordi begge disse størrelser nærmer sig til det samme tal! Funktionen *f* er antaget kontinuert, hvilket betyder:

(12) $$f(x_0+\Delta x) \to f(x_0) \quad \text{for} \quad \Delta x \to 0$$

Venstresiden i uligheden (11) er fast, når det kun er Δx, der bevæger sig, og højresiden bevæger sig mod det samme tal. Dermed må det, der ligger imellem, også nærme sig til samme tal. Altså har vi:

(13) $$\frac{\Delta A}{\Delta x} \to f(x_0) \quad \text{for} \quad \Delta x \to 0^+$$



Hele idéen kan opsummeres i et billede af en burger, der klapper sammen: Overbollen repræsenterer $f(x_0+\Delta x)$, underbollen repræsenterer $f(x_0)$, mens selve kødet, som vi gerne vil vide noget om, ligger imellem de to. Overbollen nærmer sig til underbollen. Kødstykket må nødvendigvis følge med. Altså nærmer kødet sig også til underbollen!
Vi mangler i princippet at overveje tilfældet hvor tilvæksten Δx er negativ og nærmer sig til 0 fra venstre. Det overlades til læseren at vise, at differenskvotienten i dette tilfælde har samme grænseværdi (se øvelse 12). Vi har dermed at (13) ikke blot gælder for $\Delta x \to 0^+$, men for $\Delta x \to 0$ generelt. Da differenskvotienten således har en grænseværdi for $\Delta x \to 0$, er arealfunktionen $A(x)$ differentiabel i x_0 med differentialkvotient $A'(x_0) = f(x_0)$. Det ønskede er dermed vist.

□

Øvelse 12

Overvej hvordan figurerne i beviset for sætning 3 skal ændres for at tage højde for tilfældet med en negativ tilvækst Δx. Vis herefter at $\Delta A/\Delta x \to f(x_0)$ for $\Delta x \to 0^-$.
Hjælp: Vis eventuelt, ved at betragte arealer igen, at man kan opstille følgende ulighed: $f(x_0+\Delta x)\cdot(-\Delta x) \le -\Delta A \le f(x_0)\cdot(-\Delta x)$.

Eksempel 13

I eksempel 10 fandt vi, at arealfunktionen for $f(x)=2x+1$ med udgangspunkt i $a=1$ er lig med $A(x)=x^2+x-2$. Lad os prøve at differentiere arealfunktionen:

$$A'(x)=\left(x^2+x-2\right)'=2x+1$$

Vi har altså minsandten at $A'(x)=f(x)$, præcist som forudsagt i sætning 11!

Definition 14 (Bestemt integral)

Lad *f* være en funktion, der er kontinuert i et interval $[a,b]$ og har stamfunktionen *F*. Ved det *bestemte integral* af *f* i $[a,b]$ forstås tallet $F(b)-F(a)$. Man skriver:

(14) $$\int_a^b f(x)\,dx \;=\; \left[F(x)\right]_a^b \;=\; F(b)-F(a)$$

Bemærkning 15

Det skal bemærkes, at (14) er *veldefineret*, dvs. at det tal man får frem er *uafhængig* af valget af stamfunktion. Lad os sige, at $G(x)=F(x)+k$ er en anden stamfunktion.

(15) $$G(b)-G(a)=\left(F(b)+k\right)-\left(F(a)+k\right)=F(b)+k-F(a)-k=F(b)-F(a)$$

Det viser at differensen giver det det samme uanset hvilket stamfunktion, man vælger. Årsagen hertil er at konstanten går ud i beregningerne!

Sætning 16

Lad *f* være en funktion, som er kontinuert og ikke-negativ i intervallet $[a,b]$. Da har punktmængden *M*, der ligger mellem grafen for *f* og *x*-aksen fra $x=a$ til $x=b$ et areal, som er lig med det bestemte integral:

$$\text{Areal}(M) \;=\; \int_a^b f(x)\,dx$$

Bevis: Ifølge sætning 11 er arealfunktionen en stamfunktion til *f*. Ifølge bemærkning 15 er det ligegyldig hvilken stamfunktion vi vælger, når vi skal udregne det bestemte integral. Dermed kan vi som stamfunktion lige så godt vælge arealfunktionen for *f*.

(16) $$\int_a^b f(x)\,dx=[A(x)]_a^b=A(b)-A(a)=A(b)-0=A(b)=\text{det søgte areal}$$

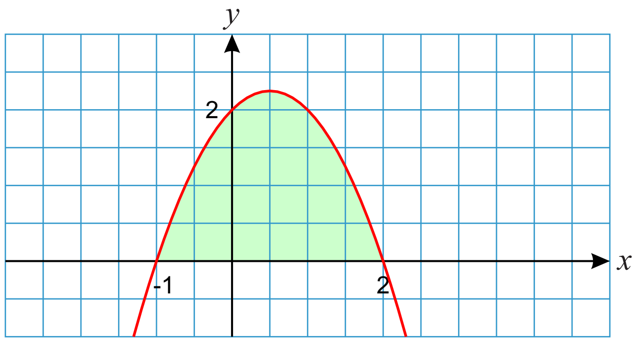
Her har vi brugt at $A(a)=0$, som det fremgår af figuren side 10. Samme figur viser også at $A(b)$ er det søgte areal.

□

Eksempel 17

Givet funktionen $f(x) = -x^2 + x + 2$. Bestem arealet af det område M, som er begrænset af grafen for f og x-aksen.

Løsning: Det er en god idé altid at tegne grafen. Herved får man en idé om hvad man skal gøre og hvor det søgte område ligger. Det er angivet med grønt på figuren.



For det første mangler vi at bestemme de steder grafen skærer x-aksen. Det sker ved at løse ligningen $f(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + x + 2 = 0$. Der er her tale om en andengradsligning, som vi har formler til at løse. Vi vil ikke gå i detaljer med det her, blot nævne at løsningerne er $x = -1$ og $x = 2$. Opgaven går altså ud på at integrere funktionen fra -1 til 2. Opgaven er ikke mere kompliceret, end at vi kan løse den manuelt:

$$
\begin{aligned}
\int_{-1}^{2} \left(-x^2 + x + 2\right) dx &= \left[-\tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{2}x^2 + 2x\right]_{-1}^{2} \\
&= \left(-\tfrac{1}{3}\cdot 2^3 + \tfrac{1}{2}\cdot 2^2 + 2\cdot 2\right) - \left(-\tfrac{1}{3}\cdot(-1)^3 + \tfrac{1}{2}\cdot(-1)^2 + 2\cdot(-1)\right) \\
&= \left(-\tfrac{1}{3}\cdot 8 + \tfrac{1}{2}\cdot 4 + 2\cdot 2\right) - \left(-\tfrac{1}{3}\cdot(-1) + \tfrac{1}{2}\cdot 1 + 2\cdot(-1)\right) \\
&= \left(-\tfrac{8}{3} + 2 + 4\right) - \left(\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{2} - 2\right) \\
&= -\tfrac{8}{3} + 2 + 4 - \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{2} + 2 \\
&= 4\tfrac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Forklaring: Man finder stamfunktionen til integranden under brug af sætning 6. Først indsættes den øvre grænse på x's plads i stamfunktionen. Resultatet anbringes i parentes. Dernæst indsættes den nedre grænse i stamfunktionen og anbringes i parentes. De to parenteser trækkes fra hinanden. Situationen er i princippet simpel, men man skal holde tungen lige i munden for ikke at lave fortegnsfejl undervejs. Svaret på $4\tfrac{1}{2}$ er *eksakt*. Som en kontrol kan man forsøge at lave et overslag over arealet af området ved at tælle tern. Bemærk at hvert tern har bredden ½, så arealet af et tern er ¼.

□

Sætning 18

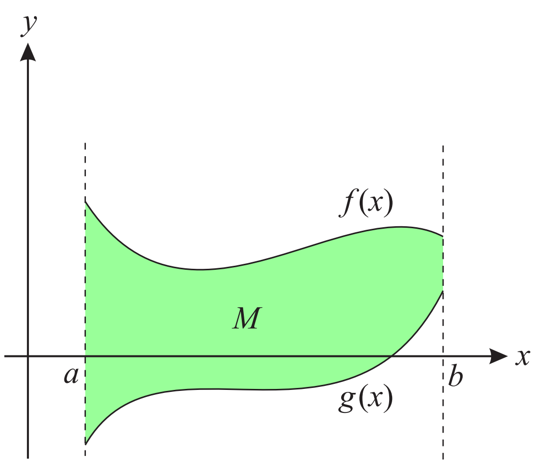
Lad f og g være to funktioner, der er kontinuerte i et interval $[a,b]$ og opfylder at $f(x) \geq g(x)$ for alle x i intervallet. Da har punktmængden M, der ligger mellem de to grafer fra $x = a$ til $x = b$ et areal givet ved følgende:

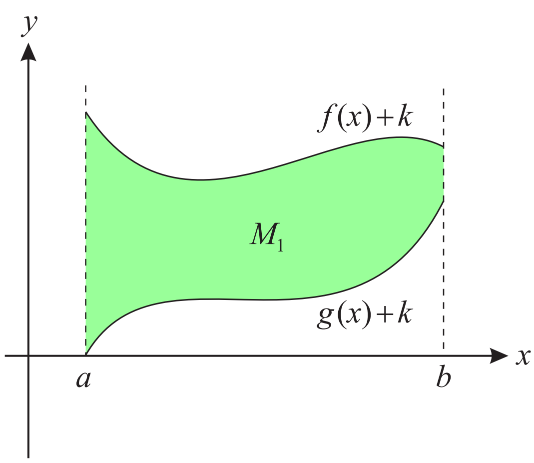
$$\text{Areal}(M) \;=\; \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)\,dx$$

Bevis: Det er indlysende, at hvis både f og g er ikke-negative i det pågældende interval, så er sætningen rigtig, for da kan sætning 16 straks bruges på hver af funktionerne og det søgte areal imellem graferne er da netop arealet under grafen for f minus arealet under grafen for g. Sætning 18 gælder imidlertid også uden antagelsen om at funktionerne er ikke-negative. For at bevise sætningen i dette tilfælde må vi udføre et lille trick. En kontinuert funktion på et lukket interval har en mindsteværdi. Lad os kalde den numeriske værdi af mindsteværdien for $g(x)$ i intervallet $[a,b]$ for k. Hvis vi nu lægger k til hver af funktionerne, så får vi hævet graferne op, så de ligger på eller over x-aksen, og så kan vi pludselig bruge sætning 16.

(17)
$$\begin{aligned}
\int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)\,dx \;&=\; \int_a^b \big(f(x) - g(x) + k - k\big)\,dx \\
&=\; \int_a^b \big((f(x)+k) - (g(x)+k)\big)\,dx \\
&=\; \text{Areal}(M_1) \\
&=\; \text{Areal}(M)
\end{aligned}$$

Forklaring: I første lighedstegn har vi lagt k til og trukket k fra integranden, hvilket ikke ændrer noget. I andet lighedstegn har vi omskrevet en smule. I tredje lighedstegn har vi brugt sætning 16, da $f(x)+k$ og $g(x)+k$ nu er ikke-negative. I fjerde lighedstegn har vi brugt, at de to punktmængder er parallelforskudt i forhold til hinanden og derfor har samme areal. Det ønskede er dermed vist.





□

Eksempel 19

Givet funktionerne $f(x) = \ln(x)$ og $g(x) = x^2 - 6x + 6$. Bestem arealet mellem graferne i intervallet $[2,4]$.

