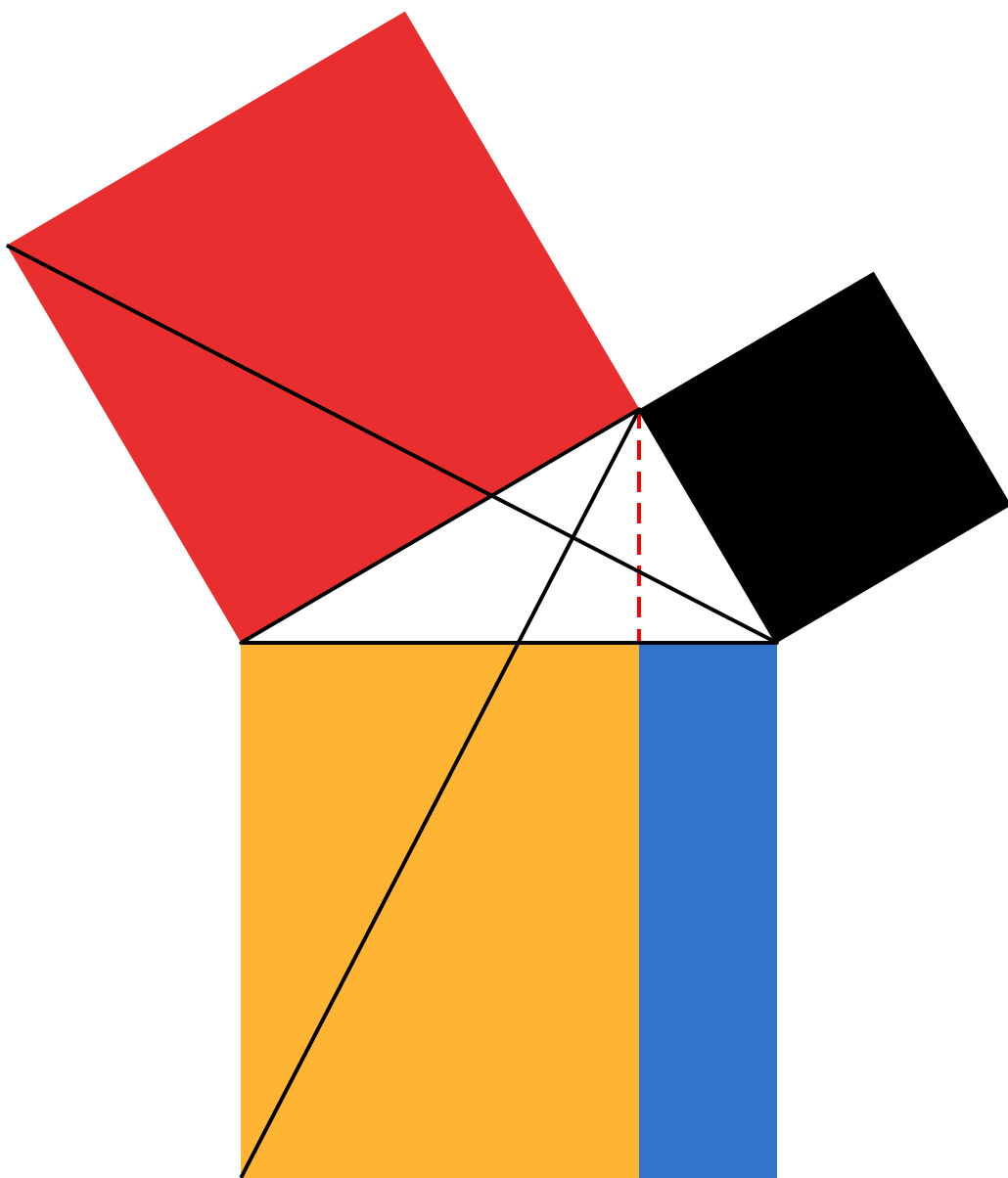


Geometri

Trigonometri



© Erik Vestergaard, juli 2024.

Fejl rettet i (R4) side 12 og i opgaverne 7.2 og 7.3, marts 2025.

Billedliste

Side 12: ©AF Fotografie / Alamy Stock Photo (Euclid of Alexandria).

Side 20: ©iStock.com/ Rudzhan Nagiev (Greek Culture).

Side 22: ©iStock.com/ Tupungato (Pythagoras).

Side 26: Ukendt. Public domain, via Wikimedia Commons (Claudius Ptolemæus).

Side 57: ©iStock.com/ ONYXprj (Maler på stige).

Side 58: ©iStock.com/ Anton Aleksenko (Cheopspyramiden).

Side 61: ©iStock.com/ shemoto (Cykelrytter).

Side 72: Bernardo Strozzi, Public domain, via Wikimedia Commons.

(Maleri af den italienske maler Bernardo Strozzi (1581-1644). Malet i 1635. Titlen er: *Eratosthenes som lærer i Alexandria*).

(https://commons.wikimedia.org/wiki/File:PSM_V78_D326_Ptolemy.png)

S. 73-74: Thomas Bugge. Beskrivelse over den Opmaalings Maade som er brugt ved de danske geographiske Karter; Med tilføjet trigonometriske Karte over Siælland og de der henhørende Triangler, beregnede Longituder og Latituder; samt astronomiske Observationer. Gyldendals Forlag, København 1779. Materialet er fri af ophavsret. Kortet fra Det Kongelige Bibliotek.

Side 76: ©iStock.com/ iliffd (Peterspladsen).

Side 76: ©iStock.com/ Photitos2016 (Kolonnade på Peterspladsen).

Side 77: ©iStock.com/ bauhaus1000 (Del af graveret antik illustration fra 1851 af Peterskirken og Peterspladsen).

Side 79: ©iStock.com/ Michael Blanki (Detaljer fra Hassan II Moskeen i Casablanca, Marokko).

Side 82: Ali Sabbagh, CC0, via Wikimedia Commons (Katedralen Notre Dame de Paris, France).

Side 85: ©iStock.com/ geogif (Geometri i gotisk katedral i Magdeburg).

Indholdsfortegnelse

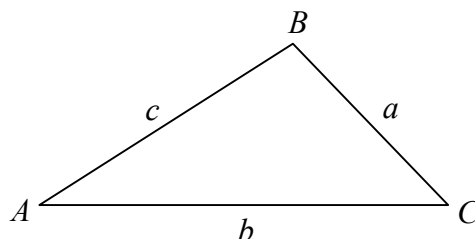
1. Forord	5
2. En trekant og dens størrelser	5
3. Flere begreber i geometrien	8
4. Kongruens og lighedannethed	11
5. Grundlæggende regler	12
6. Vinkelsummen i en trekant	13
7. Ensvinklede trekanter	14
8. Konstruktion med passer, lineal og vinkelmåler	17
9. Centervinkler og periferivinkler	20
10. Pythagoras' sætning	22
11. Trigonometri via retvinklede trekanter	26
12. Trigonometri via enhedscirklen	30
13. Vinkler i radianer	32
14. Cosinusrelationerne og sinusrelationerne	33
Opgaver	41
X-opgaver	69
Links	89
Litteratur	89

1. Forord

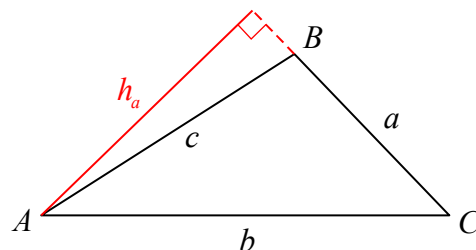
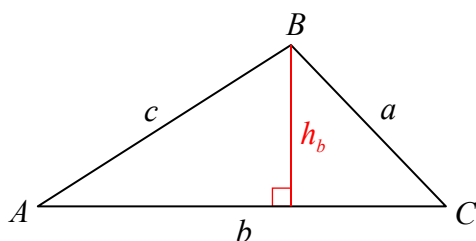
Geometri er ikke underligt en af de ældste grene af matematikken. Det er visuelt og handler om figurers form og rummets natur. Emnet udsprang fra blandt andet praktiske problemer fra landmåling, og dets navn er afledt af græske ord, som betyder *jordmåling*. Siden blev emnet udvidet kraftigt til at indeholde selv meget abstrakte problemstillinger. I denne note skal vi først se på trekanter og de forskellige størrelser, som hører til dem. Blandt andet skal vi give et bevis for den alment velkendte *Pythagoras læresætning* for retvinklede trekanter. Dernæst skal vi indføre de trigonometriske funktioner sinus, cosinus og tangens og bevise *cosinus-* og *sinusrelationerne*, som kan bruges til at bestemme sider og vinkler i generelle trekanter. Beviserne kan eventuelt tjene som glimrende eksempler for en gymnasieelevs første møde med begrebet *bevis*, da emnet er så konkret og visuelt. Undervejs i noten skal vi også se lidt på konstruktion af trekanter med passer og lineal, da det er nyttigt i forbindelse med at forstå hvor mange oplysninger, der er tilstrækkelige til at bestemme en trekant entydigt – dvs. op til kongruens.

2. En trekant og dens størrelser

En *trekant* består blandt andet af tre punkter, som ikke ligger på linje. Disse punkter kaldes trekantens *hjørner* eller *vinkelspidser*, og disse er indbyrdes forbundet med linjestykker, som kaldes trekantens *sider*. Vinklerne i hvert hjørne angives normalt med store bogstaver, fx A , B og C . Siderne overfor hver vinkel betegnes normalt med de tilsvarende små bogstaver a , b og c . De kaldes undertiden også for henholdsvis BC , AC og AB .

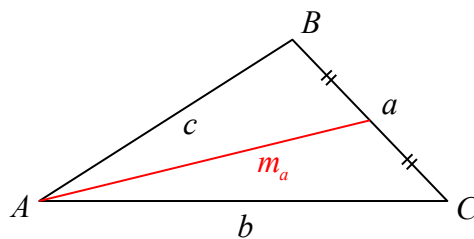
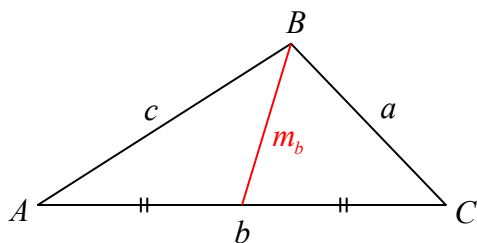


Til en trekant hører også *højder*, *medianer* og *vinkelhalveringslinjer*. Fra hvert hjørne kan man tegne en højde, som er en linjestykke, som udgår fra hjørnet og står vinkelret på den modstående side. På figuren herunder til venstre er vist højden h_b fra B vinkelret ned på siden b . Den højre del af figuren viser, at højden h_a falder udenfor trekanten. Man forlænger siden BC lidt, så man kan tegne højden vinkelret ned på denne linje.



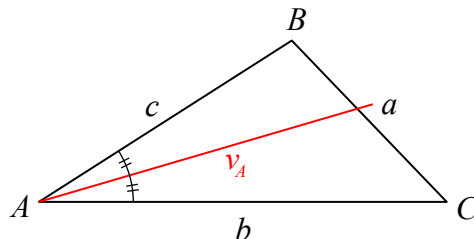
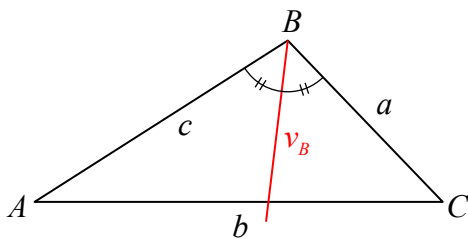
Bemærk, at vi i daglig tale ofte vil identificere en side i en trekant med dens længde, så hvis vi for eksempel siger, at ”siden a er 5”, så mener vi, at *længden* af siden a er 5.

Nu til *medianerne*: Fra ethvert hjørne i en trekant går der et linjestykke ned på midtpunktet af den overforliggende side. Disse kaldes trekantens *medianer*. Figuren nedenfor viser medianerne m_b og m_a ned på henholdsvis siderne a og b .

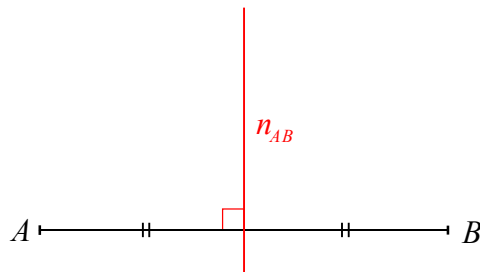
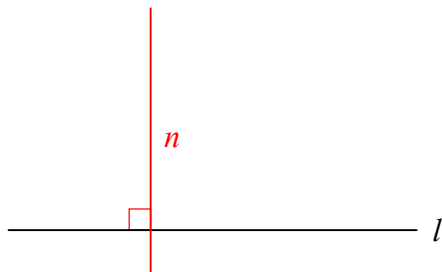


De små dobbelt-streger indikerer, at linjestykket deler siden i to lige store dele.

Så er der *vinkelhalveringslinjerne*: Hver vinkel i en trekant har en vinkelhalveringslinje, som er den halvlinje, som deler den pågældende vinkel i to lige store dele. Det er vist med de to dobbeltstreger.



En *normal* n til en linje l er en linje, som står vinkelret på l . Vi siger også, at n og l er *ortogonale*. Specielt har vi også begrebet en *midtnormal* n til et linjestykke AB . Hermed menes den linje n_{AB} , som står vinkelret på linjestykket AB og som går igennem linjestykkets midtpunkt.

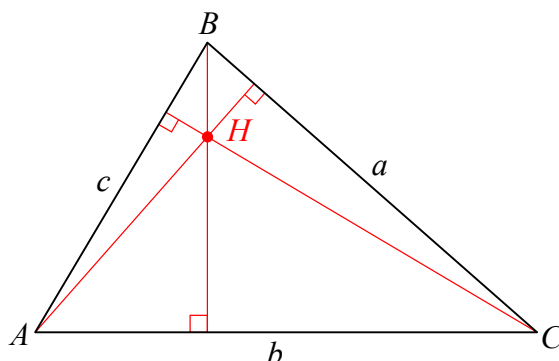


Dermed kan vi også betragte midtnormaler til siderne i en trekant.

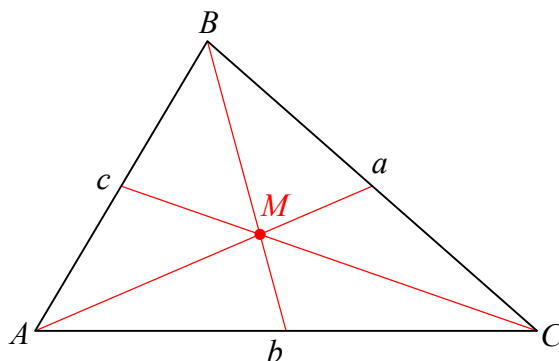
Der gælder en række smukke sætninger for højderne, medianerne, vinkelhalveringslinjerne og midtnormalerne i en trekant. Vi skal angive dem uden beviser; blot illustrere med eksempler. Beviser: Se opgaverne 8.15, 8.16, X3 og X4.

Sætning 1 (Højder)

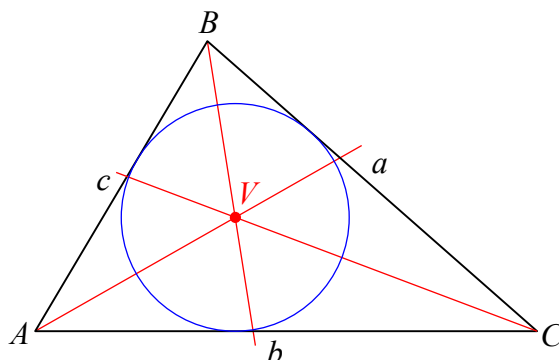
Højderne i en trekant går igennem det samme punkt.

**Sætning 2 (Medianer)**

Medianerne i en trekant går igennem det samme punkt M , og dette punkt deler hver af medianerne i forholdet 2:1 regnet fra vinkelspidsen.

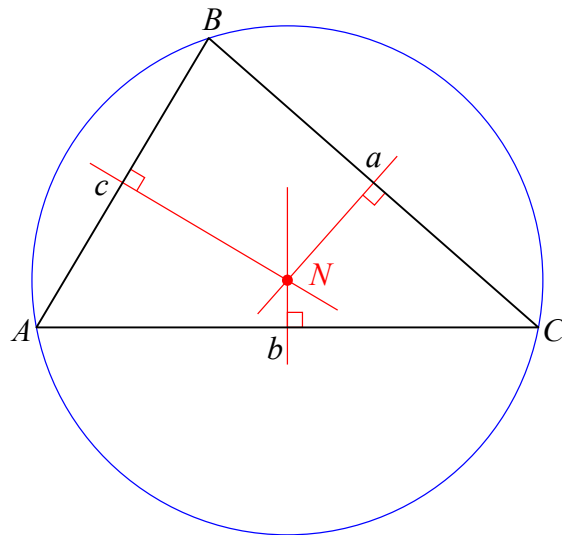
**Sætning 3 (Vinkelhalveringslinjer)**

Vinkelhalveringslinjerne i en trekant går igennem det samme punkt V , og dette punkt er samtidigt centrum for trekantens *indskrevne cirkel*.



Sætning 4 (Midtnormaler)

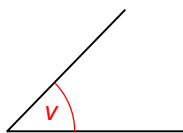
Midtnormalerne til siderne i en trekant går igennem det samme punkt N , og dette punkt er samtidigt centrum for trekantens *omskrevne cirkel*.



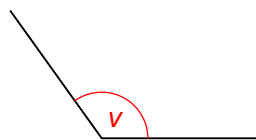
Læseren opfordres til at eksperimentere lidt med disse nye begreber i opgavesektionen. Programmet *GeoGebra* er her meget velegnet, hvis man da ikke lige har en fysisk passer og en lineal.

3. Flere begreber i geometrien

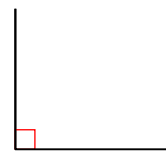
Vi har brug for at indføre flere begreber i geometrien. Først er der vinkler. En vinkel kaldes *spids*, *stump* eller *ret*, alt efter om vinklen er mindre end 90° , større end 90° eller lig med 90° .