Løsning: Af graferne på næste side ser vi, at $f(x) \geq g(x)$ i det pågældende interval. Derfor kan sætning 18 benyttes. Opgaven kan passende løses med et CAS-værktøj. Her gør vi det i Maple.

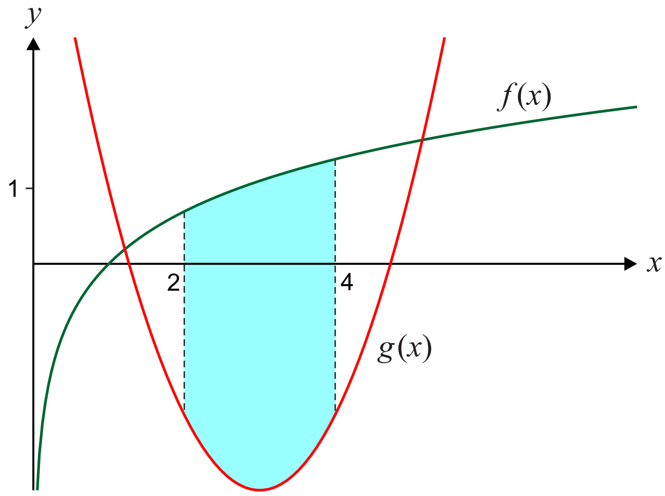
restart

$f(x) := \ln(x)$:

$g(x) := x^2 - 6x + 6$:

$$\int_2^4 (f(x) - g(x))\,dx = 6\ln(2) + \frac{10}{3} \xrightarrow{\text{at 10 digits}} 7.492216417$$

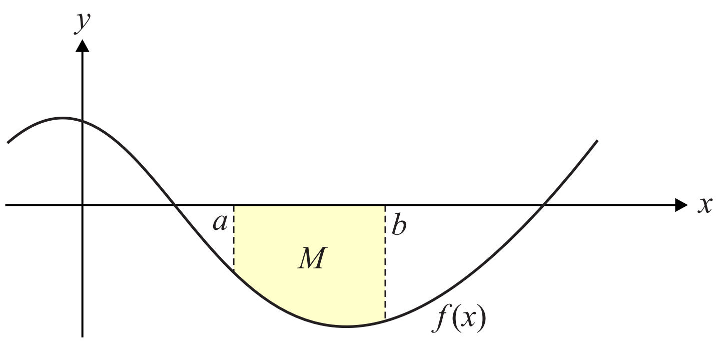
Så arealet mellem graferne i intervallet $[2, 4]$ er 7.49.



□

Hvis grafen for en funktion ligger helt under x-aksen i intervallet $[a,b]$, så er arealet mellem grafen og x-aksen i det pågældende interval lig med *minus* det bestemte integral i intervallet. Dette fremgår af sætning 18: I intervallet $[a,b]$ er punktmængden M begrænset af grafen for den funktion, som er 0 i hele intervallet samt $f(x)$.

(18) $$\text{Areal}(M) = \int_a^b \left(0 - f(x)\right) dx = \int_a^b -f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$



Hvis man har en funktion, hvis graf ligger henholdsvis over og under x-aksen og skal bestemme det areal, som ligger mellem grafen for f og x-aksen, så må man dele problemet op i ”bidder”. Det kan passende gøres via den såkaldte *indskudsregel*, som er ret indlysende, men ganske nyttig.

Sætning 20 (Indskudsreglen m.m.)

Lad f være en funktion, som er kontinuert i et interval I og lad $a,b,c \in I$. Da gælder:

a) $\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$

b) $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$

Bevis: Indskudsreglen a) bevises nemt ved hjælp af definition 14. Lad os regne på højresiden i identiteten:

(19)
$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx &= \big(F(b)-F(a)\big)+\big(F(c)-F(b)\big) \\ &= F(b)-F(a)+F(c)-F(b) \\ &= F(c)-F(a) \\ &= \int_a^c f(x)\,dx \end{aligned}$$

b) vises lige så nemt:

(20)
$$\int_b^a f(x)\,dx = F(a)-F(b) = -\big(F(b)-F(a)\big) = -\int_a^b f(x)\,dx$$

Det bemærkes at sætning 20 holder uanset størrelserne af tallene a, b og c!

□

4. Anvendelser af integralregning

Hvis man kigger i matematikbøger, der bliver anvendt i studier såsom matematik, fysik, kemi, ingeniørvidenskab og økonomi, vil man ofte se den fyldt med integraltegn. Ja selv i biologi støder man på integralregning. Det skyldes at disciplinen integralregning er så kraftigt et værktøj, at det finder anvendelse i så mange sammenhænge. Vi skal kigge på et par anvendelser i dette afsnit. Men først skal vi lige indføre begrebet *middelsum*.

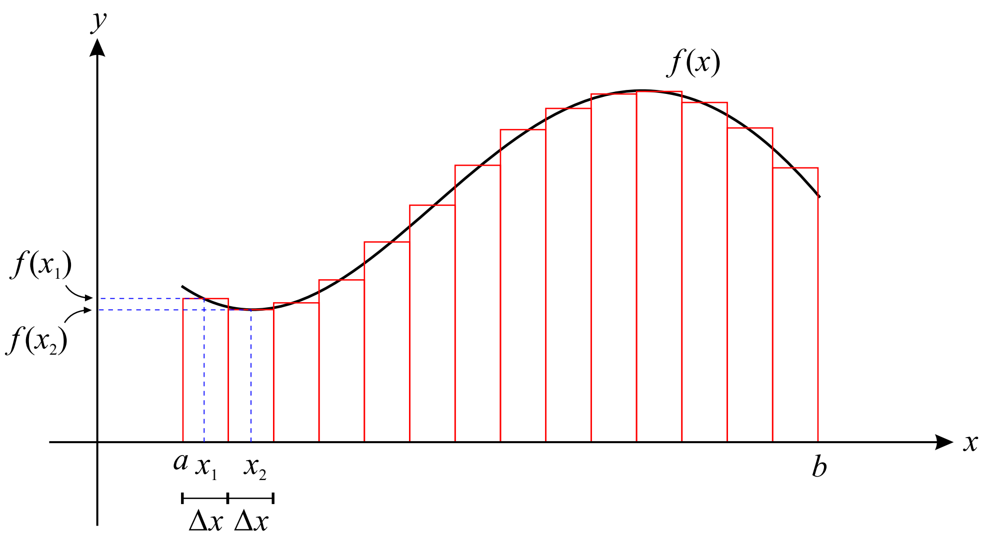
Sætning 21 (Middelsum)

Lad *f* være en funktion, som er kontinuert på det lukkede interval $[a,b]$. Lad endvidere dette interval være inddelt i *n* lige store delintervaller, som dermed hver har en bredde på $\Delta x = (b-a)/n$. Lad x_1 være et *vilkårligt* punkt i det første delinterval, x_2 et vilkårligt punkt i det andet delinterval, etc. Da kaldes summen

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\cdot\Delta x \;=\; f(x_1)\cdot\Delta x + f(x_2)\cdot\Delta x + \ldots + f(x_n)\cdot\Delta x$$

for en *middelsum* for funktionen *f* på intervallet $[a,b]$.

Lad os prøve at få en fornemmelse for situationen i tilfældet med en kontinuert, *ikke-negativ* funktion. Vi tegner grafen for *f* og tegner desuden en række *rektangler*: Det første rektangel går i *x*-aksens retning fra venstre endepunkt til højre endepunkt af det første delinterval og tegnes med en højde på $f(x_1)$ op fra *x*-aksen. Rektanglet har dermed et areal på $f(x_1)\cdot\Delta x$. I det næste delinterval gentages proceduren: Det andet rektangel går i *x*-aksens retning fra venstre til højre endepunkt af det andet delinterval og tegnes med en højde på $f(x_2)$. Dette rektangel har dermed arealet $f(x_2)\cdot\Delta x$. Man fortsætter indtil man har været igennem alle delintervallerne. Situationen ses på figuren herunder.



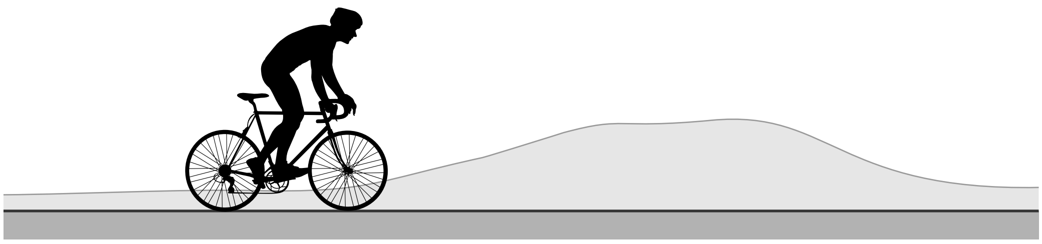
Det er indlysende, at middelsummen for funktionen i dette tilfælde er lig med summen af arealerne af rektanglerne. Det er heller ikke overraskende, at når bredden af delintervallerne går mod 0, så vil summen af arealerne af rektanglerne nærme sig til arealet under grafen. Det kan også udtrykkes ved, at middelsummen nærmer sig til det bestemte integral fra a til b, når $\Delta x \to 0$. Dette resultat kan vises også at gælde for kontinuerte funktioner, som evt. er negative i nogle punkter:

Sætning 22

Lad f være en funktion, som er kontinuert på det lukkede interval $[a,b]$. Da haves at en middelsum nærmer sig til det bestemte integral fra a til b, når $\Delta x \to 0$:

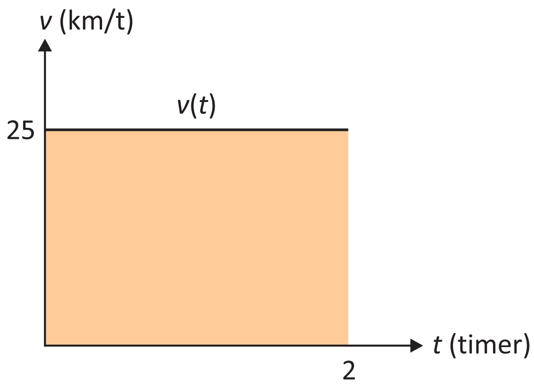
$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\cdot\Delta x \;\to\; \int_a^b f(x)\,dx \quad \text{for} \quad \Delta x \to 0$$

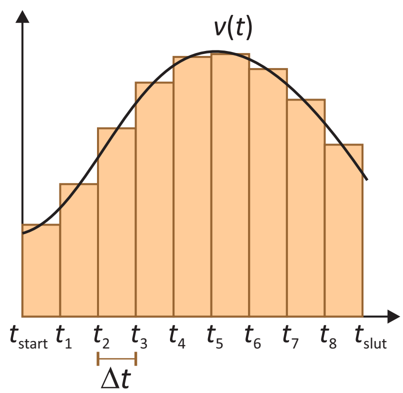
□



Eksempel 23 (Hastighed og strækning i fysisk bevægelse)

De fleste kan regne ud, at hvis man cykler en tur til Tyskland og kører med en fast hastighed på 25 km/t i 2 timer, så har man i alt kørt $25\,\text{km/t}\cdot 2\,\text{timer} = 50\,\text{km}$. Man kan også betragte situationen grafisk ved at afbilde tiden t henad 1. aksen og farten v op ad 2. aksen. Da fås grafen vi ser på figuren nedenfor til venstre. Den tilbagelagte strækning svarer da til *arealet* af rektanglet under den vandrette (t,v)-graf. Et nærliggende spørgsmål er nu, hvad man gør, når hastigheden ikke er fast, men derimod varierer? Man kunne forestille sig, at man delte tidsintervallet $[t_{start}, t_{slut}]$ op i en række delintervaller, hver af længden Δt, hvori man med god tilnærmelse kan betragte hastigheden som konstant.





I hvert af disse små delintervaller ville en tilnærmet værdi for den tilbagelagte strækning da kunne beregnes på den simple måde som arealet af rektanglet, der har Δt og den konstante fart som sidelængder. Situationen er vist på den højre figur. Summen af arealerne af de tynde rektangler er en tilnærmelse til den tilbagelagte strækning. Forfiner man inddelingen af tidsintervallet, så delintervallerne bliver mindre og mindre, så vil strækningen i grænsen blive *eksakt* lig med arealet under (t,v)-grafen.

(21) $$\text{tilbagelagt strækning} = \int_{t_{\text{start}}}^{t_{\text{slut}}} v(t)\,dt$$

Det skal dog siges, at vi her stiltiende har forudsat, at cyklistens hastighed i hele tidsintervallet har været større end eller lig med 0, dvs. at cyklisten ikke cykler tilbage. I fysik lader man normalt funktionen $s(t)$ betegne *positionen* eller *stedfunktionen* til tidspunktet t, forstået på den måde, at vi tænker os lagt et målebånd ud langs ruten. Vi har tidligere indenfor differentialregningen vist, at hvis man differentierer stedfunktionen, så får man hastighedsfunktionen: $s'(t) = v(t)$. Med andre ord: $s(t)$ er en stamfunktion til $v(t)$. Dermed har vi:

(22) $$\int_{t_{\text{start}}}^{t_{\text{slut}}} v(t)\,dt = \left[s(t)\right]_{t_{\text{start}}}^{t_{\text{slut}}} = s(t_{\text{slut}}) - s(t_{\text{start}})$$

Hvis man integrerer hastigheden fra $t = t_{\text{start}}$ til $t = t_{\text{slut}}$, så får man altså cyklens position til tiden t_{slut} minus cyklens position til tiden t_{start}. Har hastigheden under hele bevægelsen været større end eller lig med 0, så er det jo det samme som den kørte strækning, i fin overensstemmelse med (21).

Lad os kigge på et konkret eksempel på en bevægelse. Nogle bevægelser kan tilskrives en smuk hastighedsfunktion, for eksempel det frie fald. Vi vil dog kigge på et eksempel, hvor en cyklist med passende mellemrum har noteret sin hastighed op.

t (sek)	v (m/s)
0	6,0
15	6,4
30	7,3
60	8,1
120	9,2
180	10,0
240	10,5
300	11,0
360	11,2
420	11,0
480	10,6
540	9,4
600	8,5

I dette praktiske tilfælde er der ikke nogen smuk formel for hastighedsfunktionen – man kender den i øvrigt kun hastigheden til et endelig antal tidspunkter. Derfor kan vi aldrig få en eksakt værdi for den kørte strækning, kun et estimat. En mulig fremgangsmåde er at plotte data ind i en (t,v)-graf og forsøge at lave et *fit* med en eller anden funktion. Det er ikke altid lige nemt at nemt at få et fit til at passe tilstrækkeligt godt og måske er man nødt til at dele problemet op i delintervaller. På næste side er problemet løst i CASprogrammet Maple, hvor der er foretaget et fit med et polynomium af 2. grad. Vi ser at grafen for andengradspolynomiet tilnærmer hastighedsdata ret pænt. Derefter integreres hastighedsfunktionen fra starttidspunkt til sluttidspunkt. Det giver godt 5900 meter.

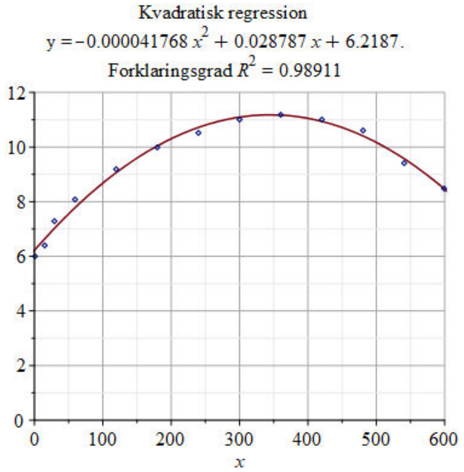
restart

with(*Gym*) :

$X := [0, 15, 30, 60, 120, 180, 240, 300, 360, 420, 480, 540, 600]$:

$Y := [6.0, 6.4, 7.3, 8.1, 9.2, 10.0, 10.5, 11.0, 11.2, 11.0, 10.6, 9.4, 8.5]$:

PolyReg(X, Y, 2, *view* = [0 ..600, 0 ..12])



PolyReg(X, Y, 2, t) =

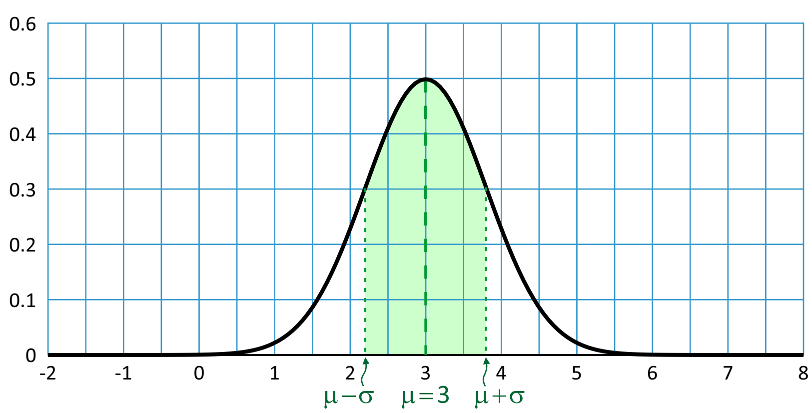
$-0.0000417678626789427\, t^2 + 0.0287874777379994\, t + 6.21870257576310 \xrightarrow{\text{assign to a name}} v(t)$

$$\int_0^{600} v(t)\, dt = 5905.681425$$

Så et estimat af den tilbagelagte strækning er godt 5900 meter.

Eksempel 24 (Normalfordelingen)

Sandsynlighedsregningen er et andet område, hvor man støder på integraler. Vi skal i denne forbindelse kigge på den mest benyttede fordeling overhovedet, nemlig *normalfordelingen*. Det viser sig, at der er rigtig mange data fra den virkelige verden, som fordeler sig efter denne fordeling. Normalfordelingen er specificeret ved to parametre, nemlig en *middelværdi* μ samt en *spredning* σ. På figuren nedenfor er den såkaldte *tæthedsfunktion* for normalfordelingen med middelværdi 3 og spredning 0,8 afbildet.



Tæthedsfunktionen er symmetrisk omkring middelværdien og grafen kaldes ofte for en *klokkekurve*, fordi den ligner en klokke. Løs sagt kan man sige at klokkens bredde er styret af spredningen σ. Man kan vise, at hvis man går spredningen til hver side fra middelværdien, så vil ca. 68,3% af data ligge indenfor dette område. Området er markeret med grønt på figuren. Tæthedsfunktionen skal forstås på den måde, at i de områder, hvor funktionsværdierne er høje er det mere sandsynligt at finde data end i områder hvor funktionsværdierne er lave. Helt præcist så kan man finde sandsynligheden for at finde de normalfordelte data i et givet interval $[a,b]$ ved at udregne integralet af tæthedsfunktionen fra a til b. Det betyder naturligvis, at hvis man integrerer fra $-\infty$ til ∞, så giver det 1 svarende til 100% sandsynlighed for at finde data i hele området:

$$(23) \qquad P(a \le X \le b) \;=\; \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}\,dx \quad \text{og} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}\,dx = 1$$

Der er en lang række eksempler fra det virkelige liv, hvor man har erfaringer for at data tilnærmelsesvist er normalfordelte. Når man producerer komponenter i industrien, så falder komponenterne ikke altid ens ud, selv om det er intentionen. De kan måske have lidt forskellig vægt eller lidt forskellig længde. Når flere små tilfældige og indbyrdes uafhængige effekter er til stede i en produktionsproces, så har man praktisk erfaring for, at produkterne tilnærmelsesvist følger en normalfordeling på en eller flere punkter. Dette er også underbygget teoretisk gennem den såkaldte *centrale grænseværdisætning*, der er for kompliceret til at blive omtalt yderligere her.

Et eksempel på problematikken kan være påfyldning af mælk på mælkekartoner. Hvis man bagefter gør op, hvor meget mælk, der præcist er i hver karton, så vil man se, at det ikke helt er det samme. I nogle kartoner er der måske 997 ml, i andre måske 1009 ml, etc. Tælles der op, hvor mange kartoner, der er med hver antal ml, og er der tilstrækkeligt mange kartoner, så vil man formentligt ende med en tilnærmelsesvist normalfordeling – en klokkekurve, hvor de fleste fordeler sig omkring en middelværdi og så aftager kraftigt, jo længere man er fra middelværdien. Det ved ingeniørerne i industrien. Man kan eventuelt reducere spredningen ved at indføre mere nøjagtige maskiner, og i tilfældet med mælk kan det være nødvendigt at indstille maskinen, så middelværdien er lidt over de 1000 ml mælk, så det er sjældent, at indholdet er under de 1000 ml, som reglerne foreskriver.

Der er mange andre tilfælde, hvor normalfordelingen dukker op, for eksempel er intelligenskvotienter i befolkningen normalfordelte. En anden er mandlige værnepligtiges højde ved session. Vi skal se nærmere på sidstnævnte. Ved at analysere højderne af 13427 værnepligtige i Danmark fra andet halvår af 2006 kan man konkludere, at soldaternes højde med meget stor nøjagtighed følger en normalfordeling med middelværdi 180,1 cm og spredning 6,81 cm. Med disse oplysninger kan besvare en masse spørgsmål, for eksempel:

a) Hvor mange procent af de værnepligtige mænd har en højde på under 170 cm?
b) Hvor mange procent har en højde på mellem 175 cm og 180 cm?
c) Hvor mange procent har en højde på mindst 200 cm?
d) Hvad kan man sige om de 10% højeste værnepligtige mænd?
e) Hvor mange procent har en højde på netop 180 cm?