Spids vinkel: $v < 90^\circ$

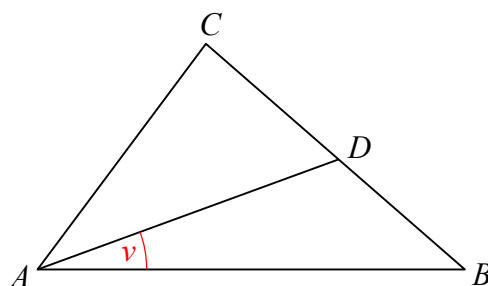


Stump vinkel: $v > 90^\circ$



Ret vinkel: $v = 90^\circ$

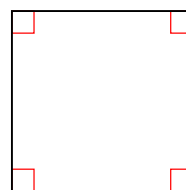
Ofte vil vi angive en vinkel ved hjørnets store bogstav, fx A , B eller C , men nogle gange kan der opstå tvetydigheder, som på figuren øverst på næste side. Hvis man vil referere til vinklen v angivet med en vinkelbue, kan man enten direkte indtegne denne bue, eller man kan angive vinkelbenene med vinkelspidsen i midten: $\angle DAB$, eller også kan man fortælle hvilken trekant, man arbejder i: Vinkel A i trekant ABD .



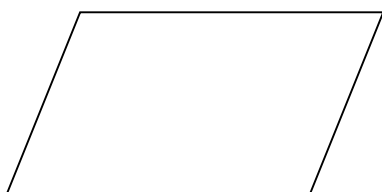
En *polygon* er en mangekant, hvor en trekant blot er et eksempel med tre hjørner. Iblandt firkanter er der nogle forskellige typer:



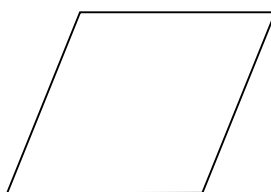
Rektangel



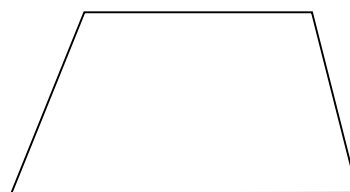
Kvadrat



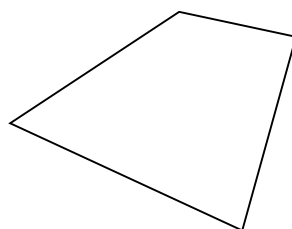
Parallelogram



Rombe



Trapez

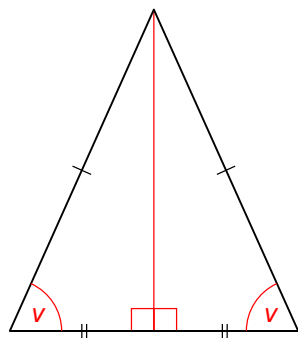


Generel firkant

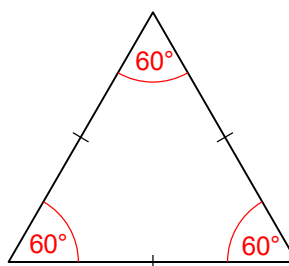
Et *rektangel* er en firkant, hvor alle vinkler er rette. Specielt er modstående sider i et rektangel parallelle og lige lange. Et *kvadrat* er et rektangel, hvor alle sider er lige lange. Et *parallelogram* er en firkant, hvor modstående sider er parallelle. Specielt er modstående sider lige lange. En *rombe* (eller *rhombe*) er et parallelogram, hvor alle sider er lige lange. Et *trapez* er en firkant, hvor mindst to af de modstående sider er parallelle. Endelig er vist en generel firkant uden specielle egenskaber.

Blandt trekantene er der et par specielle tilfælde, som figuren på næste side viser. Der er den *ligebenede* trekant, hvor to sider er lige lange. Her vil højden fra det hjørne, som støder op til de to lige lange sider, dele den modstående side i to lige store dele. De to hosliggende vinkler for denne side vil desuden være lige store. En *ligesidet* trekant er en trekant, hvor alle sider er lige lange. Specielt vil alle vinkler i trekanten være 60° . En *spidsvinklets trekant* er en trekant, hvor alle vinkler er spidse. En *stumpvinklet trekant* er

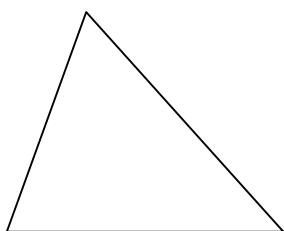
en trekant, hvor en af vinklerne er stump. Endelig er der den *retvinklede trekant*, hvor en af vinklerne er ret, altså 90° .



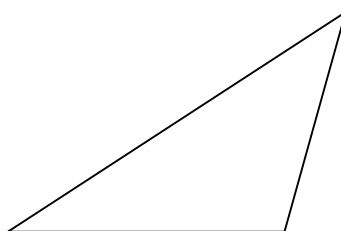
Ligebenet trekant



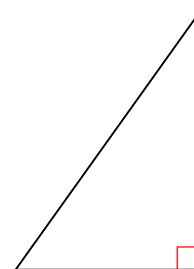
Ligesidet trekant



Spidsvinklet trekant

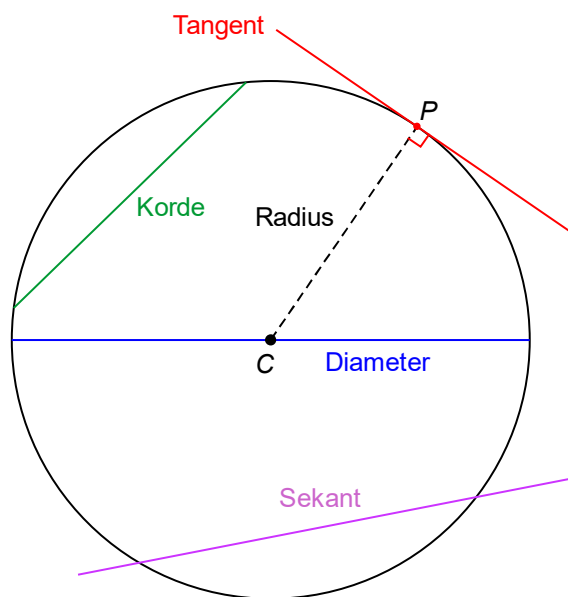


Stumpvinklet trekant



Retvinklet trekant

Mens vi er i gang, kigger vi desuden på cirklen. Her har vi begreber som *diameteren*, der er det linjestykke (eller længden deraf), som forbinder to punkter på cirkelperiferien og som går gennem centrum C . En *korde* derimod behøver ikke gå igennem centrum. En *sekant* er en linje, som går igennem to forskellige punkter på cirklen. En *tangent* til en cirkel er en linje, som rører cirklen i netop ét punkt P , og det kaldes *røringspunktet*. Tangenten har den smukke egenskab, at den står vinkelret på linjen (radius) CP .



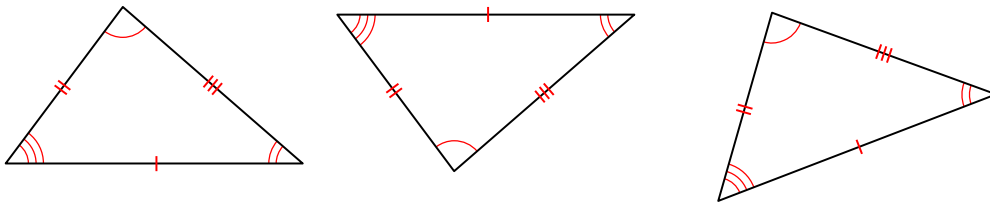
4. Kongruens og ligedannethed

I dette afsnit skal vi betragte begreber, som involverer to eller flere geometriske objekter.

Definition 5 (Kongruens)

To geometriske figurer siges at være *kongruente*, hvis de ved en flytning kan bringes til at dække hinanden.

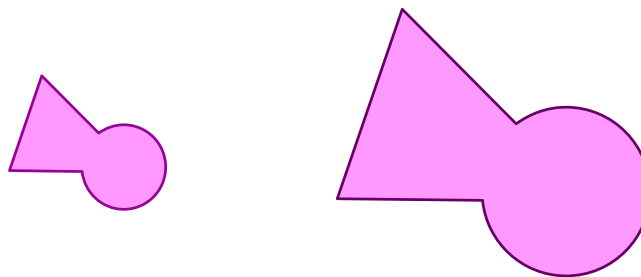
En ”flytning” betyder her, at man må anvende en eller flere af følgende operationer på figuren: Rotation, refleksion og translation (parallelforskydning). For polygoner generelt betyder det, at i to kongruente polygoner vil alle sider og vinkler være parvis ens. På figuren er det illustreret for trekanter.



Begrebet kongruens skal vise sig vigtig i forbindelse med at bevise sammenhænge, som vi snart skal se (se afsnit 8). Nu til et andet begreb.

Definition 6 (Ligedannethed)

To geometriske figurer siges at være *ligedannede*, hvis man kan få den ene figur fra den anden ved en flytning og en skalering. Vi siger, at de to figurer har samme form.



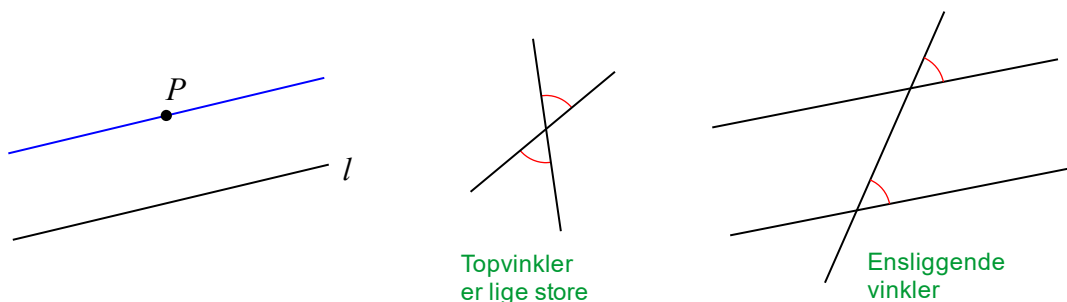
Herover ses to ligedannede plane geometriske figurer, hvor den til højre er skaleret med *skaleringsfaktoren* $k = 2$ i forhold til figuren til venstre. Det betyder, at alle afstande er ganget op med 2. Figuren til højre har derimod 4 gange så stort areal som figuren til venstre. Der gælder følgende sætning, som vi ikke beviser:

Sætning 7

Lad K og L være to ligedannede plane figurer, hvor L er skaleret med skaleringsfaktoren k i forhold til K . Da fås arealet af L ved at gange arealet af K med k^2 .

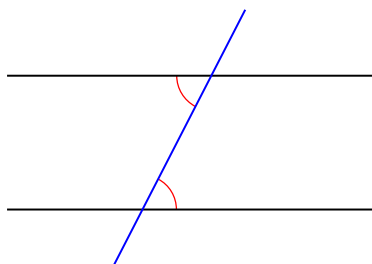
5. Grundlæggende regler

Omkring 300 år før Kristus nedskrev grækeren *Euklid* i sine berømte 13 bøger med titlen *Elementerne* et grundlag for den geometri, man hidtil var nået frem til. Det var en deduktiv teori, som byggede på nogle få *aksiomer* eller *postulater*, som er grundantagelser, der ikke skal bevises. De opfattes som selvindlysende. Man er nødt til at begynde et sted! Ud fra disse postulater beviste Euklid en lang række sætninger. Vi skal selvfølgelig ikke gå så systematisk til værks. Der er imidlertid fire påstande/sætninger, vi vil tage for givet og udnytte i de efterfølgende afsnit.



- (R1) Lad l være en linje og P et punkt, som ikke ligger på l . Igennem P går der da netop en linje, som er parallel med l .
- (R2) Topvinkler er lige store.
- (R3) Hvis to parallelle linjer skæres af en tredje linje, så er ensliggende vinkler lige store.
- (R4) Hvis to linjer skæres af en tredje linje og et par af ensliggende vinkler er lige store, så er de to oprindelige linjer parallelle.

Reglerne (R3) og (R4) er i en vis forstand omvendte af hinanden. Af (R2) og (R3) har man desuden, at hvis en linje skærer to parallelle linjer, så vil de indre vinkler være ens:



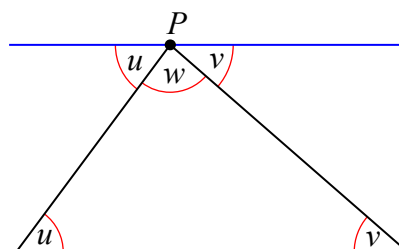
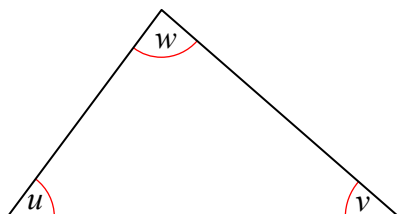
6. Vinkelsummen i en trekant

De fleste elever fra grundskolen kender sætningen nedenfor.

Sætning 8 (Vinkelsummen i en trekant)

Summen af vinklerne i en trekant er 180° .

Bevis: Vi skal gøre brug af de grundlæggende regler fra forrige afsnit. Ifølge (R1) findes der netop én linje, som går igennem hjørnet P og som er parallel med grundlinjen. Ifølge (R2) og (R3) kan vi derfor genfinde vinklerne u og v oppe ved hjørnet P , som det er vist på den højre del af figuren herunder. Da den blå linje gennem P danner en 180° vinkel med P som centrum, har vi umiddelbart, at $u + v + w = 180^\circ$. Dermed er det ønskede vist.

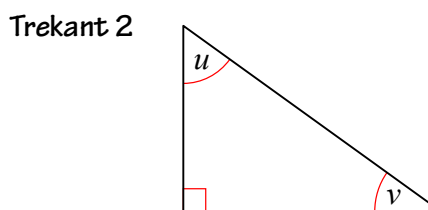
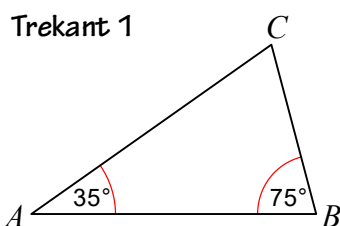


□

Eksempel 9

Betragt de to trekanter på figuren nedenfor.

- Bestem den ukendte vinkel C i trekant 1.
- Bestem et udtryk for vinklen u udtrykt ved vinklen v i den retvinklede trekant 2.



Løsning:

- $C = 180^\circ - A - B = 180^\circ - 35^\circ - 75^\circ = 70^\circ$.
- $u = 180^\circ - 90^\circ - v = 90^\circ - v$. Dette er klart nok, for der er 90° til u og v tilsammen.

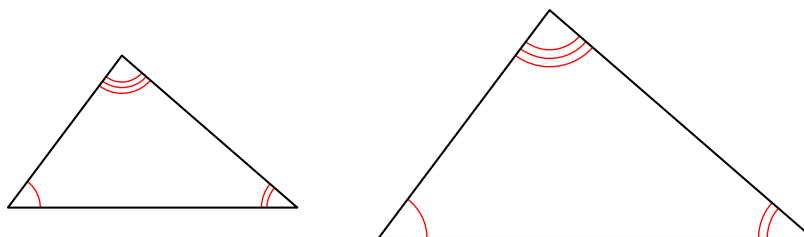
□

7. Ensvinklede trekanter

Vi skal se på et begreb, som er ganske nyttigt i mange sammenhænge:

Definition 10 (Ensvinklede trekanter)

To trekanter siges at være *ensvinklede*, hvis trekanternes vinkler er parvis lige store.



Sætning 11 (Ensvinklede trekanter)

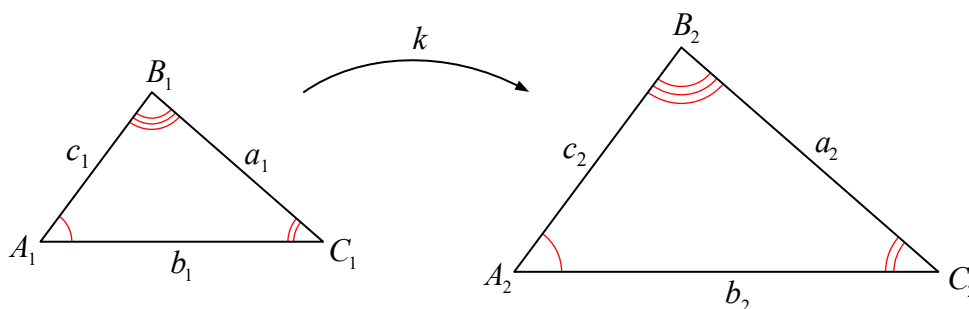
For to ensvinklede trekanter $A_1B_1C_1$ og $A_2B_2C_2$ gælder, at forholdet mellem ensliggende sider er det samme, dvs.

$$(1) \quad \frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = \frac{c_2}{c_1} = k$$

hvor k er en konstant. Det kan alternativt formuleres ved at sige, at man får siderne i trekant $A_2B_2C_2$ ved at gange de respektive sider i trekant $A_1B_1C_1$ med k :

$$(2) \quad a_2 = k \cdot a_1, \quad b_2 = k \cdot b_1 \quad \text{og} \quad c_2 = k \cdot c_1$$

k kaldes her for *skaleringsfaktoren*, *skalafaktoren* eller *forstørrelsesfaktoren*.

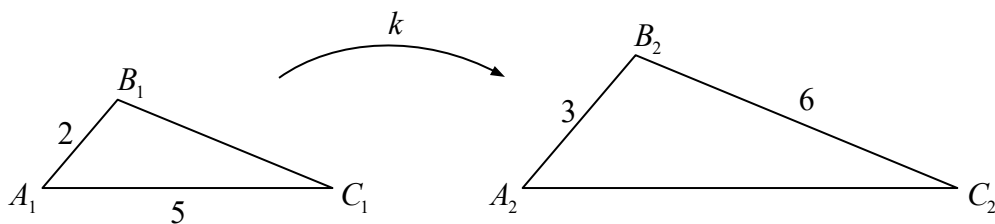


Med ensliggende sider menes her sider, som ligger overfor de vinkler, som er parvis ens. Sætning 11 er overraskende svær at bevise, så det undlader vi. Det generelle tilfælde hænger på konstruktionen af de reelle tal. I øvrigt er ensvinklede trekanter ligedannede og omvendt, jf. afsnit 4. I opgave X2 ser vi på den omvendte sætning til sætning 11.

Vi skal se på nogle eksempler på anvendelser af ensvinklede trekanter.

Eksempel 12

De to trekanter nedenfor oplyses at være ensvinklede. De kendte sider er indtegnet på figuren. Bestem de to ukendte sider i de to trekanter.