For at besvare spørgsmålene skal vi have fat i integralet i (23). I første spørgsmål integrerer vi fra $-\infty$ til 170 (enheden underforstået):

a) $$P(X \leq 170) \;=\; \int_{-\infty}^{170} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}\,dx \;=\; 0{,}0690$$

Knap 7% af de værnepligtige mænd har altså en højde under 170 cm.

b) $$P(175 \leq X \leq 185) \;=\; \int_{175}^{185} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}\,dx \;=\; 0{,}53713$$

Omtrent 53,7% af de værnepligtige mænd har en højde mellem 175 og 185 cm.

c) $$P(X \geq 200) \;=\; \int_{200}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}\,dx \;=\; 0{,}00017$$

Knap 2 promille har altså en højde på mindst 200 cm.

d) Dette spørgsmål er lidt sværere at løse, da vi ikke kender grænsen. Opgaven kan dog løses ved at opstille en ligning, hvor den ubekendte er grænsen a :

$$\int_{a}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}\,dx \;=\; 0{,}10$$

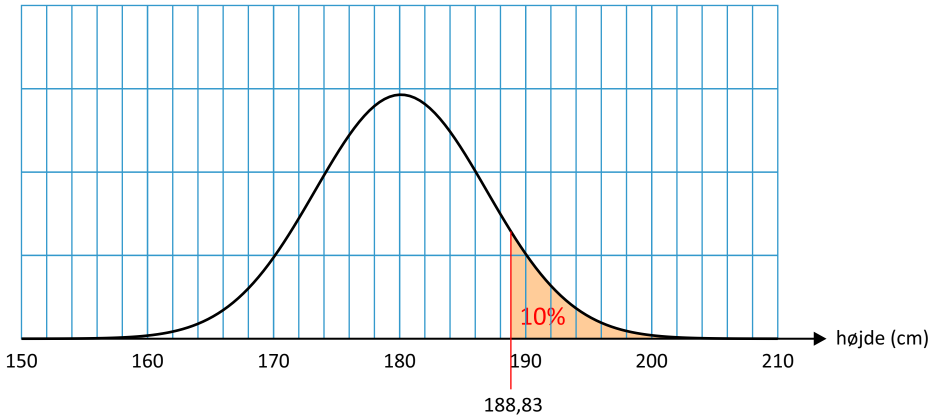
I Maple kan det løses simpelt ved at skrive en solve-kommando. Der foregår dog et meget stort internt regnearbejde, så det tager et antal sekunder at foretage beregningen afhængig, hvor kraftig en computer man har. Kaldet af pakken *RealDomain* nedenfor er ikke nødvendig, men den gør, at man undgår at skulle lede efter den reelle løsning blandt en hel masse komplekse løsninger.

```
restart
with(RealDomain) :
```
$\mu := 180.1 : \quad \sigma := 6.81 :$

$$solve\left(\int_a^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx = 0.1,\ a\right)$$

$$188.8273661$$

Problematikken med arealer kan illustreres ved følgende figur:



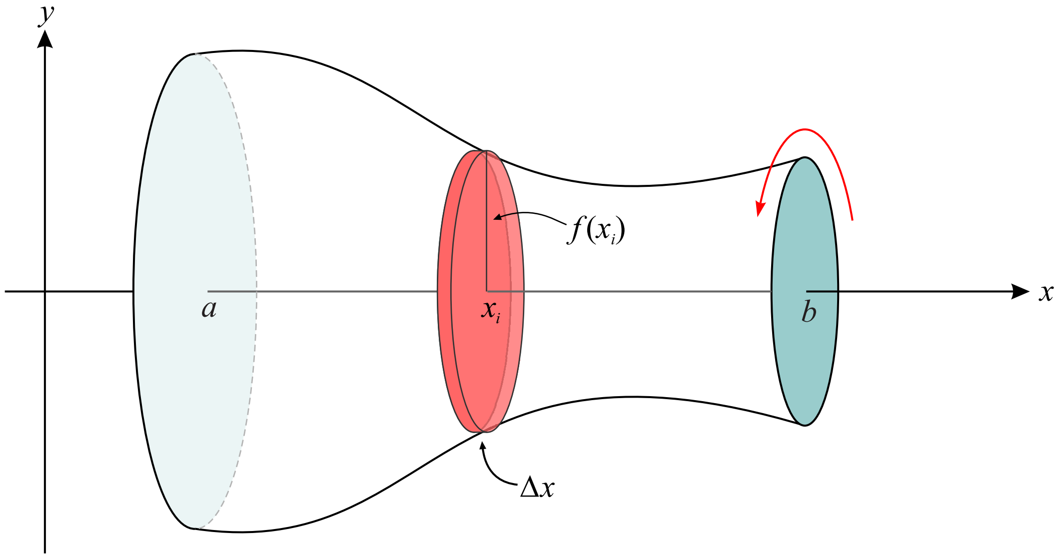
e) Egentligt er dette spørgsmål ikke tilladeligt at stille, når vi som her har at gøre med en *kontinuert fordeling*. Der er nemlig uendelig lille sandsynlighed for at en person har højden *eksakt* 180 cm. Han kunne lige så godt være 180,001 cm, og så ville han jo ikke skulle tælles med. Men der *diskretiseres* ofte i praksis, og sessionslægen angiver kun højden i hele cm. Hvis man derfor med netop 180 cm mener at højden ligger mellem 179,5 cm og 180,5 cm, så kan spørgsmålet besvares efter samme metode som b), og det giver 5,9%.

NB! Svarene på spørgsmålene a) til d) er besvaret ud fra den forståelse at højderne regnes med kommatal. En person med højden 180,4 cm har altså højden 180,4 cm ikke afrundet til 180 cm! Desuden skal det lige nævnes, at der findes diverse indbyggede funktioner i for eksempel Maple, som gør at man kan løse opgaver med normalfordelingen på en snild måde. Da temaet er integraler her, holder vi os dog til ovenstående måder at løse det på!

□

Omdrejningslegemer

Vi skal kigge på en meget nyttig anvendelse af integralregning, nemlig til at bestemme rumfanget af nogle særlige tredimensionale figurer, nemlig de såkaldte omdrejningslegemer. Med et *omdrejningslegeme* menes en figur, som fremkommer ved at rotere grafen for en funktion f i alt 360° grader om en linje. Vi skal specielt kigge på dem, der fremkommer ved at rotere grafen for f omkring x-aksen.



Tegningen ovenfor viser et sådant. Det er ret klart, at man kan tilnærme omdrejningslegemet med en række på i alt n cylindriske skiver, der tænkes liggende stablet langs x-aksen, hver med en tykkelse, som er givet ved $\Delta x = (b-a)/n$. I det i'te delinterval langs x-aksen vælges et vilkårligt punkt x_i. Funktionsværdien i dette punkt er $f(x_i)$ og det bliver radius i den i'te skive. Da rumfanget for en cylinder med radius r og højde h er $\pi \cdot r^2 \cdot h$, fås følgende udtryk for summen af cylindernes volumener:

(24) $$\sum_{i=1}^{n} \pi \cdot \left(f(x_i)\right)^2 \cdot \Delta x$$

Når $\Delta x \to 0$ vil dette udtryk nærme sig til det søgte rumfang V for omdrejningslegemet. Samtidigt har vi, at (24) er en middelsum for funktionen $g(x) = \pi \cdot \left(f(x)\right)^2$. Derfor har vi ifølge sætning 22 følgende:

Sætning 25

Lad f være en funktion, som er kontinuert på det lukkede interval $[a,b]$. Når den punktmængde, som i intervallet $[a,b]$ er begrænset af grafen for f og x-aksen, drejes 360 grader omkring x-aksen, så fremkommer et omdrejningslegeme med rumfanget:

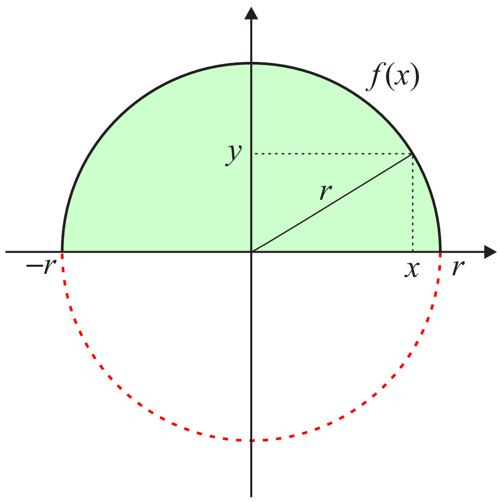
$$V = \pi \cdot \int_a^b \left(f(x)\right)^2 \, dx$$

NB! Det bemærkes, at der her ikke er nogen betingelse om, at f skal være ikke-negativ!

Eksempel 26 (Rumfang af kugle)

Et smukt eksempel på brug af formel 23 fås ved at dreje en halvcirkel 360° omkring x-aksen. Den derved fremkomne punktmængde er en kugle! Vi ved at ligningen for en cirkel med radius r og centrum i (0,0) er $x^2+y^2=r^2$. Hvis vi isolerer y i denne ligning, får vi $y=\sqrt{r^2-x^2}$, hvor vi kun vælger den positive del.

$$
\begin{aligned}
V &= \pi\cdot\int_{-r}^{r}\left(f(x)\right)^2\,dx \\
&= \pi\cdot\int_{-r}^{r}\left(\sqrt{r^2-x^2}\right)^2\,dx \\
&= \pi\cdot\int_{-r}^{r} r^2-x^2dx \\
&= \pi\cdot\left[r^2\cdot x-\tfrac{1}{3}\cdot x^3\right]_{-r}^{r} \\
&= \pi\cdot\tfrac{2}{3}\cdot r^3-(-\pi\cdot\tfrac{2}{3}\cdot r^3) \\
&= \tfrac{4}{3}\cdot\pi\cdot r^3
\end{aligned}
$$



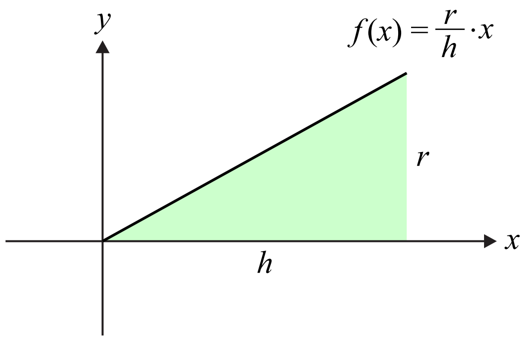
Husk her, at r^2 er en konstant, hvorfor dens stamfunktion er $r^2\cdot x$. Vi har dermed bevist formlen for kuglens rumfang, som vi så ofte før har benyttet!

□

Eksempel 27 (Rumfang af kegle)

En velkendt formel for en kegles rumfang er $V=\frac{1}{3}\cdot h\cdot A$, hvor h er keglens højde og A er keglens grundfladeareal. Hvis r er radius i grundcirklen, så er $A=\pi\cdot r^2$. Dermed skal vi vise, at $V=\frac{1}{3}\cdot h\cdot\pi\cdot r^2$. Det er heldigvis let at vise, for en kegle er et omdrejningslegeme, som fås ved at dreje en ret linje omkring x-aksen. Som det fremgår af figuren nedenfor, er forskriften for den lineære funktion $f(x)=r/h\cdot x$ (bemærk, at linjen går igennem punkterne $(0,0)$ og (h,r)). Det giver følgende:

$$
\begin{aligned}
V &= \pi\cdot\int_0^h\left(f(x)\right)^2\,dx \;=\; \pi\cdot\int_0^h\left(\frac{r}{h}\cdot x\right)^2\,dx \\
&= \pi\cdot\int_0^h\frac{r^2}{h^2}\cdot x^2dx \;=\; \pi\cdot\frac{r^2}{h^2}\cdot\int_0^h x^2dx \\
&= \frac{\pi\cdot r^2}{h^2}\cdot\left[\tfrac{1}{3}\cdot x^3\right]_0^h \;=\; \frac{\pi\cdot r^2}{h^2}\cdot\tfrac{1}{3}\cdot h^3 \\
&= \tfrac{1}{3}\cdot h\cdot\pi\cdot r^2
\end{aligned}
$$



hvorved det ønskede er vist.