Løsning: Vi leder efter et par af ensliggende sider, som begge er kendte. Vi ser, at det er tilfældet for c_1 og c_2 . Det sætter os i stand til at bestemme skaleringsfaktoren k .

$$k = \frac{c_2}{c_1} = \frac{6}{4} = 1,5$$

Når vi går fra den venstre til den højre figur skal vi altså gange med 1,5 og dividere med 1,5, når vi går den anden vej. Dette giver følgende værdier for de to ukendte sider:

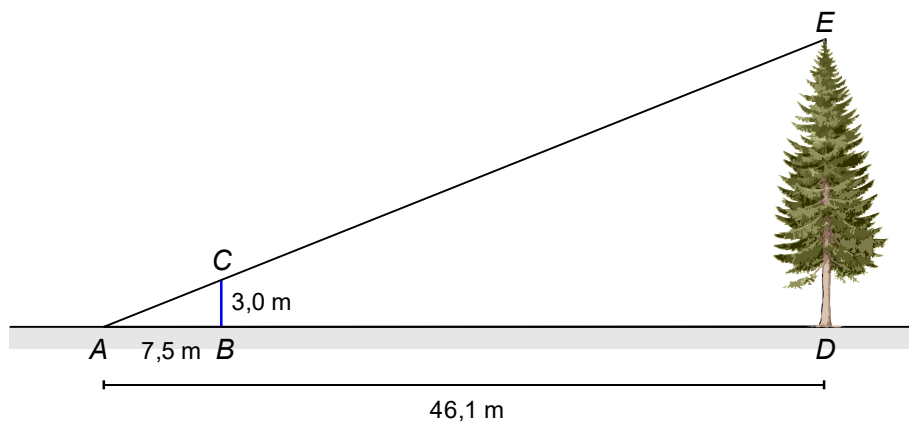
$$b_2 = k \cdot b_1 = 1,5 \cdot 5 = 7,5$$

$$a_1 = \frac{a_2}{k} = \frac{3}{1,5} = 2$$

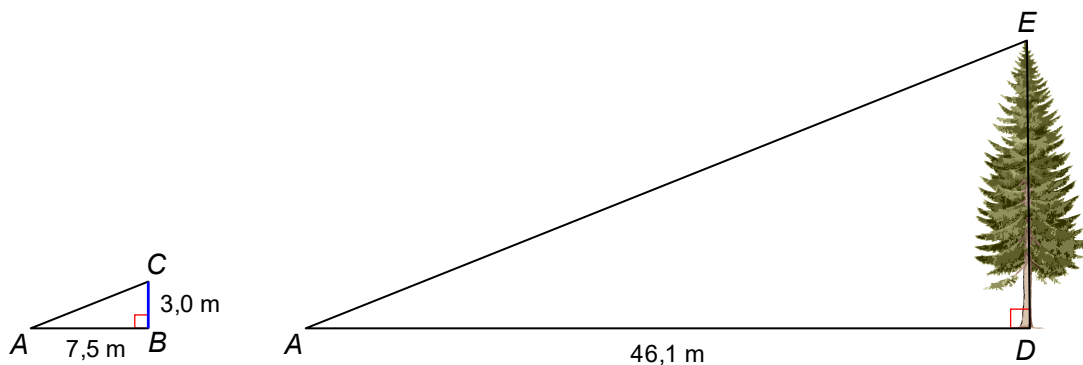
□

Eksempel 13

Højden h af et træ ønskes bestemt. Hvis man vil undgå at skulle kravle op i træet med et målebånd, er det en smart idé at lægge sig ned på jorden og anbringe en stok med kendt længde i en afstand, så toppen af stokken flugter med toppen af træet set fra personen, som ligger ned. Derefter måles de vandrette afstande fra personens øje hen til stokken og fra øjet hen til midten af træstammen. Så vil regning i ensvinklede trekanter kunne give et rimeligt godt estimat for træets højde. Figuren viser nogle konkrete værdier.



For det første indser vi, at trekanterne ABC og trekant ADE er ensvinklede. At vinkel C og vinkel E er ens indses for eksempel ved at betragte linjen AE , som skærer de parallelle linjer BC og DE . Her kan regel (R3) fra afsnit 5 benyttes. Vi har altså følgende situation, når vi adskiller de to trekanter:



Vi kender to ensliggende sider, så vi kan bestemme skaleringsfaktoren, hvorefter højden $h = |DE|$ af træet kan bestemmes:

$$k = \frac{|AD|}{|AB|} = \frac{46,1 \text{ m}}{7,5 \text{ m}} = 6,147$$

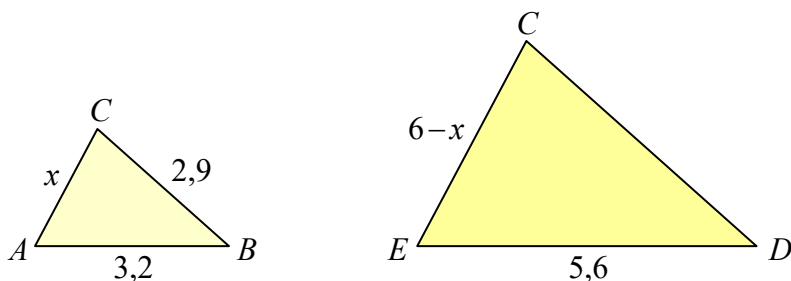
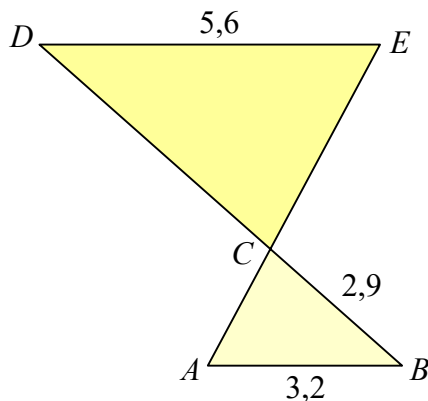
$$h = |DE| = k \cdot |BC| = 6,147 \cdot 3,0 \text{ m} = 18,4 \text{ m}$$

□

Eksempel 14

Lad os kigge på et lidt mere kompliceret eksempel. Betragt figuren nedenfor til højre, hvor de enkelte kendte længder er indtegnet. Det oplyses, at AB og DE er parallelle og at $|AE| = 6$. Bestem de resterende sider i trekantene ABC og CDE .

Løsning: Der er klart tale om to ensvinklede trekanter, som det fremgår af reglerne (R2) og (R3) i afsnit 5. Lad os kalde længden af AC for x . Dermed har vi $|CE| = 6 - |AC| = 6 - x$. Herefter drejes den øverste trekant CDE 180 grader, så ensliggende sider kommer til at ligge over for hinanden. Det er vist på figuren nederst. Skaleringsfaktoren k kan vi nu beregne $k = |ED|/|AB| = 5,6/3,2 = 1,75$.



Vi kan bestemme x ved at løse følgende ligning:

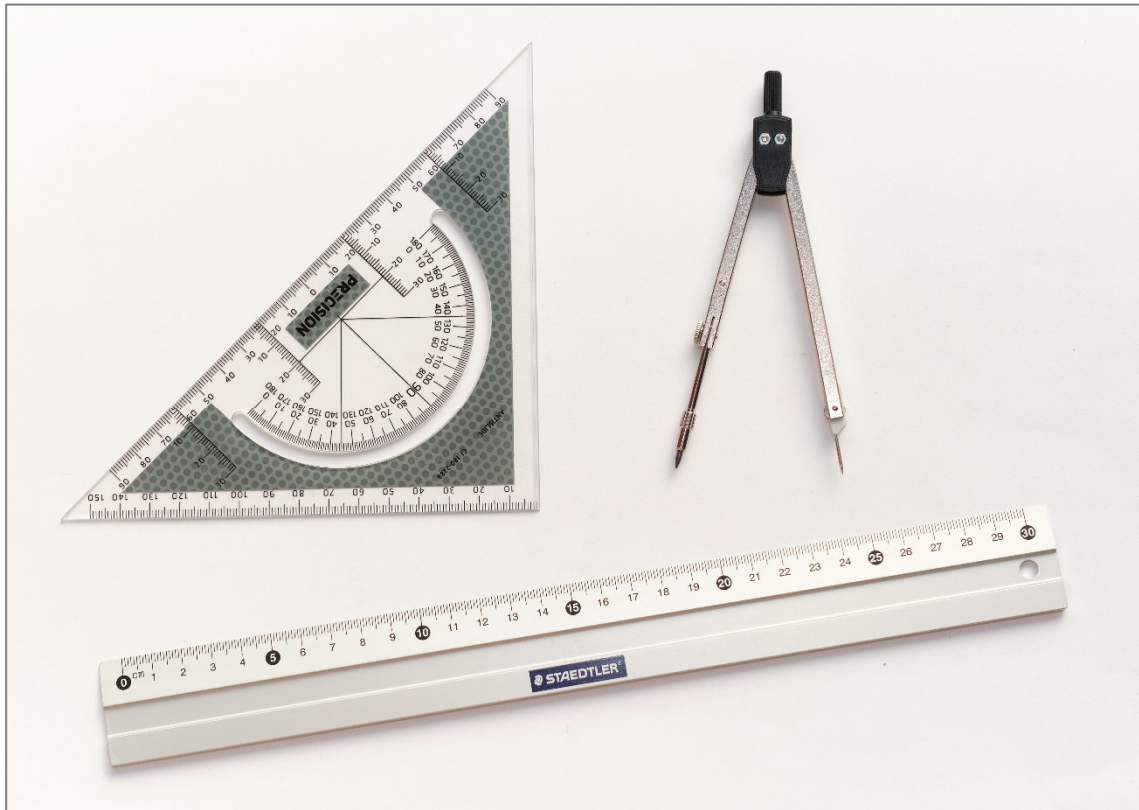
$$k \cdot x = 6 - x \Leftrightarrow 1,75 \cdot x = 6 - x \Leftrightarrow 2,75 \cdot x = 6 \Leftrightarrow x = \frac{6}{2,75} = 2,1818$$

Det overlades til læseren at bestemme de øvrige længder.

□

8. Konstruktion med passer, lineal og vinkelmåler

I dette afsnit skal vi se på konstruktion med passer, lineal og vinkelmåler. Udover at det er ganske fornøjeligt at konstruere geometriske figurer på denne måde, giver det også et godt overblik over, hvor mange oplysninger der skal til for at bestemme en trekant entydigt. Først skal vi præcisere reglerne for konstruktion med passer, lineal og vinkelmåler.



I grundskolen i Danmark er det vel følgende regler, der gælder:

Start

- Man må starte med at tegne to punkter et vilkårligt sted på papiret.

Lineal med mål

- Linealen må bruges til at tegne rette linjer gennem to punkter.
- Linealen må bruges til at måle og markere specifikke længder direkte på papiret.

Passeren

- Passeren må bruges til at tegne cirkler eller cirkelbuer med en given radius, hvor centrum er et eksisterende punkt.
- Passeren må bruges til at overføre længder ved at måle afstanden mellem to punkter og markere denne afstand et andet sted.

Vinkelmåleren

- Vinkelmåleren må bruges til at måle eksisterende vinkler.
- Vinkelmåleren må bruges til at konstruere præcise vinkler med udgangspunkt i en eksisterende linje med et punkt på. Punktet skal være vinkelspidsen og linjen det ene ben.

Bemærk: Det vil blive betragtet som for upræcist at tegne en linje gennem et punkt, som tangerer en given cirkel. Typisk vil sådanne linjer i øvrigt kunne konstrueres på anden vis via de øvrige regler.

Er tre oplysninger i en trekant nok til at bestemme den entydigt?

Vi skal besvare dette spørgsmål gennem anvisningen af nogle konstruktioner. Der viser sig at være 6 egentligt forskellige tilfælde at overveje. De er illustreret på næste side.

Tilfælde 1: Tre sider (SSS)

Et linjestykke AB svarende til den ene kendte side tegnes. Med centrum i hvert endepunkt A og B tegnes to cirkler med radier lig med de to øvrige sideres længde. Skæringspunktet mellem cirklerne giver det sidste hjørne C i trekanten.

Tilfælde 2: En vinkel og to hosliggende sider (SVS)

Et linjestykke AB svarende til den ene kendte side tegnes. Med centrum i endepunktet A benyttes vinkelmåleren til at afsætte et ben, som danner den kendte vinkel med siden AB . Med centrum i A tegnes en cirkel med en radius lig med længden af den sidste kendte side. Cirkelens skæringspunkt med vinkelbenet definerer et punkt C . Punkterne C og B forbindes med et linjestykke.

Tilfælde 3: En side og to hosliggende vinkler (VSV)

Et linjestykke AB svarende til den kendte side tegnes. Med centrum i endepunktet A benyttes vinkelmåleren til at afsætte et ben, som danner den ene kendte vinkel med siden AB . Det tilsvarende gøres med den anden kendte vinkel i punktet B . De to vinkelbens skæringspunkt definerer det sidste hjørne C .

Tilfælde 4: En side, en hosliggende vinkel og en modstående vinkel (SVV)

Den sidste vinkel beregnes via sætningen om vinkelsummen i en trekant. Herefter kan vi benytte konstruktionen fra tilfælde 3.

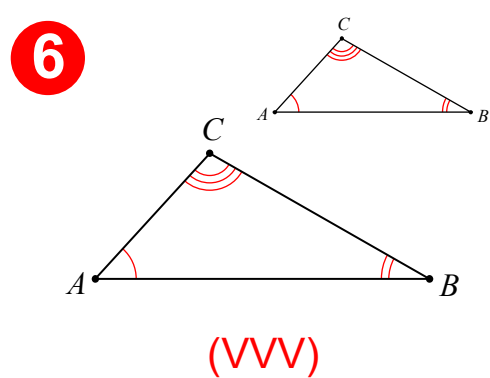
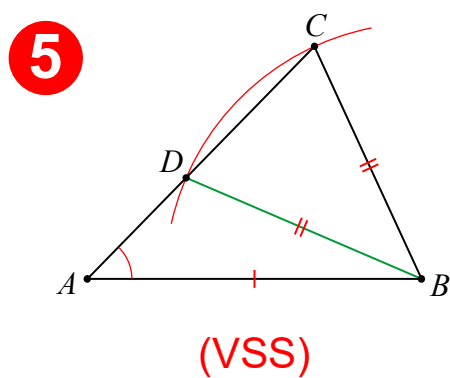
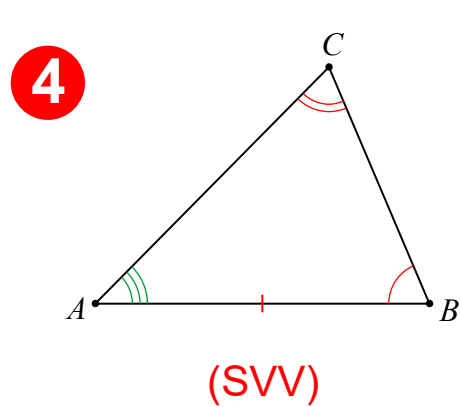
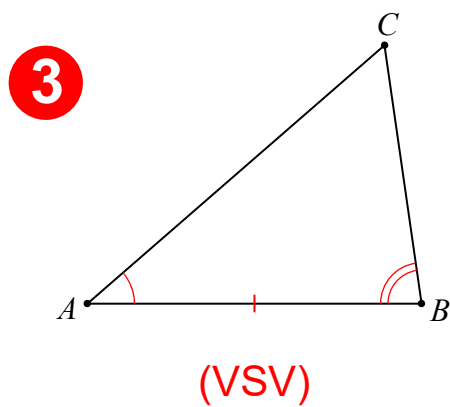
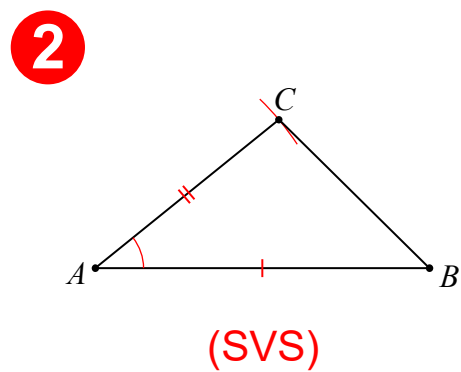
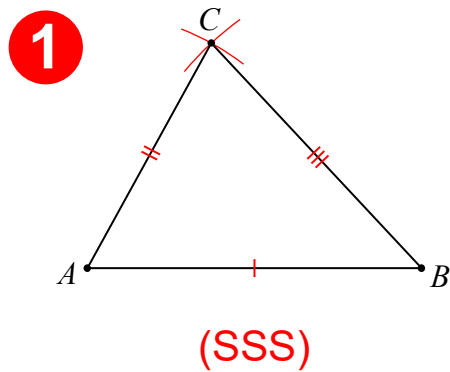
Tilfælde 5: En vinkel, en hosliggende side og en modstående side (VSS)

Et linjestykke AB svarende til den ene kendte side tegnes. Med centrum i endepunktet A benyttes vinkelmåleren til at afsætte et ben, som danner den kendte vinkel med siden AB . Med centrum i B tegnes en cirkel med en radius lig med længden af den sidste kendte side. Det kan undertiden give to muligheder, som figuren viser: Trekant ABC og ABD . Det ses også, at D vil være supplementvinkel til C , dvs. $D = 180^\circ - C$.

Tilfælde 6: Tre vinkler (VVV)

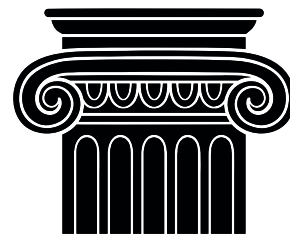
Her er åbenlyst uendelig mange muligheder, hvis vel at mærke summen af vinklerne giver 180° . Alle vil være skaleringer af hinanden, jf. afsnittet med ensvinklede trekanter. Hvis man selv vælger en sidelængde, kan man benytte konstruktionen i tilfælde 3.

I tilfældene 1-4 er trekanten bestemt entydigt op til kongruens!



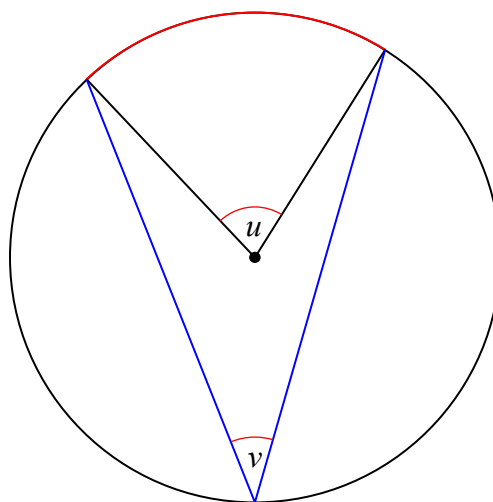
Græsk kultur og konstruktion med passer og lineal

Oldtidens Grækenland bliver af mange historikere regnet for at være den vigtigste grundlæggende kultur for den vestlige civilisation. Ligesom Romerriget var kraftigt påvirket af den græske kultur, har den europæiske kultur også været det. Begrebet *Demokrati* (Folkevælde) stammer fra Grækenland, og vi kender alle de græske symboler, som i dag bruges i naturvidenskab: π , α , β , γ etc. Grækerne var de første til at *bevise* matematiske påstande. Især var grækerne store i geometri. De arbejdede også med konstruktioner, men det skal pointeres, at deres *konstruktioner med passer og lineal* adskiller sig fra grundskolens konstruktionsregler derved, at man ikke må anvende en vinkelmåler, og man ikke må anvende mål på linealen. Det viser sig, at disse begrænsende faktorer giver anledning til nogle højst interessante resultater. De gamle grækere forsøgte for eksempel i århundreder at finde metoder at tredele en vinkel. Først i det 19. århundrede blev det bevist, at opgaven generelt set er umulig! (se [1] og [2] med link til online dokument).



9. Centervinkler og periferivinkler

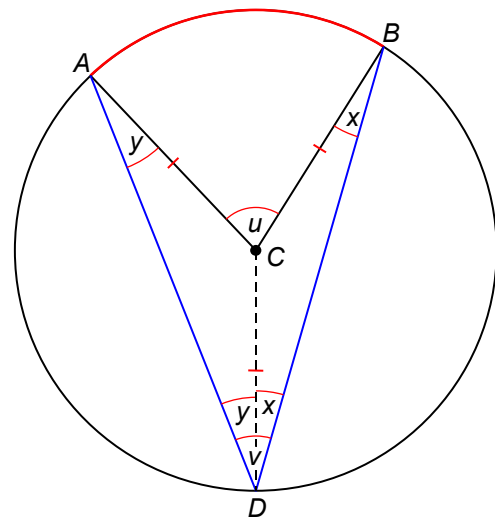
En *centervinkel* er en vinkel, som har vinkelspids i centrum af en cirkel, mens en *periferivinkel* er en vinkel, der har vinkelspids på periferien af en cirkel. Vi skal bevise en smuk sætning om sammenhængen mellem dem.



Sætning 15

En centervinkel, som spænder over den samme bue i en cirkel som en periferivinkel gør, er dobbelt så stor som periferivinklen: $u = 2v$.

Bevis: Situationen er vist på figuren ovenfor, hvor den omtalte bue er markeret med rødt. Beviset deles op i tre tilfælde alt efter, om centrum C ligger imellem periferivinklens ben, udenfor dem eller på det ene ben af periferivinklen. Vi giver kun et bevis for det førstnævnte tilfælde. De to øvrige tilfælde overlades til læseren i opgave 9.1.

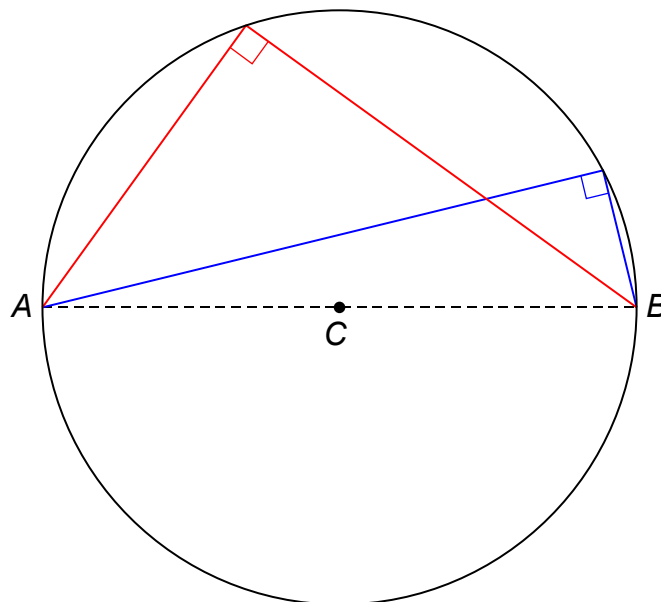


Vi kalder de relevante hjørner A , B , C og D , som det fremgår af figuren til højre, og tegner en stiplede linje fra C til D . Da trekantene ACD og trekant BCD hver især har to radier som sider, så konkluderer vi, at de begge er ligebenede. Specielt betyder det, at vinklerne B og D i trekant BCD ens. Vi kalder vinklerne for x . På samme måde er vinklerne A og D i trekant ACD ens. Vi kalder dem y . Da vinkelsummen i en trekant er 180° , konkluderer vi, at vinkel C i trekant BCD og trekant ACD er henholdsvis $180^\circ - 2x$ og $180^\circ - 2y$. Summen af vinklerne omkring centrum C giver 360° , så vi har:

$$180^\circ - 2x + 180^\circ - 2y + u = 360^\circ \Leftrightarrow u = 2x + 2y = 2 \cdot (x + y) = 2v$$

hvilket viser det ønskede. □

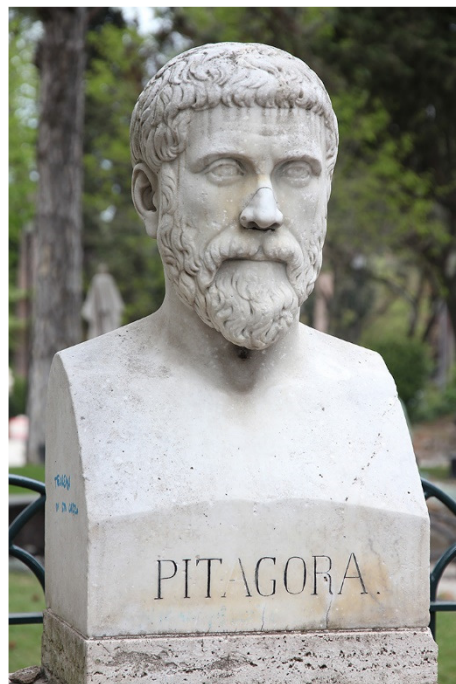
En interessant konsekvens af sætning 15 er, at en periferivinkel, som spænder over en bue på 180° , automatisk vil være et ret vinkel.



Ikke nok med det: Der findes ikke andre punkter i planen end dem på cirklen, hvorfra linjestykket AB vil ses under en 90 graders vinkel (overvej!). I opgave 9.2 kan du studere en anden interessant anvendelse af sætning 15. Den såkaldte *synsvinkelkonstruktion* har nemlig rod i sætning 15.

10. Pythagoras' sætning

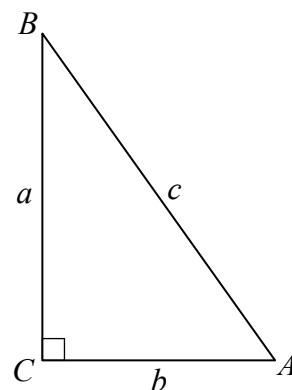
Den mest kendte matematiske sætning af alle i grundskolen er vel *Pythagoras' sætning*. Sætningen var allerede kendt i Babylonien ca. 1800 f.Kr., men den blev muligvis bevist af grækeren *Pythagoras*, som levede omkring 570–490 f.Kr. De ældste kendte beviser for sætningen findes i *Euklids Elementer*, som er fra ca. 300 f.Kr. Pythagoras grundlagde et broderskab kaldet *pythagoræerne* i den græske koloni Kroton i det nuværende Syditalien (Crotone). Deltagerne i broderskabet beskæftigede sig med naturvidenskab, matematik, filosofi, religion og talmystik. I matematik studerede de især aritmetik og algebra. Disse tænkere fik senere stor indflydelse på den store filosof *Platon* (ca. 428 f.Kr.–348 f.Kr.), der betragtede matematikken som værende et essentielt redskab for en filosof til at skærpe sindet med henblik på at forstå de abstrakte, sande, evige og uforanderlige idéer.



Sætning 16 (Pythagoras' sætning)

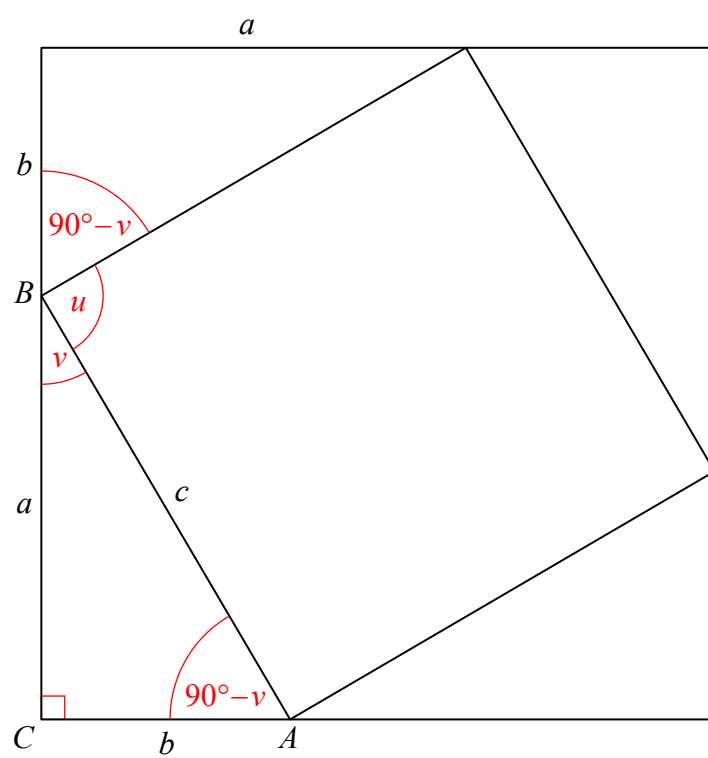
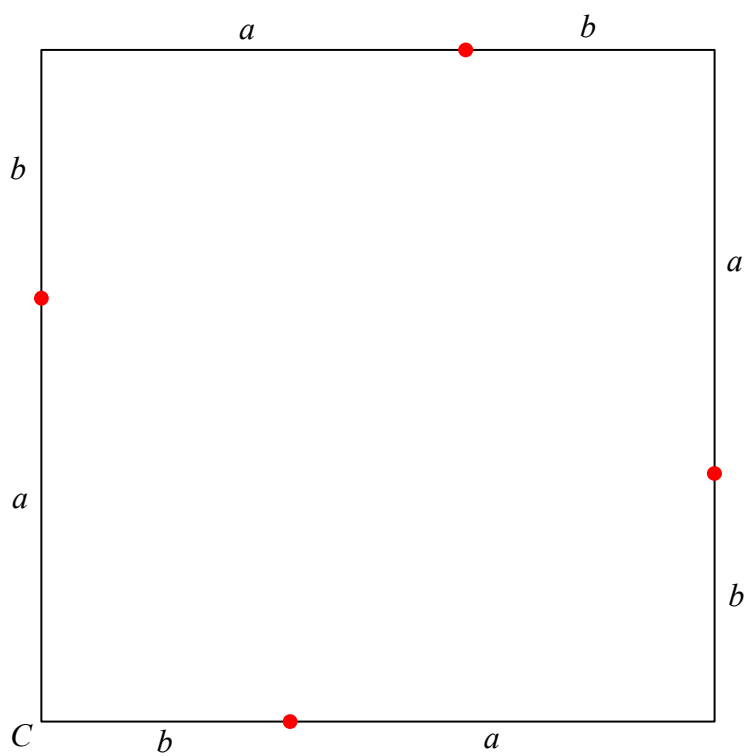
I en *retvinklet* trekant ABC , hvor C er den rette vinkel, gælder følgende sammenhæng mellem siderne: $a^2 + b^2 = c^2$.

Bevis: Der findes utallige beviser for denne smukke sætning. Vi skal betragte et, som gør brug af arealer. Betragt øverste figur på næste side: Et kvadrat med sidelængden $a+b$ er afbildet med mærker, der adskiller længderne a og b på hver eneste side. Mærkerne forbindes med linjer. Det giver anledning til fire retvinklede trekanter og en firkant i midten, som det ses på den nederste figur på næste side. De fire trekanter har en ret vinkel og to hosliggende sider ens. Vi er altså i tilfælde 3 i afsnit 8, hvilket betyder, at trekanterne er kongruente. Specielt er hypotenusen i de retvinklede trekanter ens. Vi



kalder dem c . Firkantens sider er dermed alle c . Spørgsmålet er om firkanten er et kvadrat eller blot en rombe? Dette afklarer vi ved at regne på vinkler. I trekant ABC nederst til venstre kalder vi vinkel B for v . Da C er ret, giver vinkelsummen i en trekant os, at vinkel A i trekant ABC må være lig med $90^\circ - v$. Alle trekanterne er som nævnt kongruente, så vi kan overføre vinklen $90^\circ - v$ til vinklen B i trekanten lige over trekant ABC . Hvis vi kalder vinklen B i firkanten for u , kan vi opskrive følgende ligning:

$$v + u + (90^\circ - v) = 180^\circ \Leftrightarrow u = 90^\circ$$



Vinklen B i firkanten er med andre ord ret. Af symmetri Grunde fås det samme for alle vinkler i firkanten. Dermed er det godtgjort, at firkanten er et kvadrat! Arealet af det store kvadrat er lig med summen af arealerne af det lille kvadrat og de fire trekanter. Trekanterne har hver areal $\frac{1}{2} \cdot a \cdot b$. Det giver en ligning at løse:

$$(3) \quad (a+b)^2 = c^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \Leftrightarrow a^2 + b^2 + 2ab = c^2 + 2ab \Leftrightarrow a^2 + b^2 = c^2$$

hvor vi har brugt en kvadratsætning. Dermed er sætningen bevist. □

Bemærkning 17

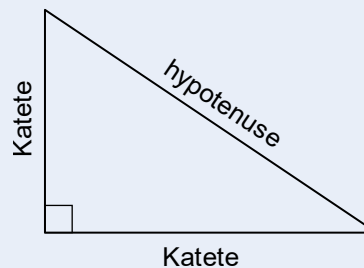
I beviset ovenfor kan man godt slippe for at argumentere med vinkler, hvis man registrerer, at de fire trekanter er kongruente, og at man givet trekanten i nederste venstre hjørne kan få de øvrige ved gentagne drejninger med 90° efterfulgt af parallelforskydninger. Beviset med vinkler er dog anvendt, fordi det er en mere ”sikker vej”. Det skal også nævnes, at man kan undgå de algebraiske regninger i (3), hvis man snedigt foretager nogle parallelforskydninger i figuren. Se opgave 10.1. □

Bemærkning 18

I matematikbøger ser man ofte Pythagoras’ sætning illustreret ved, at man anbringer kvadrater på siderne i trekanten. Dette er gjort på figuren på forsiden af denne note! Denne figur indeholder imidlertid også andre pointer. □

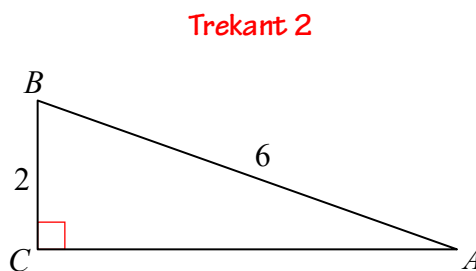
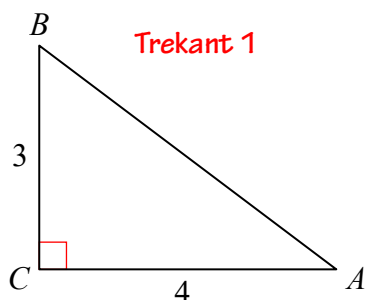
Definition 19

I en *retvinklet* trekant kaldes de to sider, som støder op til den rette vinkel, for *kateter*, mens den lange side overfor den rette vinkel kaldes for *hypotenusen*.



Eksempel 20

Bestem de ukendte sider i nedenstående to trekanter.



Løsninger: I trekant 1 kender vi kateterne a og b og skal finde hypotenusen c . Vi omskriver først Pythagoras' formel, før vi indsætter: $a^2 + b^2 = c^2 \Leftrightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2}$.

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

I trekant 2 kender vi hypotenusen c og kateten a . Derfor skal formelen omskrives lidt anderledes: $a^2 + b^2 = c^2 \Leftrightarrow b^2 = c^2 - a^2 \Leftrightarrow b = \sqrt{c^2 - a^2}$.

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{6^2 - 2^2} = \sqrt{36 - 4} = \sqrt{32} = 5,66$$

Bemærk at trekant 1 vel er det mest anvendte eksempel på brug af Pythagoras' sætning. 3–4–5 trekanten er velkendt, fordi der er tale om hele tal. Der er faktisk uendeligt mange andre eksempler med hele tal, som passer i formelen. Man kalder heltalsløsninger for *pythagoræiske tripler*. En 5-12-13 trekant er et andet eksempel, men 3–4–5 trekanten er den simpleste. Der gælder også omvendt, at har man en trekant med disse sider, så er der en ret vinkel overfor siden 5. Dette kan håndværkere bruge i praksis til at udmåle præcise rette vinkler. Se senere i sætning 37 og eksempel 38.