□

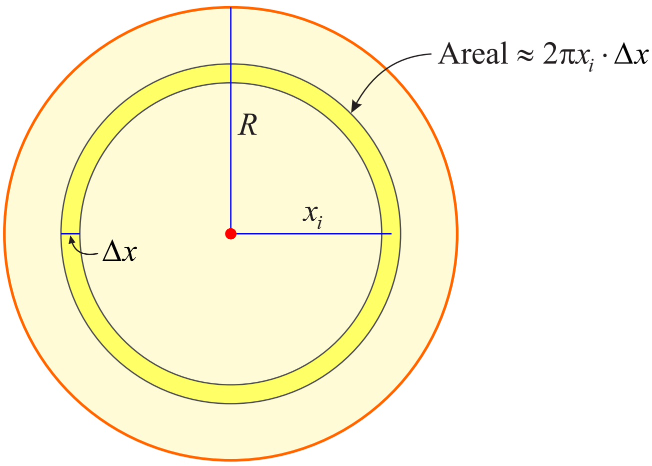
Et sværere eksempel

Vi skal betragte et lidt vanskeligere eksempel på anvendelse af integralregning. I dette eksempel er det hensigtsmæssigt at dele op i cirkulære ringe i stedet for i strimler.

Eksempel 28

På en cirkulær øde ø bor en række indfødte, som antages jævnt fordelt over øens areal. Hver dag skal indbyggerne bevæge sig ind til øens midte for at hente vand fra øens eneste brønd. Spørgsmålet er hvor langt indbyggerne i gennemsnit må bevæge sig for at nå brønden? Øens radius er 6 km.

Overvejelser:
Det er forholdsvist oplagt, at svaret må være mere end halvdelen af radius, fordi der er flere indbyggere på de yderste 3 km af øen, end på de inderste 3 km. Mere kan man ikke umiddelbart sige. Hvis problemet bare havde været af diskret natur, havde det været ret nemt: hvis der for eksempel havde været 5 personer, som boede 4 km fra brønden, 10 personer i afstanden 2 km og 5 personer i afstanden 3 km, så kunne man få svaret ved at udregne det *vejede gennemsnit* af afstandene: $\frac{5}{20} \cdot 4\,\text{km} + \frac{10}{20} \cdot 2\,\text{km} + \frac{5}{20} \cdot 5\,\text{km} = 3,25\,\text{km}$.



Løsning:
Ovenstående idé vil vi imidlertid føre videre til det kontinuerte problem: Vi inddeler øen i nogle smalle ringe, hvorom vi kan sige, at folk, der bor heri, alle har omtrent den samme afstand til brønden i øens centrum. Lad os sige, at afstanden for den i'te ring er x_i, som vist på figuren. Afstanden skal vægtes med den brøkdel, som ringens areal udgør af hele cirklens areal. Ringens areal er (omtrent) lig med omkredsen gange med tykkelsen, dvs. $2\pi x_i \cdot \Delta x$, mens hele skiven med radius R har et areal på $\pi \cdot R^2$. Den omtalte brøkdel er derfor:

$$\text{Arealbrøkdel} = \frac{\text{ringens areal}}{\text{hele skivens areal}} \approx \frac{2\pi x_i \cdot \Delta x}{\pi \cdot R^2} = \frac{1}{R^2} \cdot 2x_i \Delta x$$

For at få en tilnærmet værdi for gennemsnitsafstanden $\overline{x}$ for en øboer, summerer vi over alle ringene, idet vi vægter afstandene med de tilhørende arealbrøkdele:

$$\overline{x} \;\approx\; \sum_{i=1}^{n} \{\text{Afstand fra } i\text{'te ring}\} \cdot \{i\text{'te rings arealbrøkdel}\} \;\approx\; \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \frac{1}{R^2} \cdot 2x_i \, \Delta x$$

Den ubeviste påstand er nu, at hvis man lader inddelingerne blive finere og finere, så nærmer summen sig til et integral og at svaret bliver *eksakt*:

$$\overline{x} \;=\; \int_0^R \left(x \cdot \frac{1}{R^2} \cdot 2x \right) dx \;=\; \frac{2}{R^2} \int_0^R x^2 dx \;=\; \frac{2}{R^2} \left[\tfrac{1}{3} x^3 \right]_0^R \;=\; \frac{2}{R^2} \cdot \tfrac{1}{3} R^3 \;=\; \tfrac{2}{3} R$$

Den gennemsnitlige afstand indtil øens centrum er altså $\frac{2}{3}$ af øens radius, altså 4 km.

□

Appendiks A

I sætning 6 blev præsenteret nogle integrationsregneregler. I dette afsnit skal vi kigge på en anden regel, som går under navnet *integration ved substitution*. Grunden til, at den er henvist til et appendiks er, at de ikke længere bliver omtalt på alle niveauer i gymnasiet.

Sætning A1 (Integration ved substitution)

Lad *f* være en kontinuert funktion. Lad endvidere *g* være en funktion, der er differentiabel med kontinuert afledet g'. Da gælder

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx \;=\; F(g(x))$$

hvor *F* er en stamfunktion til *f*.

Bevis: Som tilfældet var i sætning 6, vil vi bevise sætningen ved at differentiere højresiden og konstatere at det giver integranden på venstre side. Vi skal naturligvis gøre brug af en differentiationsregel, her reglen for hvordan man differentierer en sammensat funktion. Den indre funktion er $g(x)$, mens den ydre funktion er $F(y)$. Man differentierer da den sammensatte funktion ved at differentiere den ydre og sætte den indre funktion ind samt gange med den indre funktion differentieret:

$$\left(F(g(x))\right)' \;=\; F'(g(x)) \cdot g'(x) \;=\; f(g(x)) \cdot g'(x)$$

hvilket beviser det ønskede.

□

Eksempel A2

Sætning A1 kan bruges i en del af de situationer, hvor man skal integrere en sammensat funktion. Lad os sige, at vi skal bestemme stamfunktionen til $\cos(2x-3)$. Lad os sætte $g(x) = 2x-3$. Det er den indre funktion. Den ydre er så $f(y) = \cos(y)$. Bemærk, at det er af pædagogiske årsager, at vi kalder den variable her for *y*. Man kunne lige så godt have skrevet *x*. Stamfunktionen til *f* er $F(y) = \sin(y)$, som det fremgår af listen side 7. Vi udskifter *y* med $g(x) = 2x-3$ og får $F(g(x)) = \sin(g(x)) = \sin(2x-3)$. Endvidere er $g'(x) = 2$. Vi kan skrive:

$$\int \cos(2x-3)\,dx \;=\; \int \tfrac{1}{2} \cdot 2 \cdot \cos(2x-3)\,dx \;=\; \tfrac{1}{2} \cdot \int 2 \cdot \cos(2x-3)\,dx \;=\; \tfrac{1}{2} \cdot \sin(2x-3)$$

Forklaring: I første lighedstegn har vi ganget med ½ og derefter 2 i integranden, hvilket ikke ændrer noget. I andet lighedstegn har vi sat ½ udenfor integraltegnet. Bemærk, at dette kun går med konstanter!! Fordelen ved omskrivningerne er at selve integralet nu har formen på venstre side i sætning A1. 2-tallet svarer til $g'(x)$ og $\cos(2x-3)$ svarer til $f(g(x))$. Sætningen siger, at så er integralet lig med $F(g(x)) = \sin(2x-3)$, hvilket giver det tredje og sidste lighedstegn.

□

Eksempel A3 (Metode 2)

Vi vil her udregne samme integral, som i eksempel A2, blot på en alternativ måde. Denne metode består i at erstatte den indre funktion med en ny variabel *t*. Vi siger også, at vi *substituerer* med *t*. Vi sætter altså $t = 2x - 3$. Der differentieres nu med hensyn til t : $dt/dx = 2$. Vi tillader os at skrive $dt = 2 \cdot dx$, dvs. $dx = \frac{1}{2} \cdot dt$. Herefter udskifter man de enkelte led i det oprindelige integral:

$$\int \cos(2x-3)\,dx \;=\; \int \cos(t) \cdot \tfrac{1}{2} \cdot dt \;=\; \tfrac{1}{2} \cdot \int \cos(t)\,dt \;=\; \tfrac{1}{2} \cdot \sin(t) \;=\; \tfrac{1}{2} \cdot \sin(2x-3)$$

hvilket giver det samme som ovenfor. Man skal huske, at når man begynder at integrere, så må kun den ene af de to variable *x* eller *t* være til stede, og man skal altid ende med at ”oversætte” til *x* igen, som vi gjorde i sidste lighedstegn.

□

Eksempel A4

Vi skal bestemme en stamfunktion til $x \cdot \sqrt{x^2+1}$ og vælger at benytte metode 2, hvor vi substituerer med *t*. Det er oplagt at lade den indre funktion være "problembarnet" under kvadratrodstegnet: $t = x^2 + 1$. Der differentieres med hensyn til *x*: $dt/dx = 2x$, hvilket giver $dt = 2x \cdot dx$, dvs. $dx = 1/(2x) \cdot dt$. Vi kan nu udskifte de relevante størrelser:

$$\int x \cdot \sqrt{x^2+1}\,dx \;=\; \int x \cdot \sqrt{t} \cdot \frac{1}{2x} dt \;=\; \tfrac{1}{2} \cdot \int \sqrt{t}\;dt \;=\; \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} \;=\; \tfrac{1}{3} t^{\frac{3}{2}} = \tfrac{1}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}}$$

idet vi bruger, at $\frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}}$ er stamfunktion til $\sqrt{t}$, som anført i listen side 7. Igen husker vi i sidste lighedstegn at gå tilbage til den variable *x*.

□

Bemærkning A5

Som tidligere nævnt er det generelt set meget mere kompliceret at integrere end at differentiere. I eksempel A4 var vi ”heldige” med at have faktoren *x* ganget på kvadratroden. Uden den ville den variable *x* ikke gå ud i det andet lighedstegn, og vi skal huske, at når man begynder at integrere, så må der kun være én variabel tilstede. Havde opgaven bestået i at bestemme integralet til $\sqrt{x^2+1}$, ville det have været en meget sværere sag. Problemet hører til familien af *hyperbolske* integraler, hvor man må inddrage nogle særlige parameterfremstillinger, for at løse det. Det vil føre alt for vidt at komme ind på det her. Lad os blot lade CAS-værktøjet Maple løse problemet for os:

$$\int \sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2} x \sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2} \operatorname{arcsinh}(x)$$

Sætning A6 (Partiel integration)

Lad f være en kontinuert funktion. Lad desuden g være en funktion, der er differentiabel med kontinuert afledet g'. Da gælder

$$\int f(x)\cdot g(x)\,dx \;=\; F(x)\cdot g(x)-\int F(x)\cdot g'(x)\,dx$$

hvor F er en stamfunktion til f.

Bevis: Som sædvanlig viser vi formlen ved at bestemme differentialkvotienten af højresiden og derefter vise, at den er lig med integranden på venstre side. Vi skal blandt andet gøre brug af reglen for, hvordan man differentierer et produkt af to funktioner.

$$\begin{aligned}\left(F(x)\cdot g(x)-\int F(x)\cdot g'(x)\,dx\right)' &= \left(F(x)\cdot g(x)\right)'-\left(\int F(x)\cdot g'(x)\,dx\right)' \\ &= F'(x)\cdot g(x)+F(x)\cdot g'(x)-F(x)\cdot g'(x) \\ &= f(x)\cdot g(x)\end{aligned}$$

hvor vi har udnyttet at F er en stamfunktion, dvs. $F'(x)=f(x)$.

□

Eksempel A7

Sætning A6 er en udvidelse af sætning 6a) side 8. Sætning 6a) fortalte os hvad man kan gøre når man har et produkt, hvor den ene faktor er en konstant. Så kunne man sætte konstanten udenfor integraltegnet. Reglen for partiel integration sætter os i stand til at integrere en hel stribe af funktioner. Man skal dog være opmærksom på, at der på højre side står et integral Så det skulle meget gerne være sådan, at det nye integral på højre side er nemmere at bestemme, end det man startede ud med! Lad os kigge på eksemplet $x\cdot\sin(x)$. Vi kan egentlig selv vælge hvilken af funktionerne, vi vil kalde for $f(x)$ og hvilken vi vil kalde $g(x)$. Men lad os være lidt forudseende: I integralet på højre side i formlen i sætning A6 indgår $g'(x)$. Vælger man at sætte $g(x)=x$, får man $g'(x)=1$, hvilket giver en chance for at det nye integral bliver simplere. I så fald skal vi sætte $f(x)=\sin(x)$, som har stamfunktionen $F(x)=-\cos(x)$. Vi får:

$$\begin{aligned}\int x\cdot\sin(x)\,dx &= -\cos(x)\cdot x-\int(-\cos(x)\cdot 1\,dx \\ &= -x\cdot\cos(x)+\int\cos(x)\,dx \\ &= -x\cdot\cos(x)+\sin(x)\end{aligned}$$

□

Opgaver

Opgaverne er nummereret således, at det første ciffer angiver det afsnit, opgaven hører til. Opgave 21 er således en opgave 1 i afsnit 2.

Opgave 20

Afgør rigtigheden af nedenstående udsagn ved manuelt at gøre prøve, altså differentiere.

a) $4x^2$ er stamfunktion til $8x$

b) x^2+1 er stamfunktion til $2x$

c) x^3 er stamfunktion til $\frac{1}{4}x^4$

d) e^{2x} er stamfunktion til e^{2x}

e) $x-2\cdot\ln|x|$ er stamfunktion til $1-\dfrac{2}{x}$

f) $3x-7$ er stamfunktion til 3

g) $x^{-1}+5$ er stamfunktion til $-x^{-2}$

Opgave 21

Bestem manuelt stamfunktioner til følgende funktioner:

a) $3x^2$ b) $x+1$ c) x^2-3x d) x^5 e) $\dfrac{3}{x}$

f) $4x^{-2}$ g) $5\cdot\sin(x)$ h) $e^{3x}+x$ i) $1{,}5^x$ j) $2x^3-2x+6$

Opgave 22

Benyt et CAS-værktøj til at bestemme stamfunktioner til følgende funktioner:

a) $6x^2-4x+5$ b) $3x^{-4}+x$ c) $\sqrt{x^2+7}$ d) $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+3}}$

e) $(\sin(4x))^2$ f) $x\cdot e^{2x}$ g) $3\cdot 1{,}7586^x$ h) $x^2\cdot\cos(2x)$

Opgave 23

Når man skal udregne stamfunktioner manuelt, er det i en række tilfælde mest hensigtsmæssigt at *omskrive* en funktion *før* man forsøger at finde stamfunktionen. I denne opgave skal vi se på tilfælde, hvor den funktion, man ønsker at bestemme stamfunktionen til, blot er en skjult potensfunktion. Eks: $x\cdot\sqrt{x}=x^1\cdot x^{\frac{1}{2}}=x^{1+\frac{1}{2}}=x^{\frac{3}{2}}$. Først nu finder vi stamfunktionen ved at benytte den velkendte regel fra side 7, der siger at $\frac{1}{n+1}x^{n+1}$ er stamfunktion til x^n, når $n\neq -1$. Vi har altså at $\frac{1}{3/2+1}x^{3/2+1}=\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}$ er stamfunktion til $x\cdot\sqrt{x}$. Bestem stamfunktionerne til følgende funktioner, idet du først omskriver til en potensfunktion via de velkendte potensregler:

a) $\dfrac{1}{x^2}$ b) $\dfrac{x^2}{\sqrt{x}}$ c) $7x^2\cdot\sqrt{x}$ d) $\sqrt[3]{x}$ e) $x^2\cdot\left(1-\sqrt{x}\right)$

Opgave 24

I denne opgave er der givet en funktion $f(x)$. Du skal da bestemme den stamfunktion F til *f*, hvis graf går igennem et givet punkt, $P(x_0,y_0)$. Regn manuelt.

a) $f(x)=4x$, $P(0,7)$ b) $f(x)=x^2+1$, $P(3,5)$ c) $f(x)=e^{-x}$, $P(0,2)$

d) $f(x)=2x+3$, $P(0,7)$ e) $f(x)=2x^{-3}$, $P(3,5)$ f) $f(x)=2\cdot\cos(x)$, $P(\frac{\pi}{2},0)$

Opgave 25

I denne opgave er der givet en funktion $f(x)$. Du skal da bestemme den stamfunktion F til *f*, hvis graf går igennem et givet punkt, $P(x_0,y_0)$. Benyt CAS værktøj.

a) $f(x)=\sqrt{x}$, $P(1,2)$ b) $f(x)=x\cdot e^{-x}$, $P(0,3)$ c) $f(x)=\sin(3x)$, $P(0,1)$

d) $f(x)=3x^2-3x+2$, $P(2,5)$ e) $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$, $P(0,1)$

Opgave 26 (Svær)

Bestem den stamfunktion til $f(x)=2\cdot x^{-0.5}$, som har $y=\frac{1}{2}x+5$ som tangent.

Hjælp: Lad os sætte $g(x)=\frac{1}{2}x+5$. Bemærk at i den ukendte *x*-værdi x_0 til tangentens røringspunkt skal den søgte stamfunktion $F(x)$ og $g(x)$ både have samme funktionsværdi og differentialkvotient! Man kan begynde med at finde x_0 ved at løse ligningen $F'(x_0)=g(x_0)$, hvilket jo er det samme som at løse $f(x_0)=g(x_0)$. Når x_0 er fundet, kan man bestemme den arbitrære *k*-værdi, så $F(x_0)=g(x_0)$. Tegn situationen for at få overblik.

Opgave 30

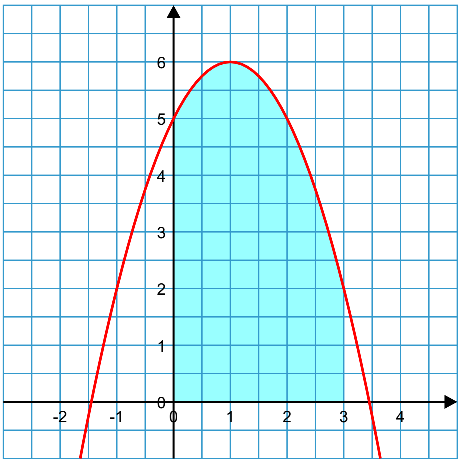
a) Beregn arealet under grafen for funktionen $f(x)=\sqrt{x}$ fra $x=1$ til $x=8$.
b) Beregn arealet under grafen for funktionen $f(x)=\sin(x)$ fra $x=0$ til $x=\pi$.

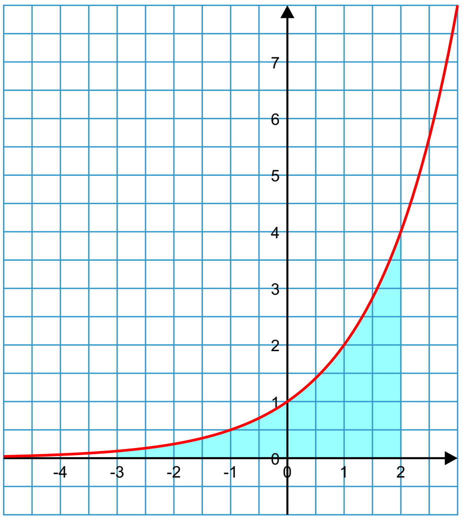
Opgave 31

Givet funktionerne $f(x)=-x^2+8$ og $g(x)=3\cdot 1{,}5^x$. Tegn graferne for de to funktioner i samme koordinatsystem. Bestem *x*-værdierne til skæringspunkterne mellem de to grafer, og benyt det til at bestemme arealet af det område, der er afgrænset af graferne.

Opgave 32

a) På figurerne nedenfor skal du forsøge at sjusse dig frem til arealerne af de skraverede områder ved at tælle tern. Husk at hvert tern på figurerne kun svarer til $\frac{1}{4}$.





b) Det oplyses nu, at forskriften for funktionen hørende til grafen på den venstre figur er $f(x) = -x^2 + 2x + 5$. Benyt oplysningen til at udregne arealet eksakt, altså bestem følgende integral:

$$\int_0^3 (-x^2 + 2x + 5)\, dx$$

c) Funktionen hørende til grafen på den højre figur er $f(x) = 2^x$. Benyt denne oplysning til at bestemme arealet nøjagtigt, altså bestem:

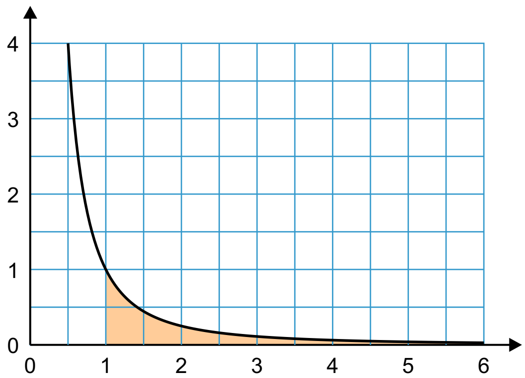
$$\int_{-3}^{2} 2^x\, dx$$

d) Hvad ville du have gjort, hvis du på den venstre figur skulle have bestemt arealet af det område, der ligger i 1. kvadrant og som er begrænset af de to koordinatakser samt grafen for funktionen $f(x) = -x^2 + 2x + 5$?

Opgave 33

Nogle områder er ubegrænsede, men kan alligevel tilskrives et endeligt areal. Dette er for eksempel tilfældet med det markerede område under grafen for funktionen $f(x) = 1/x^2$. Området fortsætter til uendelig. Bestem arealet ved at udregne følgende integral:

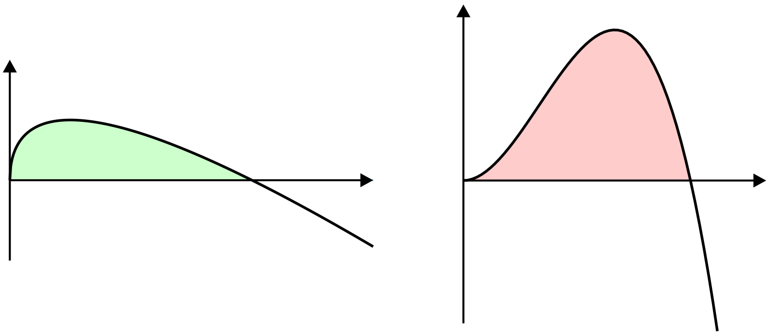
$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\, dx$$



Opgave 34

a) Grafen for funktionen $f(x) = \sqrt{2x} - x$ afgrænser sammen med x-aksen et område, der er skraveret på figuren nedenfor til venstre. Bestem arealet af området.

b) Grafen for funktionen $f(x) = x^2 \cdot (3-2x)$ afgrænser sammen med x-aksen et område. Det er skraveret på figuren nedenfor til højre. Bestem arealet af området.