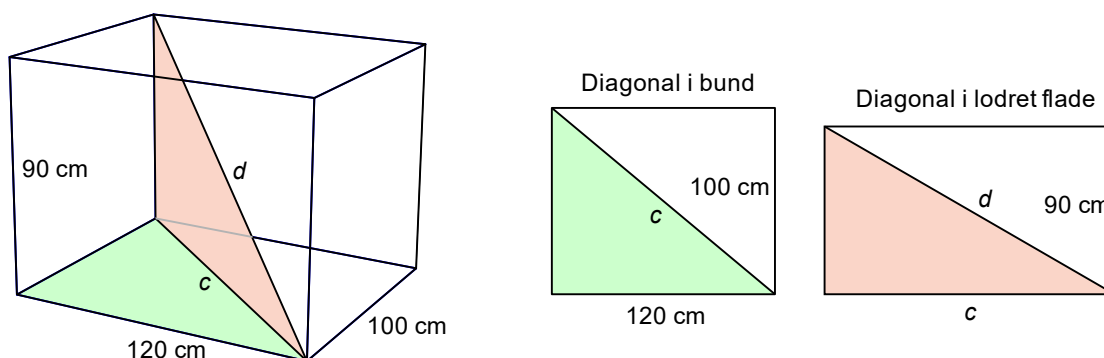
□

Eksempel 21 (Pythagoras anvendt i 3D)

Vi vil bestemme diagonalen i den rektangulære kasse med længden 120 cm, bredden 100 cm og højden 90 cm. Hertil kan vi benytte Pythagoras' formel to gange. Først i bunden til at bestemme diagonalen c , derefter i den lodrette flade til at bestemme diagonalen d :

$$\text{Bunden: } c = \sqrt{120^2 + 100^2} = 156,20. \text{ Lodret flade: } d = \sqrt{156,20^2 + 90^2} = 182,3$$

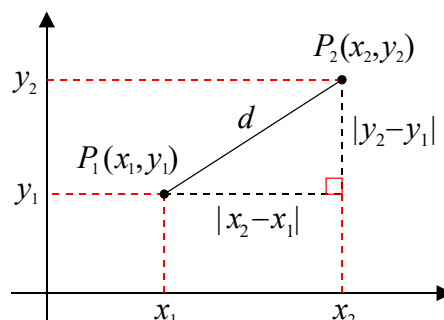
Diagonalens længde er altså 182,3 cm.



Eksempel 22 (Afstand mellem punkter)

En formel for afstanden mellem to punkter i planen kan udledes ved hjælp af Pythagoras' sætning:

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{|x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2} \\ &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \end{aligned}$$



11. Trigonometri via retvinklede trekanter

Vi har hidtil kun kunnet regne på siderne i en retvinklet trekant, men hvad med vinklerne? Hertil kræves *trigonometri*. Ordet kommer fra oldgræsk og betyder noget i retningen af at måle i en trekant. Historisk set konstruerede den græske astronom *Hipparchos* ca. 150 f.Kr. en *kordetabel*, som ligner meget en sinustabel i dag. Tabellen er gået tabt. Derimod har man bevaret det meget berømte værk *Almagest* af *Claudius Ptolemæus* (ca. 100 - ca. 170) fra Alexandria. Værket er skrevet omkring 150 e.Kr. og indeholder blandt andet en kordetabel med en forklaring på, hvordan den blev udregnet. Inderne betragtede herefter en slags halv-kordetabel. Lærde muslimer oversatte dette arbejde til arabisk.



Claudius Ptolemæus (ca. 100-ca. 170)

Endelig kom tabellerne til europæerne omkring 1100-tallet. Her brugte man betegnelsen *sinus*, som betyder ”bugt” eller ”fold” på Latin. Det var dog først i 1400-tallet, at den videnskabelige trigonometri for alvor kom i gang i Europa med *Regiomontanus* (1436-1476), som skrev den vigtige bog *De triangulis omnimodis* om trekanter og trigonometri. Han udregnede også tabeller for, hvad vi i dag med små ændringer vil sige svarer til en sinus-tabel. Senere i det 16. århundrede udviklede trigonometri sig fra at være en ren geometrisk disciplin til en algebraisk-analytisk disciplin. Nok om historien her.

Først skal vi have indført de trigonometriske funktioner *sinus*, *cosinus* og *tangens* i en retvinklet trekant. Funktionerne forkortes sin, cos og tan. Tangens ses dog også undertiden at blive forkortet tg. Vi bruger tan her. Med betegnelserne fra Definition 19:

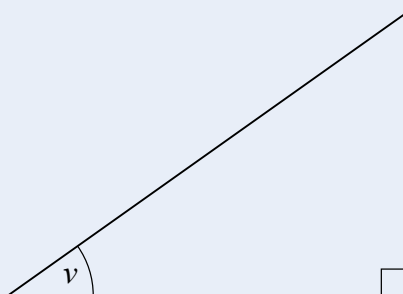
Definition 23

I en retvinklet trekant er de trigonometriske funktioner defineret på følgende måde, hvor v *ikke* er den rette vinkel:

$$\sin(v) = \frac{\text{modstående katete}}{\text{hypotenusen}}$$

$$\cos(v) = \frac{\text{hosliggende katete}}{\text{hypotenusen}}$$

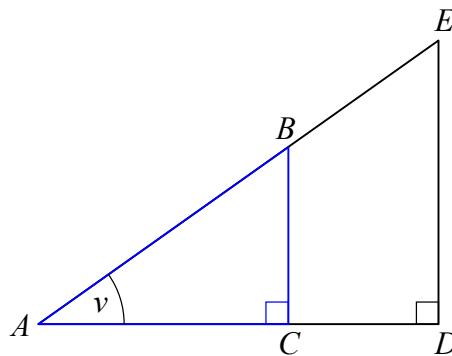
$$\tan(v) = \frac{\text{modstående katete}}{\text{hosliggende katete}}$$



Bemærkning 24 (veldefineret)

Definition 23 ville ikke give mening, hvis for eksempel $\sin(40^\circ)$ giver noget forskelligt alt efter hvilken retvinklet trekant med en vinkel på 40° , som man måtte bruge. Heldigvis er det ikke tilfældet, for alle retvinklede trekanter, hvor den ene vinkel er 40° , vil være ensvinklede. Dette er illustreret med trekanterne ABC og ADE på figuren. Lad os først kigge på sinus. Ifølge sætningen om ensvinklede trekanter i afsnit 7, har vi umiddelbart, at

$$\frac{|BC|}{|AB|} = \frac{|DE|}{|AE|}$$



Det betyder, at sinus vil give det samme uanset, om vi benytter trekant ABC eller trekant ADE til at udregne $\sin(40^\circ)$. Noget tilsvarende fås for cosinus og tangens.

□

Sætning 25

For enhver vinkel v , som opfylder $0 < v < 90^\circ$, gælder: $\tan(v) = \frac{\sin(v)}{\cos(v)}$

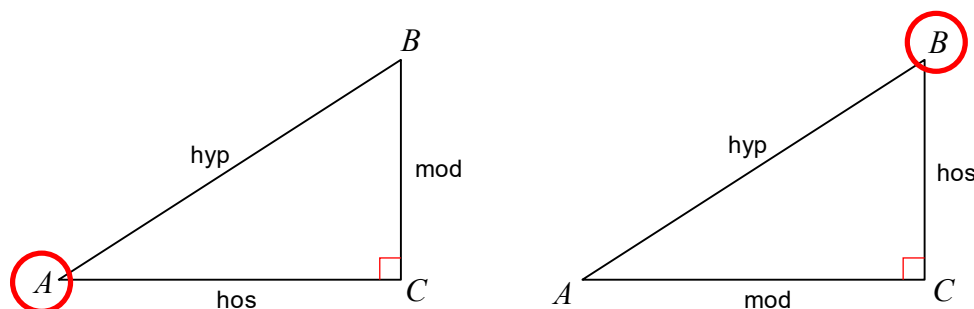
Bevis: Vi starter med højresiden og bruger definition 23, idet vi anvender forkortelserne ”mod” for modstående katete, ”hos” for hosliggende katete og ”hyp” for hypotenusen:

$$(4) \quad \frac{\sin(v)}{\cos(v)} = \frac{\frac{\text{mod}}{\text{hyp}}}{\frac{\text{hos}}{\text{hyp}}} = \frac{\text{mod}}{\text{hyp}} \cdot \frac{\text{hyp}}{\text{hos}} = \frac{\text{mod} \cdot \text{hyp}}{\text{hyp} \cdot \text{hos}} = \frac{\text{mod}}{\text{hos}} = \tan(v)$$

2. lighedstegn: Man dividerer med en brøk ved at gange med ”den omvendte”. 3. lighedstegn: Man ganger to brøker med hinanden ved at gange tæller med tæller og nævner med nævner. 4. lighedstegn: hyp forkorter væk i tæller og nævner.

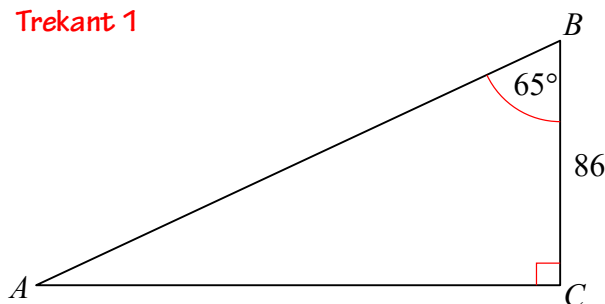
□

Når vi skal bruge de trigonometriske funktioner i en retvinklet trekant, vil vi ”stille os i en vinkel”, og det skal aldrig være den rette vinkel. Når vi står i en vinkel, vil vi betegne den katete, som ligger overfor vinklen, for den *modstående katete*, mens den katete, som støder op til den vinkel man ”står i”, betegnes den *hosliggende katete*. Om en katete er modstående eller hosliggende afhænger således af, i hvilken vinkel ”man står”. Det er illustreret på de to figurer øverst på næste side. Vi benytter de samme forkortelser som anvendt i beviset for sætning 25.

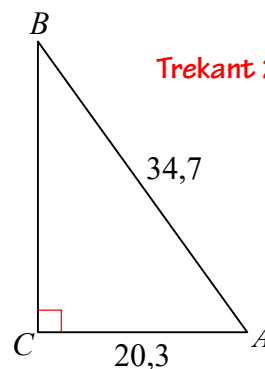


Når man skal løse opgaver ”stiller man sig i den vinkel”, som kendes eller skal findes. Dernæst spørger man sig selv om hvilke sider, som er involveret. Hermed menes de sider, som kendes eller skal findes. Herudfra vælges den relevante trigonometriske funktion. Hvis den hosliggende katete og hypotenusen for eksempel er involveret, så er det cosinus, som skal benyttes. Hvis de to kateter er involveret, er det tangens, der vælges, etc. Vi kigger på to eksempler.

Trekant 1



Trekant 2



Eksempel 26

I trekant 1 vil vi bestemme siden b . Da vi kender vinkel B , stiller vi os der. De involverede sider er dermed den hosliggende katete, der kendes, og den modstående katete, som skal findes. Da tangens involverer begge kateter, er det den vi skal benytte:

$$\tan(65^\circ) = \frac{\text{mod}}{\text{hos}} = \frac{b}{86}$$

Den ukendte side fås ved at gange med 86 på begge sider af lighedstegnet:

$$b = 86 \cdot \tan(65^\circ) = 184,4$$

□

Eksempel 27

I trekant 2 vil vi bestemme vinklen A . Da vi skal finde A , stiller vi os der. De involverede sider er dermed den hosliggende katete og hypotenusen, som begge kendes. Da cosinus involverer netop disse sider, skal vi benytte cosinus:

$$\cos(A) = \frac{\text{hos}}{\text{hyp}} = \frac{20,3}{34,7} = 0,5850$$

Vi ved altså hvad cosinus til den ukendte vinkel A er lig med, nemlig 0,5850. For at finde A selv, må vi benytte den *omvendte funktion* til cosinus, som betegnes $\cos^{-1}$. Funktionen kan også findes på lommeregneren. Vi får:

$$A = \cos^{-1}(0,5850) = 54,2^\circ$$

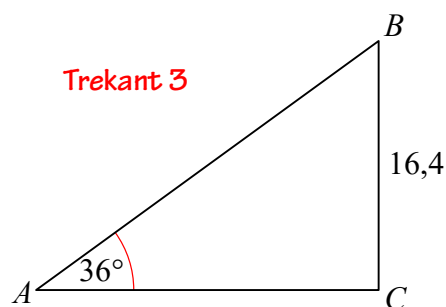
Bemærk, at man bør benytte mindst fire decimaler, når man regner med de trigonometriske funktioner – for at undgå, at fejl bliver for store. Benyt gerne alle decimaler i mellemregninger!

□

Eksempel 28

I trekant 3 vil vi bestemme hypotenusen c . Vi kender vinklen A , så vi stiller os der. De involverede sider er da den modstående katete og hypotenusen. Vi benytter derfor sinus:

$$\sin(36^\circ) = \frac{\text{mod}}{\text{hyp}} = \frac{16,4}{c}$$



Da den ukendte side c står i nævneren i ligningen, må vi foretage et par omskrivninger. Først ganger vi på begge sider med nævneren c . Derefter dividerer vi med $\sin(36^\circ)$ på begge sider af lighedstegnet:

$$c \cdot \sin(36^\circ) = 16,4 \Leftrightarrow c = \frac{16,4}{\sin(36^\circ)} = 27,9$$

□

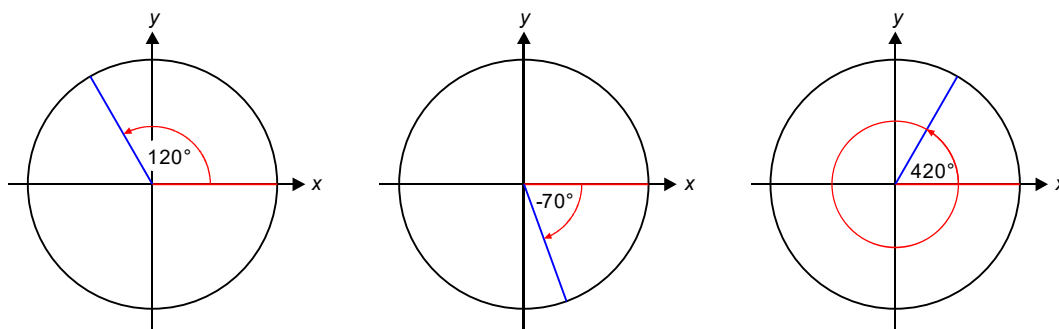
Bemærkninger 29

Det er klart, at vi i alle tre eksempler ovenfor kunne have benyttet *solve* i vores CAS-værktøj til at bestemme den ubekendte, så snart den trigonometriske ligning var blevet opstillet. Eller vi kunne sågar have fodret CAS-værktøjet med oplysningerne og så fået CAS-programmets indbyggede kommandoer til direkte at give alle ukendte størrelser i trekanten. Det sidste ville ikke have givet megen indsigt. Men det er et valg, man må tage.

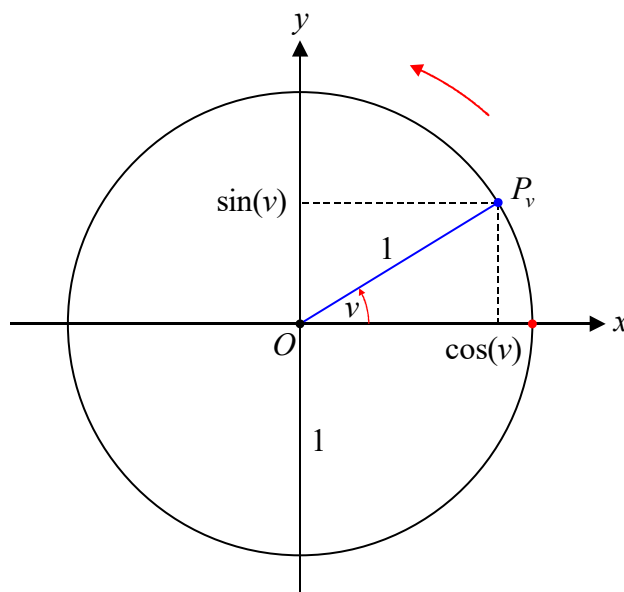
Kender man i en retvinklet trekant udover den rette vinkel enten to sider eller en side og en vinkel, kan man altid bestemme en hvilken som helst anden side/vinkel ved hjælp af de trigonometriske funktioner. Tilfældet, hvor man kun kender tre sider, er ikke interessant, for tre vinkler er som bekendt ikke tilstrækkelig til at fastlægge trekanten entydigt, som det fremgår af afsnit 8. Hvis man yderligere tager to andre værktøjer i brug, nemlig at *vinkelsummen* i en trekant er 180° og *Pythagoras' sætning*: $a^2 + b^2 = c^2$, kan man altid bestemme en hvilken som helst ukendt side/vinkel i et hug. Vi holder os dog til de trigonometriske funktioner her.

12. Trigonometri via enhedscirklen

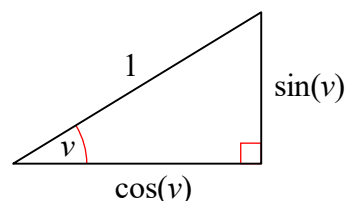
I forrige afsnit definerede vi de trigonometriske funktioner sinus, cosinus og tangens via retvinklede trekanter. I den forbindelse skal vinklen v ligge mellem 0 og 90° . I dette afsnit vil vi udvide definitionen, så man ender med at kunne tage sinus og cosinus til ethvert reelt gradtal og tangens til næsten alle gradtal. Først skal vi forklare, hvad vi mener med negative vinkler og vinkler, som er større end 360° . For det første vil vi altid forestille os, at vinklens ene ben er på x -aksens positive del. Den er her markeret med rødt på figuren herunder. Vinklens andet ben er afbildet med blåt. Hvis man drejer *mod* uret, regnes vinklen positiv; hvis man drejer *med* uret, regnes vinklen negativ. Til venstre har vi en positiv vinkel på 120° , i midten en negativ vinkel på -70° og til højre en vinkel på 420° (her er drejet mere end en omgang i positiv omløbsretning: $420^\circ = 360^\circ + 60^\circ$).



Udgangspunktet for vinklen er altså altid x -aksens positive del, og vinklen regnes positiv i *positiv omløbsregning*, som er imod uret og markeret med en rød bue med pil på figuren til højre. Derudover forestiller vi os tegnet en *enhedscirkel* med centrum i $(0,0)$ i koordinatsystemet. En enhedscirkel er en cirkel med radius 1. Til en vinkel v indfører vi et såkaldt *retningspunkt* P_v , som er skæringspunktet mellem vinklens blå ben og enhedscirklen.



Retningspunktet er udgangspunkt for definitionen af cosinus og sinus til v . Vi vil nemlig definere $\sin(v)$ som x -koordinaten til P_v og $\cos(v)$ som y -koordinaten til P_v . At det er en fornuftig udvidelse af sinus og cosinus kræver dog, at den nye definition stemmer overens med den gamle, når $0 < v < 90^\circ$. For en sådan vinkel har vi i enhedscirklen trekanten til højre at regne på.



Hvis vi et øjeblik kalder den gamle definition af sinus og cosinus for henholdsvis $\sin_{GL}(v)$ og $\cos_{GL}(v)$, så har vi ifølge definition 23:

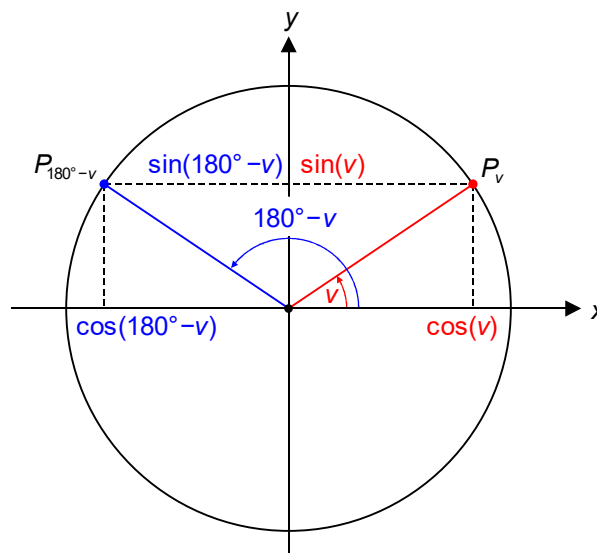
$$(5) \quad \begin{aligned} \sin_{GL}(v) &= \frac{\text{modstående katete}}{\text{hypotenusen}} = \frac{\sin(v)}{1} = \sin(v) \\ \cos_{GL}(v) &= \frac{\text{hosliggende katete}}{\text{hypotenusen}} = \frac{\cos(v)}{1} = \cos(v) \end{aligned}$$

Så den nye definition af sinus og cosinus stemmer altså overens med den gamle for vinkler mellem 0 og 90° . Samtidigt definerer vi $\tan(v)$ som $\sin(v)/\cos(v)$, og her vil sætning 25 sikre os, at den nye definition også stemmer overens med den gamle, når $0 < v < 90^\circ$. Det bemærkes, at $\tan(v)$ ikke er defineret, når nævneren er 0 , dvs. når $\cos(v) = 0$. Det sker når v er lig med 90° plus/minus hele multipla af 180° .

Definition 30

For en vinkel v og dens tilhørende retningspunkt P_v definerer vi:

$$\begin{aligned} \cos(v) &= x\text{-koordinaten til } P_v \\ \sin(v) &= y\text{-koordinaten til } P_v \\ \tan(v) &= \frac{\sin(v)}{\cos(v)} \quad (v \neq 90^\circ + p \cdot 180^\circ \text{ for } p \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$



Sætning 31 (Regler for supplementvinkler)

For alle vinkler v gælder:

$$(6) \quad \cos(180^\circ - v) = -\cos(v)$$

$$(7) \quad \sin(180^\circ - v) = \sin(v)$$

Bevis: Vi sammenligner retningspunkterne for vinklerne v og $180^\circ - v$ på figuren på forrige side. Symmetrien giver os, at x -koordinaten til retningspunktet $P_{180^\circ - v}$ giver det samme som x -koordinaten til retningspunktet for P_v , bare med modsat fortegn. Derfor har vi ifølge definition 30, at $\cos(180^\circ - v) = -\cos(v)$. På samme måde ser vi, at y -koordinaterne for de to retningspunkter er lige store, dvs. $\sin(180^\circ - v) = \sin(v)$.

□

To vinkler siges at være hinandens *supplementvinkler*, hvis de tilsammen giver 180° . Det er tilfældet for v og $180^\circ - v$. Symmetrireglerne for de trigonometriske funktioner for supplementvinkler fra sætning 31 skal vi gøre brug af i afsnit 14, hvor vi studerer generelle trekanter. For bedre at forstå sinus og cosinus på enhedscirklen opfordres læseren til at løse opgave 12.1, som handler om at aflæse tilnærmede værdier for $\cos(v)$ og $\sin(v)$. Det giver samtidigt en god fornemmelse for de forskellige symmetrier, som disse funktioner har. Nu til en vigtig relation mellem cosinus og sinus.

Sætning 32 (Grundrelation for trigonometriske funktioner)

For alle vinkler v gælder:

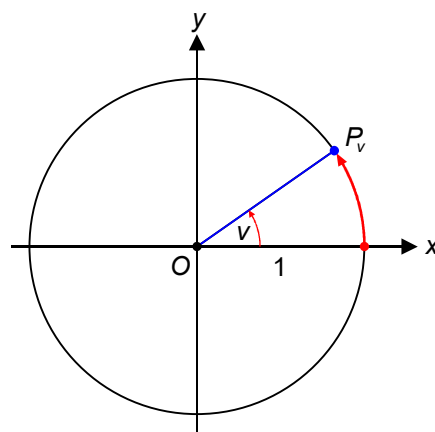
$$(8) \quad (\cos(v))^2 + (\sin(v))^2 = 1$$

Bevis: Benyt Pythagoras' sætning på trekanten på den nederste figur på side 30. Sætningen gælder ikke bare for vinkler mellem 0 og 90° . Det overlades til læseren at overbevise sig om det ved at kigge på definition 30.

□

13. Vinkler i radianer

Vi er så vant til at regne vinkler i grader; at der er 360° hele vejen rundt. Men dette tal er menneskeskabt. Muligvis stammer det fra babylonierne, som regnede i et 60-talssystem. En mere naturlig og matematisk måde at definere en vinkel på kan være at angive vinklen ved længden af den bue, som vinklens ben spænder over på enhedscirklen. På figuren er buen vist med rødt. 360° kommer da til at svare til omkredsen af en cirkel med radius 1, hvilket er $2\pi r = 2\pi \cdot 1 = 2\pi$. Vi kalder buens længde for vinklens *radiantal*. Har man en vinkel angivet ved et gradtal, så fås vinklen i radianer ved at gange med $2\pi/360$ eller $\pi/180$. En ret vinkel er for eksempel $90 \cdot \pi/180 = \pi/2$. I opgave-sektionen får læseren lejlighed til at foretage omregninger af vinkler mellem gradtal og radiantal. Til slut skal det nævnes, at når man arbejder med cosinus, sinus og tangens som *funktioner* betragtet, så er det næsten altid radianer, man regner i.



14. Cosinusrelationerne og sinusrelationerne

Vi er nu endelig nået frem til at betragte generelle trekanter. Vi er klar til det, efter i afsnit 12 at have udvidet de trigonometriske funktioner til også at gælde vinkler, som er større end 90 grader. Vi skal stifte bekendtskab med *cosinusrelationerne* og *sinusrelationerne*.

Sætning 33 (Sinusrelationerne)

I en vilkårlig trekant ABC gælder *sinusrelationerne*:

$$(9) \quad \frac{a}{\sin(A)} = \frac{b}{\sin(B)} = \frac{c}{\sin(C)}$$

som alternativt kan skrives således, hvor nævner og tæller er byttet om:

$$(10) \quad \frac{\sin(A)}{a} = \frac{\sin(B)}{b} = \frac{\sin(C)}{c}$$

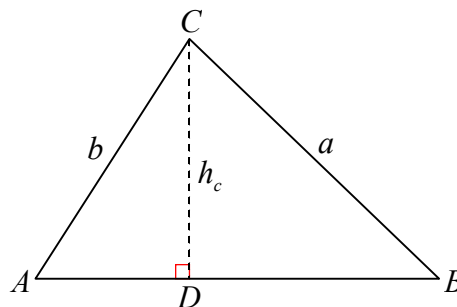
Bevis: Først antager vi, at A og B er spidse vinkler. Vi tegner højden h_c fra C ned på siden c . Det opdeler trekanten i to retvinklede trekanter ACD og BCD . Herefter kan vi bruge definition 23 på hver af de to retvinklede trekanter:

I $\triangle ACD$:

$$\sin(A) = \frac{\text{mod}}{\text{hyp}} = \frac{h_c}{b} \Leftrightarrow b \cdot \sin(A) = h_c$$

I $\triangle BCD$:

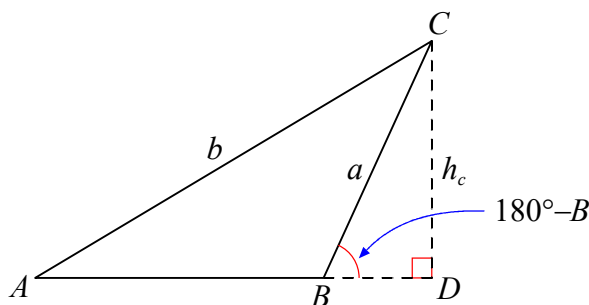
$$\sin(B) = \frac{\text{mod}}{\text{hyp}} = \frac{h_c}{a} \Leftrightarrow a \cdot \sin(B) = h_c$$



Vi har altså fået to forskellige udtryk for højden h_c . Dem sætter vi lig med hinanden:

$$(11) \quad b \cdot \sin(A) = a \cdot \sin(B) \Leftrightarrow \frac{b \cdot \sin(A)}{\sin(A) \cdot \sin(B)} = \frac{a \cdot \sin(B)}{\sin(A) \cdot \sin(B)} \Leftrightarrow \frac{b}{\sin(B)} = \frac{a}{\sin(A)}$$

hvor der i 2. trin er blevet divideret med $\sin(A) \cdot \sin(B)$ på begge sider af lighedstegnet. Vi mangler at se på det tilfælde, hvor enten A eller B er en stump vinkel (begge kan ikke være det!). Lad os sige, at det er B , som er stump.



Vi har igen to retvinklede trekanter ACD og BCD :

$$\text{I } \triangle ACD: \quad \sin(A) = \frac{\text{mod}}{\text{hyp}} = \frac{h_c}{b} \Leftrightarrow b \cdot \sin(A) = h_c$$

$$\text{I } \triangle BCD: \quad \sin(180^\circ - B) = \frac{\text{mod}}{\text{hyp}} = \frac{h_c}{a} \Leftrightarrow a \cdot \sin(180^\circ - B) = h_c$$

men ifølge (7) i sætning 31 er $\sin(180^\circ - B) = \sin(B)$. Derfor ender vi med at have nøjagtigt de samme to udtryk for højden h_c som i det spidse tilfælde. Det betyder så også, at (11) vil være gyldig her. Vi har dermed bevist, at $b/\sin(B) = a/\sin(A)$. Af symmetri Grunde vil der også gælde for eksempel $b/\sin(B) = c/\sin(C)$. Sætningen er dermed bevist. $\square$

Sætning 34 (Arealer)

I en vilkårlig trekant ABC gælder følgende tre formler for arealet af trekanten:

$$(12) \quad T = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin(C)$$

$$(13) \quad T = \frac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot \sin(B)$$

$$(14) \quad T = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin(A)$$

Bevis: I beviset for sætning 33 fandt vi følgende udtryk for højden fra hjørnet C ned på siden c : $h_c = b \cdot \sin(A)$. Men helt tilbage fra grundskolen vides det, at ”arealet af en trekant er en halv højde gange grundlinje”:

$$(15) \quad T = \frac{1}{2} \cdot h \cdot g = \frac{1}{2} \cdot h_c \cdot c = \frac{1}{2} \cdot b \cdot \sin(A) \cdot c$$

Da faktorernes orden er ligegyldig, følger (14). De øvrige følger af symmetri Grunde. $\square$

Sætning 35 (Cosinusrelationerne)

I en vilkårlig trekant ABC gælder *cosinusrelationerne*:

$$(16) \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(C)$$

$$(17) \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos(B)$$

$$(18) \quad a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(A)$$

Bevis: Igen antager vi først, at både A og B er spidse vinkler. Herefter tegner vi højden h fra hjørnet C ned på siden c . Derved deles siden i to dele: x og $c - x$. Betragt figuren på næste side. Vi kan få et udtryk for x ved at regne i den retvinklede trekant ACD :

$$(19) \quad \cos(A) = \frac{\text{hos}}{\text{hyp}} = \frac{x}{b} \Leftrightarrow b \cdot \cos(A) = x$$

hvor vi har ganget med b på begge sider af lighedstegnet. Vi skal bruge dette senere.

$\triangle ACD$ og $\triangle BCD$ er begge retvinklede trekanter, så vi kan bruge Pythagoras' sætning på hver af dem. Idéen er at opstille et udtryk for h^2 fra hver af de to trekanter, så vi kan skaffe os af med h .

I $\triangle ACD$:

$$h^2 + x^2 = b^2 \Leftrightarrow h^2 = b^2 - x^2$$

I $\triangle BCD$:

$$h^2 + (c-x)^2 = a^2 \Leftrightarrow h^2 + c^2 + x^2 - 2 \cdot c \cdot x = a^2 \Leftrightarrow h^2 = a^2 - c^2 - x^2 + 2 \cdot c \cdot x$$

hvor en kvadratsætning er brugt i trin 2. De to udtryk for h^2 sættes lig med hinanden:

$$a^2 - c^2 - x^2 + 2 \cdot c \cdot x = b^2 - x^2 \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot c \cdot x$$

Nu indsætter vi udtrykket for x fra (19):

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot c \cdot b \cdot \cos(A)$$

hvorved (18) er vist for det spidse tilfælde. At det også gælder, hvis en af vinklerne er stump, overlades det til læseren at studere i opgave 14.1. Af symmetri Grunde har vi igen, at de øvrige relationer (16) og (17) også er rigtige.

□

Da vi ofte skal benytte cosinusrelationerne til at bestemme vinkler med, formulerer vi en nyttig variant af sætning 35, som fremgår direkte af sætning 35 ved omskrivning:

Sætning 36 (Anden version af cosinusrelationerne)

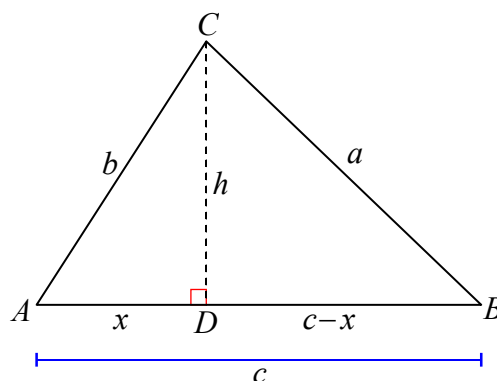
I en vilkårlig trekant ABC gælder *cosinusrelationerne*:

$$(20) \quad \cos(C) = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

$$(21) \quad \cos(B) = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$(22) \quad \cos(A) = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

Tilbage i afsnit 10 så vi, at i en retvinklet trekant ABC , hvor C er den rette vinkel, gælder Pythagoras' sætning: $a^2 + b^2 = c^2$. Men faktisk gælder sætningen også den modsatte vej, dvs. at hvis $a^2 + b^2 = c^2$, så er vinklen C ret.



Sætning 37 (Omvendt Pythagoras' sætning)

I en trekant ABC , hvor siderne opfylder $a^2 + b^2 = c^2$, vil vinklen C være ret.

Bevis: Vi kan omskrive cosinusrelationen (16), som gælder i enhver trekant:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(C) \Leftrightarrow c^2 - a^2 - b^2 = -2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(C)$$

Men hvis $a^2 + b^2 = c^2$, så er venstresiden i den sidste ligning 0. Den eneste måde hvorpå højresiden kan være 0, er hvis $\cos(C) = 0$. Da vinklen skal ligge mellem 0° og 180° , er den eneste mulighed ifølge enhedscirklen, at $C = 90^\circ$, hvorved det ønskede er vist.

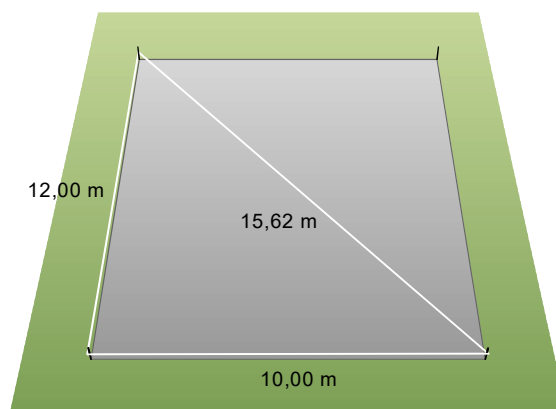
□

Eksempel 38

Den omvendte Pythagoras' sætning kan aktivt bruges af bygningshåndværkere, når der skal udmåles et rektangulært fundament. Er længden 12 m og bredden 10 m, kan man med en spændt snor sørge for at diagonalen får længden

$$\sqrt{(12,00 \text{ m})^2 + (10,00 \text{ m})^2} = 15,62 \text{ m}$$

På den måde kan man med stor præcision lave en vinkel på 90° .

**Eksempel 39**

Givet en trekant med de tre oplysninger, som fremgår af figuren. Disse tre oplysninger er tilstrækkelige til at fastlægge trekanten fuldstændigt (vi er i tilfælde 4, jf. afsnit 8). Når man skal bruge sinusrelationen, skal man lede efter to par af vinkel og overfor liggende side, hvor kun en af størrelserne er ukendt. I dette tilfælde har vi parrene A - a og B - b , hvor kun a er ukendt. Den bestemmer vi så. Ifølge (9) findes:

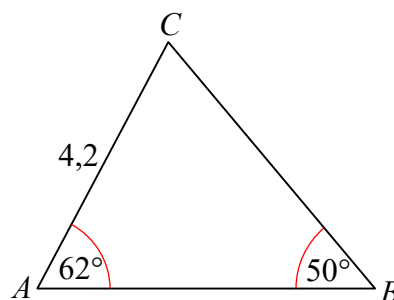
$$\frac{a}{\sin(A)} = \frac{b}{\sin(B)} \Leftrightarrow a = \sin(A) \cdot \frac{b}{\sin(B)}$$

Ved indsættelse fås følgende:

$$a = \sin(A) \cdot \frac{b}{\sin(B)} = \sin(62^\circ) \cdot \frac{4,2}{\sin(50^\circ)} = 4,84$$

Den sidste vinkel C kan findes ved at udnytte vinkelsummen i en trekant:

$$c = 180^\circ - 62^\circ - 50^\circ = 68^\circ$$



Den sidste side kan findes ved brug af sinusrelationen. Vi overlader det til læseren. Men lad os også lige beregne arealet af trekanten. Vi kender nu a og b , så det vil være passende at bruge formlen (12) i sætning 34:

$$T = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin(C) = \frac{1}{2} \cdot 4,8409 \cdot 4,2 \cdot \sin(68^\circ) = 9,43$$

hvor vi har brugt ekstra mange cifre i den beregnede side a , fordi der er tale om en mellemregning, hvor fejl kan forstørres. Arealet af trekanten er altså 9,43.