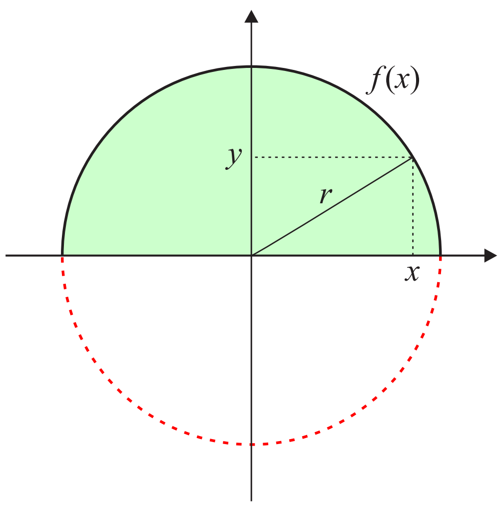


Opgave 35

Man kan bruge integralregning til at udregne arealer af berømte geometriske figurer som for eksempel *cirklen*. Lad os kigge på et punkt (x, y) på en cirkel med radius r. Ifølge *Pythagoras læresætning* indses det nemt, at punktets koordinater vil tilfredsstille ligningen $x^2 + y^2 = r^2$. Isoleres y heri fås $y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$. Der er to løsninger, svarende til $\pm$ i udtrykket på højre side. En funktion kan højst have én y-værdi til hver x-værdi, så vi nøjes i det følgende med at betragte den øverste halvdel af cirklen. Det giver anledning til funktionen $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$.

a) I det følgende skal du sætte $r = 1$, så du arbejder med funktionen $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$. Benyt integralregning til at beregne arealet af halvcirklen med radius 1 og gang med 2 for at få hele cirklens areal. Stemmer det med det du forventer?

b) Nu regner vi generelt, dvs. med radius r. Benyt CAS-værktøjet til at beregne arealet af en cirkel med radius r. Får du den rigtige formel?



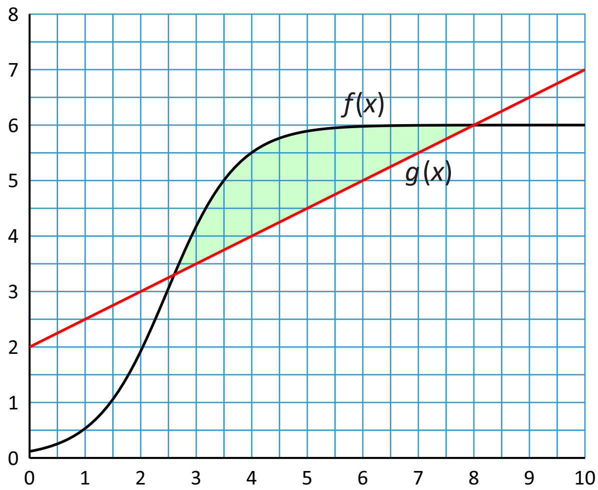
Opgaver 36

Givet en logistisk vækst og en lineær funktion:

$$f(x) = \frac{6}{1+50\cdot e^{-1.58x}} \quad \text{og} \quad g(x) = 0{,}5x+2\,.$$

Du skal bestemme arealet af det område, der afgrænses mellem de to grafer.

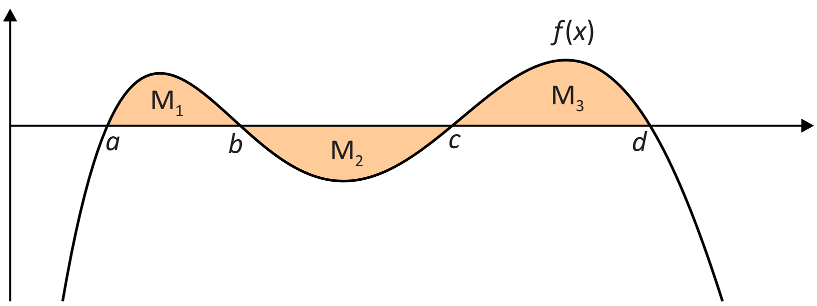
Hjælp: Bestem grænserne for integralet ved at løse ligningen $f(x) = g(x)$. Hvis du bruger Maple, skal du her bruge *fsolve*-kommandoen til at finde løsningerne én ad gangen: Kig på graferne og vælg en startværdi tæt på den rigtige løsning i hvert tilfælde.



Opgave 37

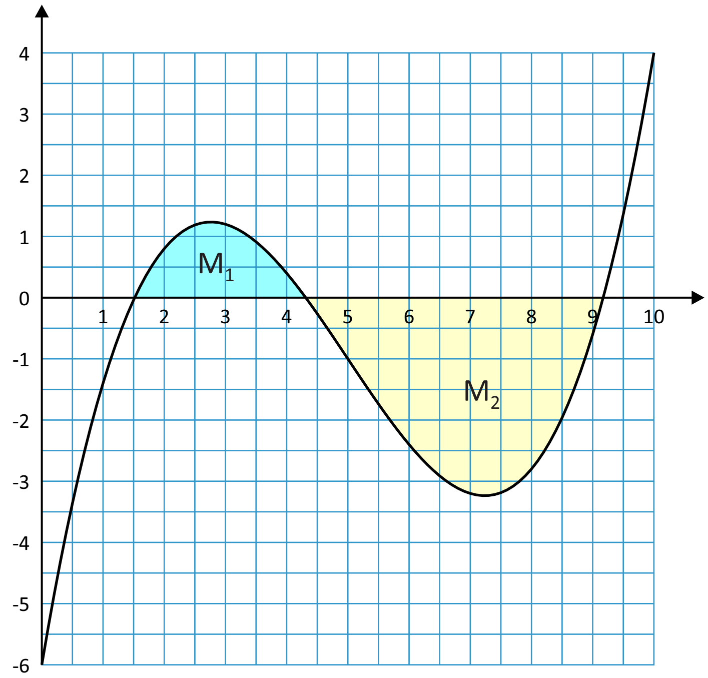
Figuren nedenfor viser grafen for en funktion *f*. Det oplyses, at arealerne af de tre områder M_1, M_2 og M_3, der afgrænses af grafen samt *x*-aksen, henholdsvis er lig med 13,1; 22,1 og 24,4. Bestem følgende integraler idet det oplyses, at a, b, c og d er de punkter, hvor grafen skærer *x*-aksen:

a) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ b) $\displaystyle\int_b^c f(x)\,dx$ c) $\displaystyle\int_a^d f(x)\,dx$



Opgave 38

Grafen for funktionen $f(x) = 0{,}1x^3 - 1{,}5x^2 + 6x - 6$ afgrænser sammen med x-aksen et område beskrevet på figuren nedenfor med bogstaverne M_1 og M_2. Bestem det samlede areal af disse to delområder, idet du først bestemmer grafens skæringspunkter med x-aksen.



Opgave 39-1

Udregn nedenstående bestemte integraler manuelt. Dog er det i orden at bruge en simpel lommeregner til at sætte tal ind og regne ud.

a) $\int_2^5 x\,dx$ b) $\int_1^3 \left(6x^2 - 2x + 3\right)dx$ c) $\int_{-2}^3 4\,dx$ d) $\int_0^1 e^{2x}\,dx$

e) $\int_0^2 \left(1 - x^2\right)dx$ f) $\int_0^4 \sqrt{x}\,dx$ g) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\,dx$ h) $\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$

Opgave 39-2

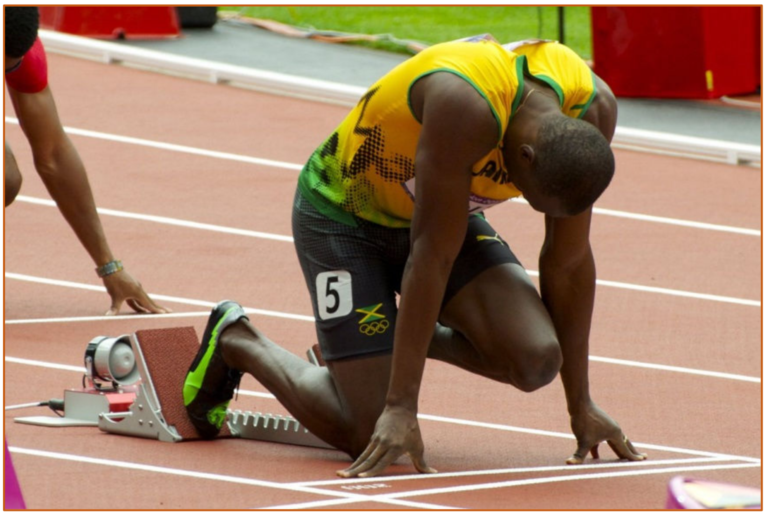
Udregn nedenstående bestemte integraler ved hjælp af et CAS værktøj. Angiv svarene i form af kommatal.

a) $\int_1^{10} x^{-2}\,dx$ b) $\int_{-2}^{10} \left(x^3 - 12x^2 + 2x - 1\right)dx$ c) $\int_1^4 x \cdot e^x\,dx$ d) $\int_0^4 x^3\,dx$

e) $\int_1^4 \sqrt{3x+1}\,dx$ f) $\int_0^5 x \cdot \left(1 - e^{-1.75x}\right)dx$ g) $\int_0^{\pi} \cos(2x)\,dx$ h) $\int_1^8 \frac{4}{x}\,dx$

Opgave 40

Nedenfor er hastighedsdata til forskellige tidspunkter for den jamaicanske løber Usain Bolt, da han satte verdensrekord i 100 meterløb i 2009 i Berlin. Tidspunkterne er fratrukket hans reaktionstid på 0,146 sekunder således, at vi kun tager højde for den egentlige bevægelse.



t (s)	0	0,23	0,54	1,03	1,53	2,30	3,44	4,87	6,46	7,92	9,43
v (m/s)	0	2,26	5,08	6,96	8,38	9,85	11,27	11,82	12,25	12,09	11,80

a) Benyt Maple til – efter samme mønster som i eksempel 23 side 19 – at foretage et fit af (t,v)-data med et *polynomium*. Vælg i den forbindelse en passende *grad* for polynomiet, så polynomiet er et godt fit til data i det betragtede tidsrum. Prøv dig frem indtil du finder en passende grad.

b) Benyt det approksimerende polynomium til at bestemme en god værdi for, hvor langt Usain Bolt var nået efter 1 sekunds løb. Hvad er svaret efter 5 sekunders løb?

c) Som bekendt fås *accelerationen* ved at differentiere hastigheden. Benyt det approksimerende polynomium til at give en værdi for accelerationen til $t = 0{,}50 \text{ sek}$. Samme spørgsmål for tidspunktet $t = 5{,}00 \text{ sek}$.

Bemærkning

Det skal nævnes, at den vurdering af accelerationen, som ønskes foretaget i delspørgsmål c), er noget følsom overfor unøjagtigheder i fittet. Hvis fittet er blot lidt dårligt omkring de angivne tidspunkter, så kan værdien for accelerationen blive noget forkert. Derfor er det vigtigt med en visuel inspektion af, hvor godt fittet passer med datapunkterne omkring tidspunktet! Alternativt kan man benytte sig at *numerisk differentiation*, hvor hældningen af (t,v)-grafen til det givne tidspunkt bestemmes som hældningen af den *sekant*, som går igennem to datapunkter (t_1,v_1) og (t_2,v_2) fra tabellen. Her skal t_1 og t_2 helst være på hver side af det aktuelle tidspunkt.