□

Eksempel 40

Givet en trekant med følgende tre oplysninger: $A = 37^\circ$, $b = 79$ og $c = 167$. Vi har altså givet en vinkel og to hosliggende sider, som er nok til at bestemme trekanten entydigt op til kongruens (tilfælde 2 fra afsnit 8). Vi skal bestemme de resterende størrelser i trekanten.

Løsning: Først benytter vi cosinusrelationen (18) til at beregne den sidste side a , idet vi også tager kvadratroden på begge sider:

$$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(A)} = \sqrt{79^2 + 167^2 - 2 \cdot 79 \cdot 167 \cdot \cos(37^\circ)} = 114,27$$

For at bestemme C benytter vi cosinusrelation (20):

$$\cos(C) = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{114,2681^2 + 79^2 - 167^2}{2 \cdot 114,2681 \cdot 79} = -0,4758$$

$$C = \cos^{-1}(-0,4758) = 118,4^\circ$$

Endelig fås den sidste vinkel ved at udnytte vinkelsummen i en trekant:

$$B = 180^\circ - 37^\circ - 118,4^\circ = 24,6^\circ$$

Dermed har vi alle vinkler og sider i trekanten.

□

Bemærkning 41 (Om at bruge sinusrelationen)

I eksempel 40 benyttede vi en cosinusrelation til at bestemme vinklen C . Man kunne eventuelt også have fundet på at bruge sinusrelationen, da C er den eneste ubekendte i parrene A - a og C - c . Vi skal imidlertid se, at det ville have givet problemer.

Sinusrelationen (10) omskrives:

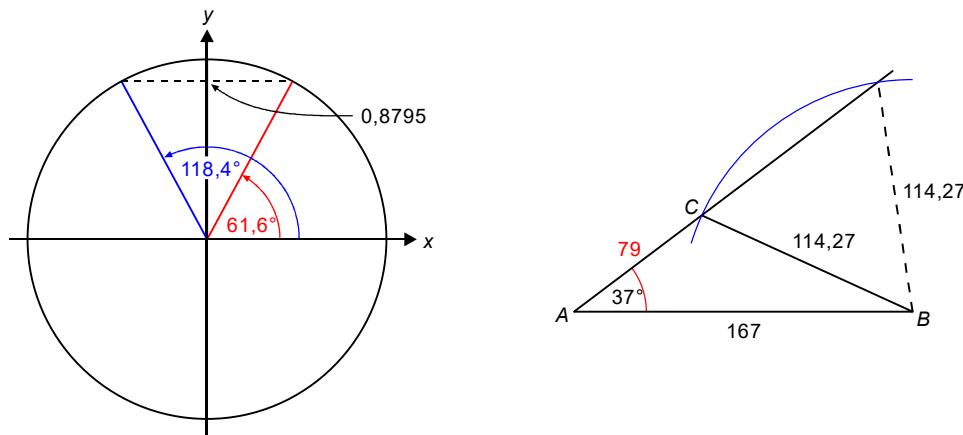
$$\frac{\sin(A)}{a} = \frac{\sin(C)}{c} \Leftrightarrow \frac{\sin(A)}{a} \cdot c = \sin(C)$$

Vi indsætter og benytter igen ekstra mange cifre i mellemregninger:

$$\sin(C) = \frac{\sin(A)}{a} \cdot c = \frac{\sin(37^\circ)}{114,2681} \cdot 167 = 0,8795$$

$$C = \sin^{-1}(0,879538) = 61,6^\circ$$

Problemet ved denne metode er, at der er to løsninger til ligningen $\sin(C) = 0,8795$, nemlig $61,6^\circ$ og supplementvinklen $180^\circ - 61,6^\circ = 118,4^\circ$, som det fremgår af enhedscirklen på venstre del af figuren herunder. Vi kan ikke vide, hvilken vinkel, der er den rigtige, medmindre vi inddrager oplysningen $b = 79$, som ikke er i spil ovenfor. Højre del af figuren viser også problematikken, når vi forsøger at konstruere trekanten ud fra de oplysninger, som er i spil, dvs. $A = 37^\circ$, $a = 114,2681$ og $c = 167$.



At der ikke opstår noget problem i tilfældet med ligningen $\cos(C) = -0,4758$ skyldes, at denne ligning kun har en løsning i intervallet fra 0° til 180° . Det overlades til læseren at overbevise sig om dette ved at kigge på enhedscirklen. Vores læring er herefter:

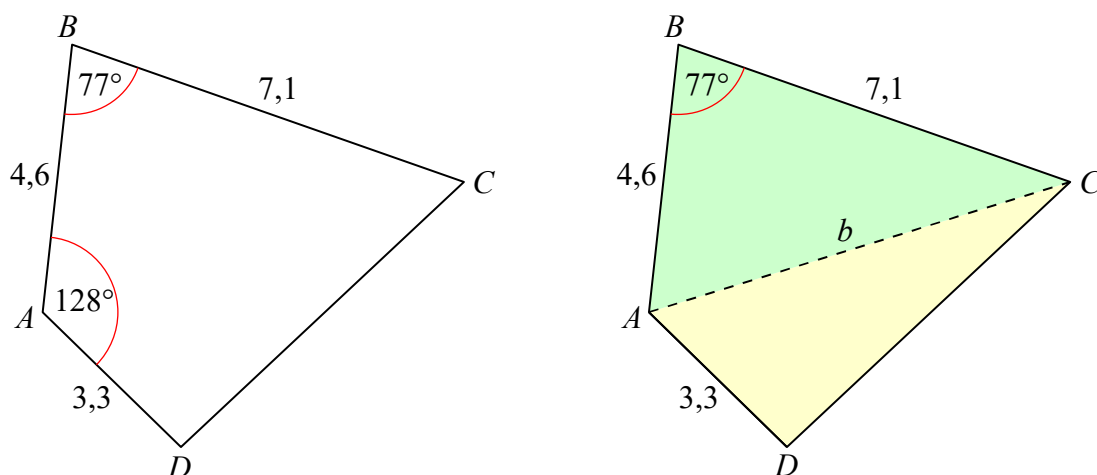
Undgå så vidt muligt at bruge sinusrelationerne til at bestemme vinkler med!

Der er dog tilfælde, hvor man er nødsaget til at bruge sinusrelationen. Det kan være, at man har en ekstra oplysning, for eksempel af vinklen er spids eller stump.

□

Eksempel 42 (Firkanter)

Betragt firkanten nedenfor til venstre. Oplysningerne i firkanten er nok til at bestemme den fuldstændigt, hvilket man kan overbevise sig om ved at konstruere den med passer, lineal og vinkelmåler eller GeoGebra. Vi skal bestemme de ukendte sider og vinkler.



Idéen er at opdele $\square ABCD$ i to trekanter: $\triangle ABC$ og $\triangle ACD$. Der er en vinkel A i begge trekanter, så det er vigtigt at gøre sig klart hvilken trekant, man arbejder i.

I $\triangle ABC$:

Først bruger vi cosinusrelationen (17) til at bestemme siden b :

$$b = \sqrt{a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos(B)} = \sqrt{7,1^2 + 4,6^2 - 2 \cdot 7,1 \cdot 4,6 \cdot \cos(77^\circ)} = 7,541630933$$

Dernæst bruges cosinusrelation (22) til at bestemme vinkel A :

$$\cos(A) = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{7,54163^2 + 4,6^2 - 7,1^2}{2 \cdot 7,54163 \cdot 4,6} = 0,39817$$

idet vi benytter mange decimaler i mellemregninger. Herefter bruges funktionen $\cos^{-1}$:

$$A = \cos^{-1}(0,39817) = 66,536^\circ$$

Endelig giver vinkelsummen i en trekant den sidste vinkel C :

$$C = 180^\circ - A - B = 180^\circ - 66,536^\circ - 77^\circ = 36,464^\circ$$

I $\triangle ACD$:

Vi får brug for at udregne vinkel A i $\triangle ADC$. Den fås ved at trække A i $\triangle ABC$ fra den store vinkel A i $\square ABCD$, altså 128° .

$$A = 128^\circ - 66,536^\circ = 61,464^\circ$$

Siden a findes ved at benytte en cosinusrelation:

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{c^2 + d^2 - 2 \cdot c \cdot d \cdot \cos(A)} \\ &= \sqrt{3,3^2 + 7,54163^2 - 2 \cdot 3,3 \cdot 7,54163 \cdot \cos(61,464^\circ)} = 6,63235 \end{aligned}$$

Derefter igen en cosinusrelation for at bestemme vinkel D :

$$\cos(D) = \frac{a^2 + c^2 - d^2}{2ac} = \frac{6,63235^2 + 3,3^2 - 7,54163^2}{2 \cdot 6,63235 \cdot 3,3} = -0,04565$$

og hermed:

$$D = \cos^{-1}(-0,04565) = 92,616^\circ$$

Vinkelsummen i den betragtede trekant giver vinkel C :

$$C = 180^\circ - A - D = 180^\circ - 61,464^\circ - 92,616^\circ = 25,920^\circ$$

I $\square ABCD$:

For at få vinkel C i firkanten, lægger vi vinklerne C fra hver af de to trekanter sammen:

$$C = 36,464^\circ + 25,920^\circ = 62,384^\circ$$

Vi opsummerer med en vis afrunding:

$$\begin{aligned} A &= 128^\circ, B = 77^\circ, C = 62,4^\circ \text{ og } D = 92,6^\circ \\ |AB| &= 4,6; |BC| = 7,1; |CD| = 6,63 \text{ og } |AD| = 3,3 \end{aligned}$$

Opgaver

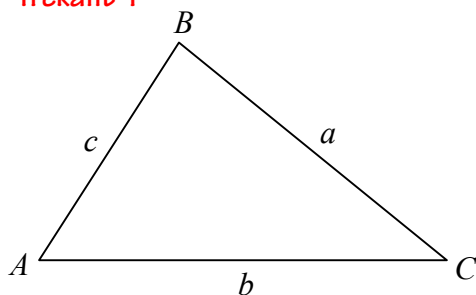
I opgavesektionen vil opgaverne blive nummereret, så det, der står foran punktummet, angiver det afsnit, opgaven hører til. Opgaver, som vurderes som lidt sværere end de øvrige, markeres med en stjerne *.

Opgave 2.1

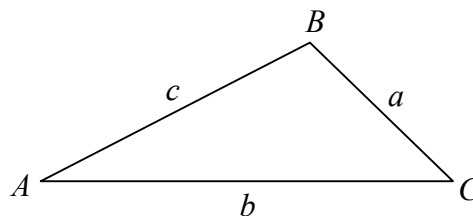
Benyt en vinkelmåler med lineal til nedenstående.

- Afsæt de tre *medianer* i hver af trekant 1 og 2. Skærer de i samme punkt?
- Afsæt de tre *højder* i hver af trekant 3 og 4. Skærer de i samme punkt?
- Afsæt de tre *vinkelhalveringslinjer* i trekant 5 og 6. Skærer de i samme punkt?

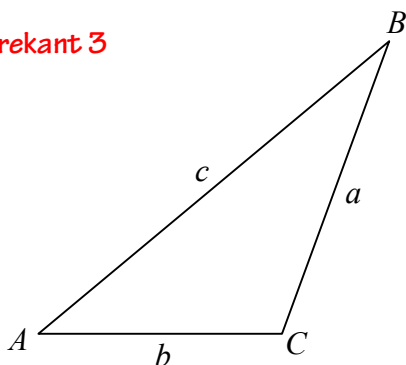
Trekant 1



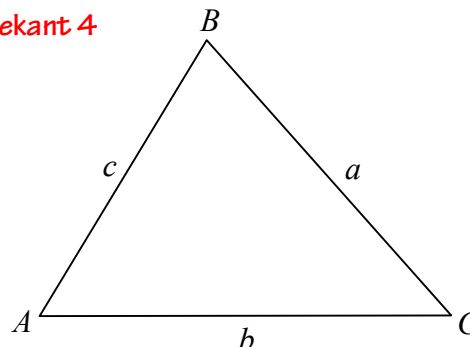
Trekant 2



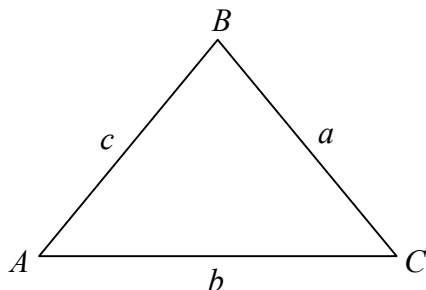
Trekant 3



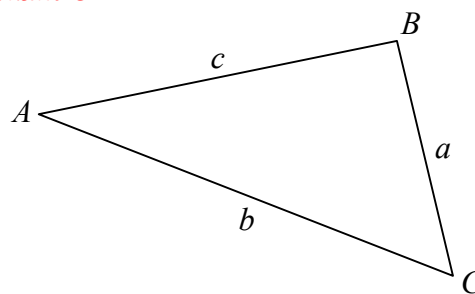
Trekant 4



Trekant 5

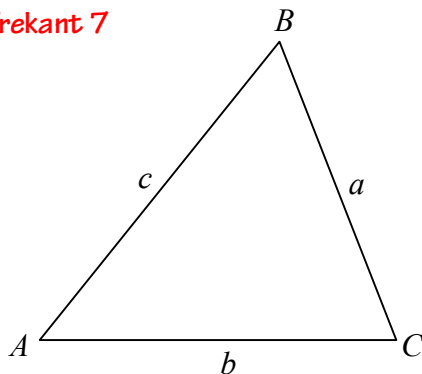
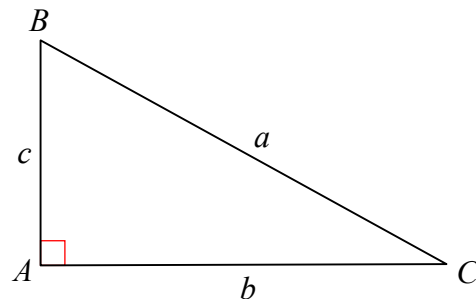


Trekant 6



Opgave 2.2

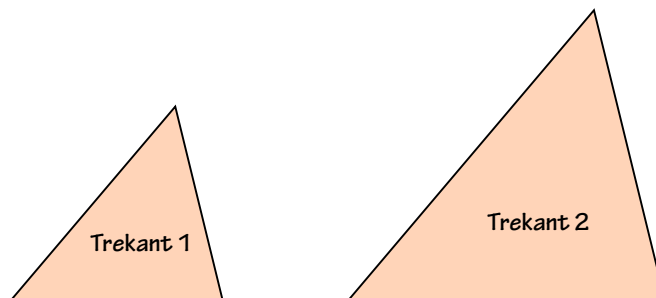
Benyt en vinkelmåler med lineal til nedenstående. Afsæt de tre *midtnormaler* i hver af trekant 7 og 8. Skærer de i samme punkt?

Trekant 7**Trekant 8****Opgave 3.1**

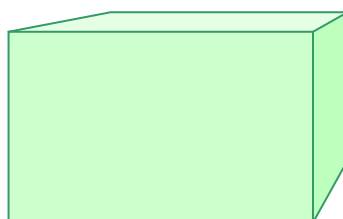
Betragt de 6 trekanter i opgave 2.1. Hvilke vinkler er spidse, hvilke er stumpes og hvilke er rette?

Opgave 4.1 (Ligedannethed)

Trekanten til højre er ligedannet med trekanten til venstre. Skaleringsfaktoren er 1,5. Hvad kan man sige om arealet af den højre trekant i forhold til arealet af trekanten til venstre?

**Opgave 4.2 (Ligedannethed)**

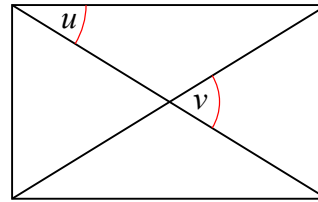
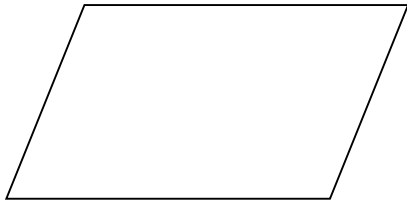
Nedenfor er afbildet en tredimensional kasse. Hvis man skalerer kassen med en faktor 2, dvs. ganger alle sider med 2, hvor mange gange større vil rumfanget af den nye kasse så blive? Sæt eventuelt tal på siderne, hvis du er i tvivl.



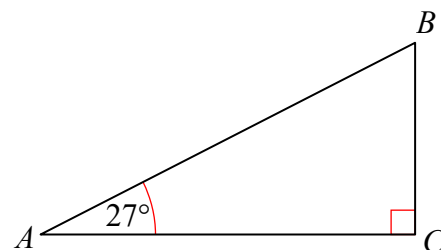
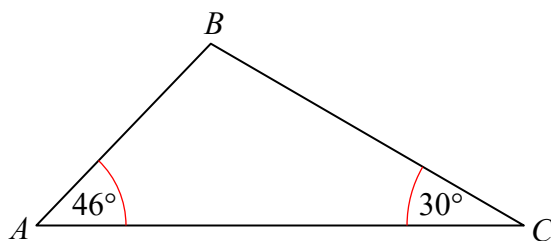
Opgave 5.1

I det følgende skal du bruge grundlæggende regler fra afsnit 5.

- Vis at vinkler, der ligger overfor hinanden i et parallelogram, er lige store.
- Betragt figuren med rektanglet. Vis at $v = 2u$.

**Opgave 6.1 (Vinkelsum i trekant)**

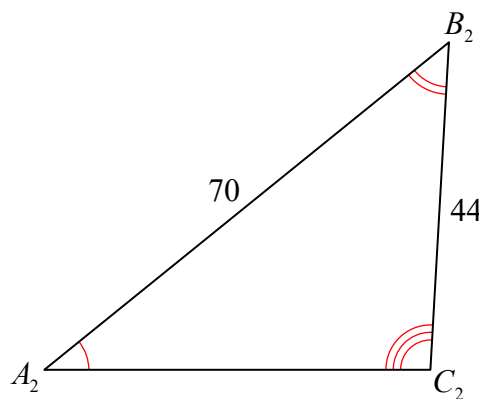
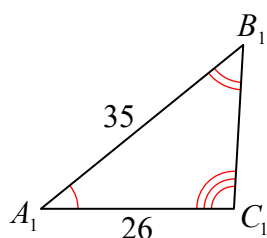
Benyt sætningen om vinkelsummen i en trekant til at bestemme den ukendte vinkel i hver af trekanterne nedenfor.