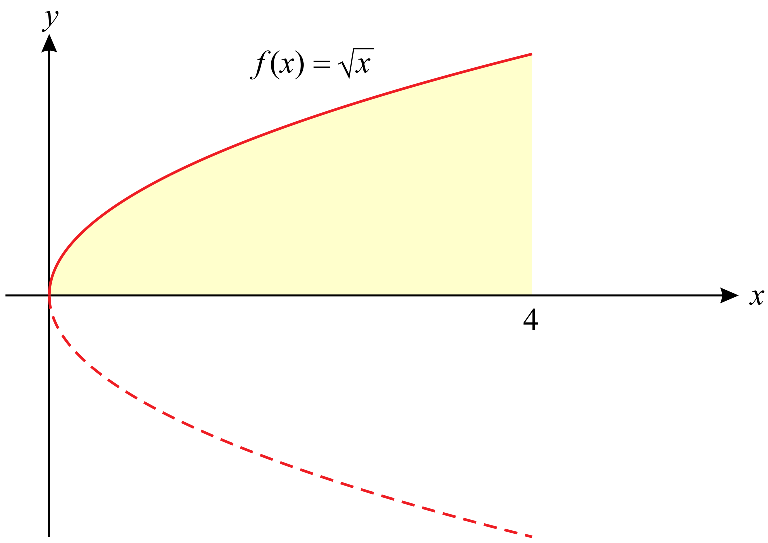
Opgave 41

Når man drejer grafen for funktionen $f(x) = \sqrt{x}$ omkring x-aksen, så får man en såkaldt *paraboloide*. Det er altså en flade i rummet.

a) Bestem hvor stort et rumfang paraboloiden kan rumme fra $x = 0$ til $x = 4$.

b) I delspørgsmål a) skar vi paraboloiden af ved $x = 4$. Hvor skal vi foretage afskæringen, hvis vi ønsker et rumfang på 100?

c) Benyt CAS-værktøjet Maple til at få tegnet paraboloiden i 3D. *Hjælp*: Hvis du kalder pakken *Student*[*Calculus*1] får du rådighed over *SurfaceOfRevolution* kommandoen.



Opgave 42

En kunstner, som samtidig er fritidsmatematiker, har besluttet at lave en særlig tallerken i sit keramikværksted. Det indre af tallerkenen skal være det omdrejningslegeme, som fremkommer ved at dreje funktionen $f(x) = 5 \cdot \exp(0{,}25 \cdot x)$ omkring x-aksen fra $x = 0$ til $x = 3{,}5$. Enheden er cm.

a) Hvor meget vand kan der være i tallerkenen?

b) Benyt CAS-værktøjet Maple til at få tegnet et 3D billede af det indre af tallerkenen.

Opgave 43

Læseren antages her at være bekendt med terminologien fra eksempel 24 fra side 21. Et værksted producerer små metalplader. Det antages, at tykkelsen af de producerede plader er *normalfordelt* med en middelværdi på 2,50 mm og en standardafvigelse (spredning) på 0,10 mm. Køberen kræver, at pladernes tykkelse højst må afvige med 0,15 mm fra middelværdien.

a) Hvor mange procent af metalpladerne må kasseres?

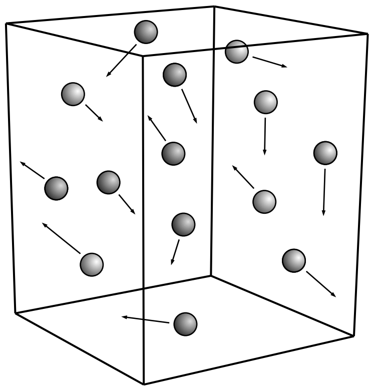
b) (lidt sværere) Firmaets kvalitetskontrol ønsker at forbedre nøjagtigheden, så kun 2% af pladerne skal kasseres. Hvad skal spredningen reduceres til?

Opgave 44 (svær)

Lad os sige, at en professor efter flere års erfaring har observeret, at point-scorerne i en bestemt test er normalfordelte med middelværdi 70 og spredning 15. Hvor skal han lægge bestået-grænsen, hvis han ønsker at 80% af eleverne skal bestå?
Hjælp: Problemstillingen den samme som i eksempel 24 d).

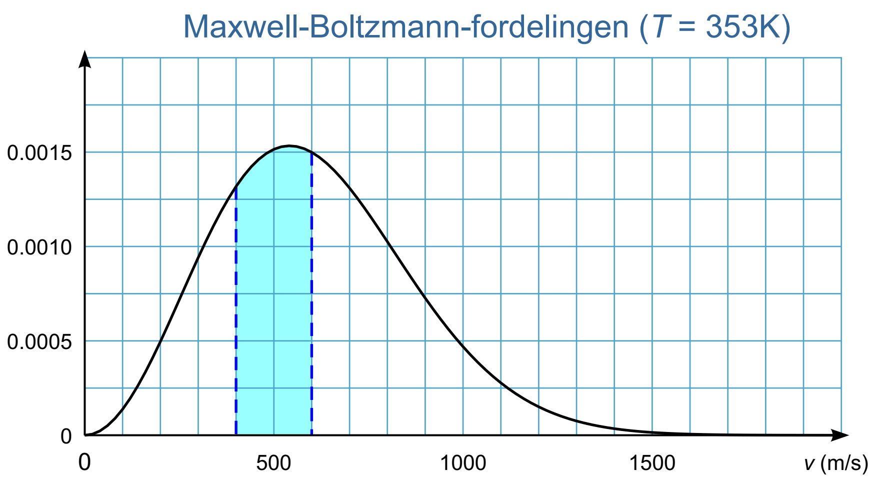
Opgave 45

Det er velkendt, at jo højere temperaturen i en gas er, jo hurtigere bevæger gasmolekylerne sig. Her burde man egentligt sige: jo højere temperatur jo højere er *gennemsnitsfarten*, for molekylerne i en gas med en given temperatur har nemlig meget forskellig fart. I den fysiske/kemiske disciplin *termodynamik* viser man, at molekylernes fart har en såkaldt *Boltzmann-fordeling*. Det er en sandsynlighedsfordeling, som kan beskrives ved en såkaldt *tæthedsfunktion*, som er defineret for hastigheder v i intervallet $[0,\infty[$.



$$f(v) \;=\; 4\pi\cdot\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\cdot v^2\cdot e^{-\frac{mv^2}{2kT}} \qquad \text{(Maxwell-Boltzmann-fordelingen)}$$

hvor m er molekylmassen, $k = 1{,}380658\cdot 10^{-23}$ J/K er Boltzmann-konstanten og T er temperaturen i Kelvin. Grafen for tæthedsfunktionen for gassen Ne-20 ved 80°C, dvs. 353 K, er afbildet på figuren nedenfor. Hvis tæthedsfunktionen integreres fra en fart v_1 til en anden fart v_2, så får man, hvor stor en brøkdel af molekylerne, som har en fart *imellem* i to givne hastigheder.



a) Vis at 29,6% af Ne-20 molekylerne i en gas med temperaturen 353 K har en fart mellem 400 m/s og 600 m/s. Det oplyses at $m = 20{,}0237\,\text{u} = 3{,}32502\cdot 10^{-26}$ kg .
b) Hvor stor en brøkdel af Ne-20 molekylerne har en hastighed på over 1000 m/s?

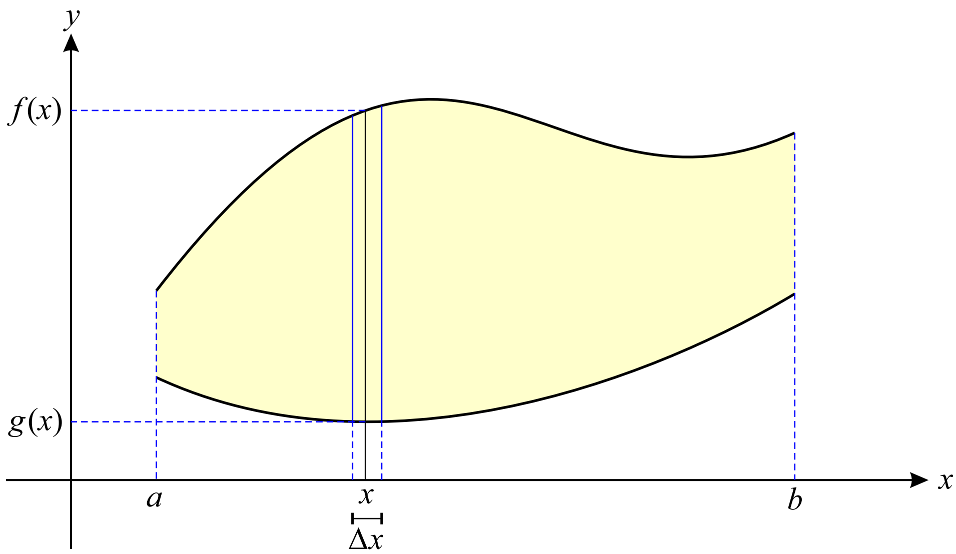
Opgave 46

Der findes også en formel for rumfanget af et legeme, som fremkommer ved at rotere en punktmængde omkring y-aksen. Givet to funktioner f og g, som begge er kontinuerte på det lukkede interval $[a,b]$ og som desuden opfylder $f(x) \geq g(x)$ i hele dette interval. Antag desuden at $a \geq 0$. Da gælder følgende formel for rumfanget af det legeme, som fremkommer ved at dreje punktmængden $M = \{(x,y) \mid a \leq x \leq b \wedge g(x) \leq y \leq f(x)\}$ i alt 360 grader omkring y-aksen:

$$V = 2\pi \cdot \int_a^b x \cdot \left(f(x) - g(x)\right) dx$$

a) Bevis ovenstående formel.

Hjælp: Kig på figuren nedenfor, hvor punktmængden M skæres op i tynde lodrette strimler. Hvordan kommer det til at se ud, når denne strimmel roteres omkring y-aksen, og kan du finde en tilnærmet værdi for rumfanget af den roterede strimmel? Summer derefter over alle strimlerne og lad $\Delta x \to 0$.



Opgave A1

Benyt integration ved substitution til manuelt at udregne nedenstående integraler.

a) $\int \sin(5x-4)\,dx$ b) $\int \frac{4x}{x^2+1}\,dx$ c) $\int 8x \cdot \cos(2x^2+7)\,dx$

d) $\int e^x \cdot \sqrt{e^x+1}\,dx$ e) $\int \frac{e^{\sqrt{x}+4}}{\sqrt{x}}\,dx$ f) $\int e^{k \cdot x}\,dx$ (k er en konstant)

g) $\int \sin(x) \cdot (\cos(x))^4\,dx$ h) $\int e^x \cdot \sin(e^x)\,dx$ i) $\int (3x^2+7) \cdot (x^3+7x+8)^5\,dx$

Opgave A2

Benyt partiel integration til manuelt at udregne nedenstående integraler. *Hjælp*: Når du skal vælge hvilken funktion, du vil lade være $f(x)$ og hvilken funktion, du vil lade være $g(x)$, så tænk på, at det integral, som kommer ud på højre side i formlen i sætning A6 helst skal være simplere at løse end det integral, du starter ud med på venstre side i formlen.

a) $\int x \cdot e^x \, dx$ b) $\int x^4 \cdot \ln(x) \, dx$ c) $\int (2x+5) \cdot \cos(x) \, dx$