**Opgave 6.2* (Vinkelsum i polygon)**

- Hvad er vinkelsummen i en firkant? Tegn og argumenter!
- Kan du udvide til en formel for vinkelsummen i en vilkårlig n -kant? (Svær at bevise, men det kan gøres ved induktion). Bemærk, at en n -kant eventuelt kan være *konkav*, dvs. den kan eventuelt have mindst en kant, som ”vender indad”, svarende til at der er en vinkel på mere end 180° . Formlen for vinkelsummen afhænger dog ikke af det.

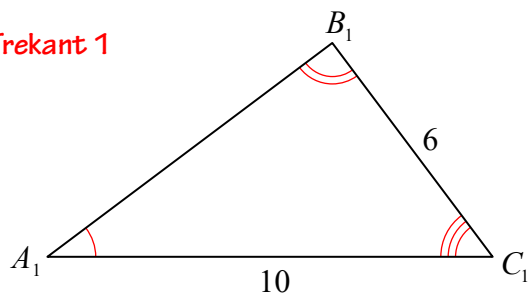
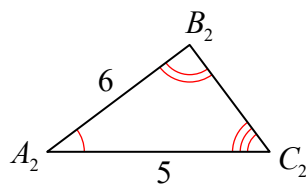
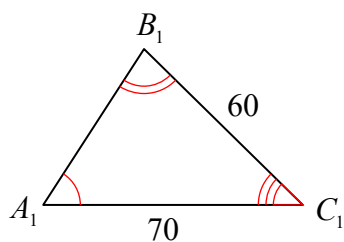
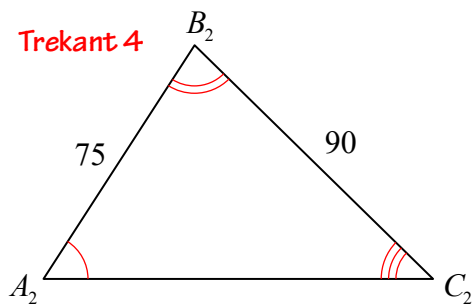
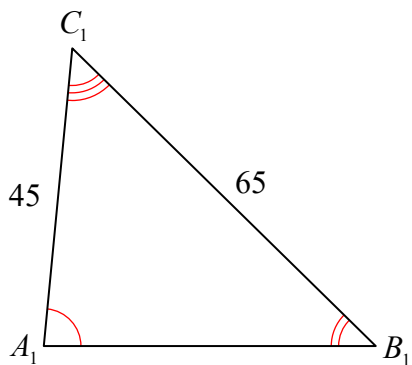
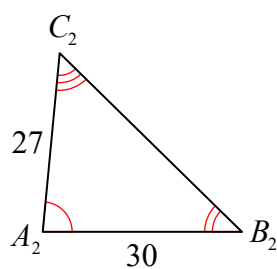
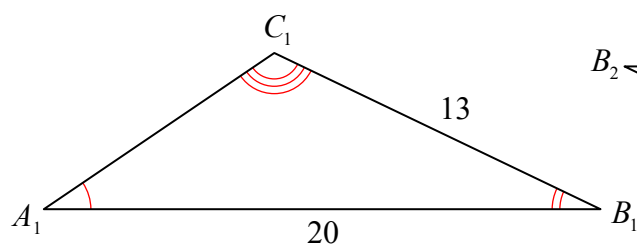
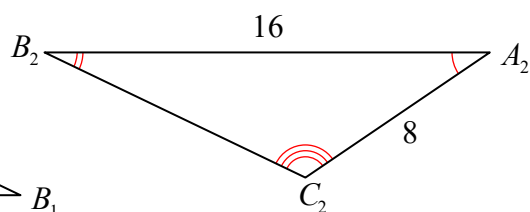
Opgave 7.1 (Ensvinklede trekanter)

Nedenfor er vist to ensvinklede trekanter. Beregn først skaleringsfaktoren k og bestem derefter de ukendte sider i de to trekanter.



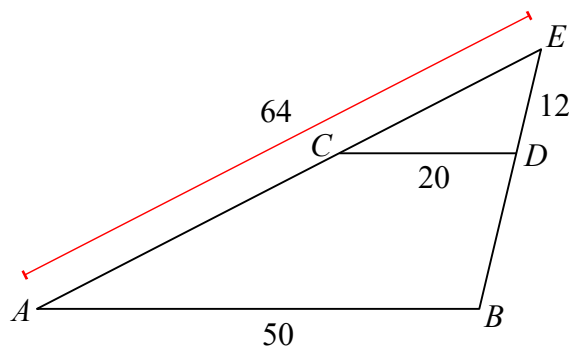
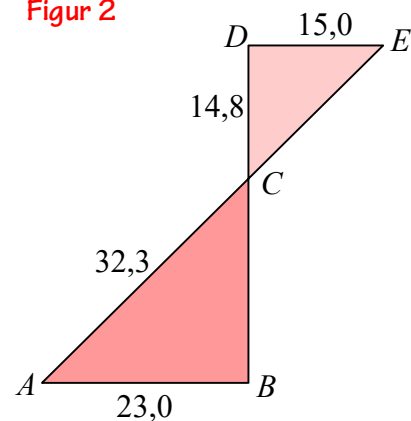
Opgave 7.2 (Ensvinklede trekanter)

- Bestem de ukendte sider i de ensvinklede trekanter 1 og 2.
- Bestem de ukendte sider i de ensvinklede trekanter 3 og 4.
- Bestem de ukendte sider i de ensvinklede trekanter 5 og 6.
- Bestem de ukendte sider i de ensvinklede trekanter 7 og 8.

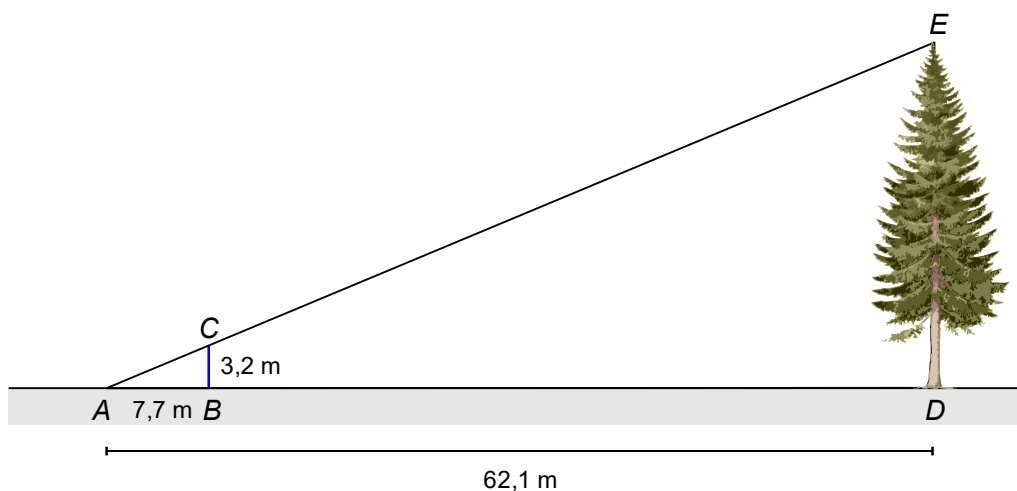
Trekant 1**Trekant 2****Trekant 3****Trekant 4****Trekant 5****Trekant 6****Trekant 7****Trekant 8**

Opgave 7.3* (Ensvinklede trekanter)

- a) Betragt figur 1. Linjestykkerne AB og CD oplyses at være parallelle. Argumentér for, at trekanterne ABE og CDE er ensvinklede og tegn dem hver især side om side, så ensliggende sider ligger overfor hinanden. Brug det til at bestemme de ukendte sider i de to trekanter.
- b) Betragt figur 2. Linjestykkerne AB og DE oplyses at være parallelle. Argumentér for, at trekanterne ABC og CDE er ensvinklede og tegn dem hver især side om side, så ensliggende sider ligger overfor hinanden. Brug det til at bestemme de ukendte sider i de to trekanter.

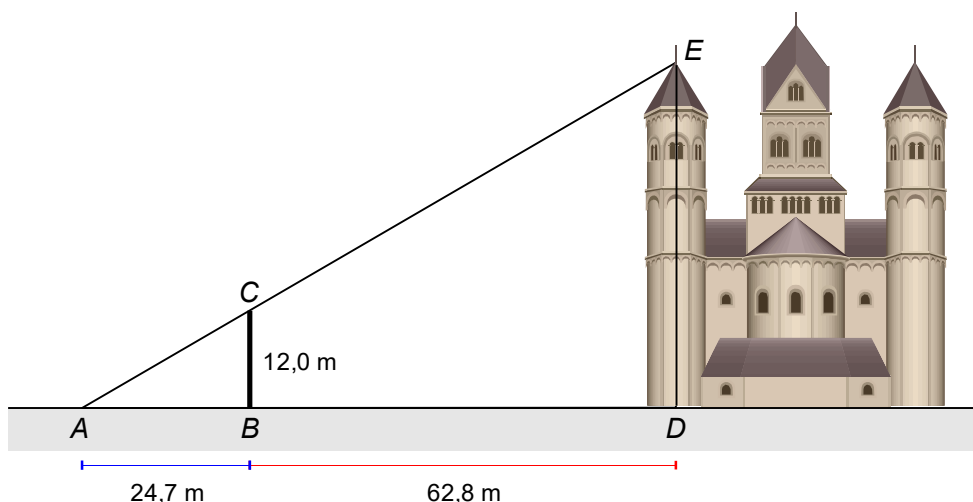
Figur 1**Figur 2****Opgave 7.4** (Ensvinklede trekanter)

Højden h af et træ ønskes bestemt. En person lægger sig fladt ned på jorden med hovedet i et punkt A , så toppen af stokken ser ud til at flugte med toppen af træet. Afstanden fra personens øjne til midten af træstammen er 62,1 m, mens afstanden til stokken er 7,7 m. Stokkens højde er 3,2 m. Længderne er tegnet ind på figuren herunder. Argumenter for, at trekanterne ABC og ADE er ensvinklede og tegn dem side om side, så ensliggende sider ligger overfor hinanden. Brug det til at bestemme højden af træet: $h = |DE|$.



Opgave 7.5 (Ensvinklede trekanter)

En person lægger sig fladt ned på ryggen med hovedet i et punkt A , så personen ser toppen af en eksisterende 12 meter høj pæl flugte med toppen af det ene tårn på et slot. På figuren er anført mål for afstanden fra A til pælens bund B og afstanden fra pælens bund B til midten af tårnets bund D . Benyt disse oplysninger og teorien for ensvinklede trekanter til at bestemme tårnets højde $h = |DE|$.



Opgave 8.1 (Konstruktion af trekant ud fra 3 sider)

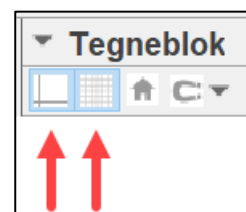
Benyt enten et godt gammeldags sæt med *passer*, *lineal* og *vinkelmåler* eller *GeoGebra* til at konstruere en trekant med siderne 8, 7 og 4.

Passer, lineal og vinkelmåler

1. Et linjestykke AB med længden 8 tegnes.
2. Med centrum i A og med længden 4 i passerens tegnes en cirkel med radius 4.
3. Med centrum i B og med længden 7 i passerens tegnes en cirkel med radius 7.
4. Idet det øverste skæringspunkt mellem de to cirkler betegnes C , tegnes linjestykkerne AC og BC .
5. Mål derefter størrelsen af vinklerne med vinkelmåleren.

GeoGebra

1. Fra starten kan det være en god idé at fjerne det forstyrrende koordinatsystem ved at klikke på den lille trekant til venstre for Tegneblok, så to værktøjer kommer til syne: Klik på både *Show or hide the axes* og *Show or hide the grid* som vist på figuren.
2. Vælg værktøjet *Linjestykke med given længde* og klik et sted på tegneblokken. Et punkt A vises og en boks dukker op, hvori man skriver længden 8. Afslut med OK.
3. Vælg værktøjet *Cirkel ud fra centrum og radius* og klik på punktet A og indtast 4 i feltet for radius. Tryk OK. Så er cirklen med radius 4 og centrum i A tegnet.
4. Vælg værktøjet *Cirkel ud fra centrum og radius* og klik på punktet B og indtast 7 i feltet for radius. Tryk OK. Så er cirklen med radius 7 og centrum i B tegnet.
5. Vælg *Skæringsværktøjet* og klik på henholdsvis den ene cirkel og den anden cirkel. Herved vil de to skæringspunkter mellem cirklerne blive tegnet. Vi vil kun bruge det øverste skæringspunkt C .
6. Vælg værktøjet *Polygon* og klik på punkterne A , B , C og igen A i nævnte rækkefølge. Derved er trekanten ABC fremhævet med en delvis transparent farve.
7. Vælg værktøjet *Vinkel* og klik på de to sider, der støder op til hjørnet A . Gør det samme med hjørnet B og C . Bemærk, at rækkefølgen gør noget! Dermed vises alle vinkler i trekanten.



Opgave 8.2 (Konstruktion af trekant ud fra vinkel og to hosliggende sider)

Benyt enten *passer*, *lineal* og *vinkelmåler* eller *GeoGebra* til at konstruere en trekant med følgende oplysninger: $A = 38^\circ$, $b = 6$ og $c = 8$.

Passer, lineal og vinkelmåler

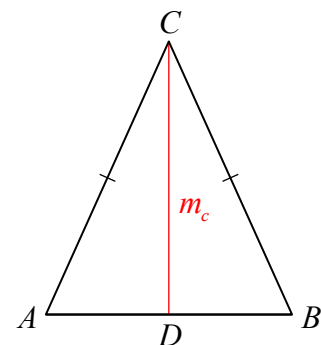
1. Linjestykket $AC = b$ med længde 6 tegnes.
2. Med centrum i endepunktet A benyttes vinkelmåleren til at afsætte et vinkelben, som danner vinklen 38° med AC .
3. Med centrum i A tegnes en cirkelbue med radius 8 til skæring med vinkelbenet fra punkt 2. Skæringspunktet betegnes med B .
4. Punkterne A , B og C forbindes med linjestykker til at danne trekanten ABC .

GeoGebra

1. Fjern koordinatsystemet som vist under punkt 1 i opgave 8.1.
2. Vælg værktøjet *Linjestykke med given længde* og klik et sted på tegneblokken. Et punkt A vises og en boks dukker op, hvori man skriver længden 6. Afslut med OK. Linjestykket AB er nu tegnet.
3. Højreklik på punktet B i Algebra vinduet eller punktet på tegnefladen og vælg i kontekstmenuen *Egenskaber*, hvorefter navnet B kan omdøbes til C i boksen til højre. Husk at trykke **Enter** her. Du kan eventuelt lukke vinduet med *Egenskaber* igen, hvis du ønsker mere plads.
4. Vælg værktøjet *Vinkel med given størrelse* og klik på punktet C og derefter A og skriv 38 i feltet for vinklens gradtal (mod uret). Tryk OK. Det vil skabe en delvist markeret vinkel med et nyt punkt C' .
5. Vælg værktøjet *Halvlinje* og klik først på hjørnet A efterfulgt af den nye punkt C' . Herved vil der blive tegnet en halvlinje ud af vinkelbenet.
6. Vælg værktøjet *Cirkel ud fra centrum og radius* og klik på punktet A og indtast 8 i feltet for radius. Tryk OK. Så er cirklen med radius 8 og centrum i A tegnet.
7. Vælg *Skæringsværktøjet* og klik på henholdsvis halvlinjen og cirklen fra punkterne 5) og 6). Herved vil skæringspunktet mellem cirklen og halvlinjen blive tegnet. Det skal være trekantens hjørne B .
8. Brug værktøjet *Linjestykke* til at forbinde punkterne A og C med et linjestykke.
9. Vælg værktøjet *Polygon* og klik på punkterne A , B , C og igen A i nævnte rækkefølge. Derved er trekanten ABC fremhævet med en delvis transparent farve.
10. Bemærk, at du i Algebra-vinduet kan klikke på de små cirkler til venstre for hvert element i vinduet og derved gøre elementet usynligt/synligt. Navne kan desuden fjernes i vinduet *Egenskaber* under fanen *Basis*: vis navn kan slås fra/til. Prøv noget af dette for at få tegningen til at fremstå pæn.

Opgave 8.3 (Ligebeinet trekant)

Nederst side 9 i afsnit 3 blev der fremsat nogle påstande om en ligebeinet trekant. Du skal nu bevise dem og andre ved hjælp af analysen af de 6 forskellige situationer med tre oplysninger i en trekant fra afsnit 8, specielt de fire første tilfælde, hvor trekanten er entydigt bestemt op til kongruens. Givet en ligebeinet trekant ABC på figuren til højre. Her er benene a og b lige store. Nu tegnes en median m_c ned på siden c . Fodpunktet kaldes D .



- a) Vis at vinklerne A og B er ens. *Hjælp*: Argumenter for, at trekkanterne ACD og BCD er kongruente. Hvilke tre oplysninger er ens i de to trekkanter?
- b) Argumenter for, at højden h_c og vinkelhalveringslinjen v_c er sammenfaldende med medianen m_c i trekant ABC . *Hjælp*: Hvis trekkanterne ACD og BCD er kongruente, hvor stor er vinklen D i hver af dem så nødt til at være?

Opgave 8.4 (Konstruktion af trekant ud fra en side og to hosliggende vinkler)

Benyt enten *passer*, *lineal* og *vinkelmåler* eller *GeoGebra* til at konstruere en trekant med følgende oplysninger: $A = 67^\circ$, $c = 7,2$ og $B = 33^\circ$.

Passer, lineal og vinkelmåler

1. Linjestykket $AB = c$ med længde 7,2 tegnes.
2. Med centrum i endepunktet A benyttes vinkelmåleren til at afsætte et vinkelben, som danner vinklen 67° med AB .
3. Med centrum i endepunktet B benyttes vinkelmåleren til at afsætte et vinkelben, som danner vinklen 33° med AB .
4. Skæringspunktet mellem de to vinkelben konstrueret i punkt 2) og 3) forbindes og kaldes C . Dermed er trekanten ABC konstrueret.

GeoGebra

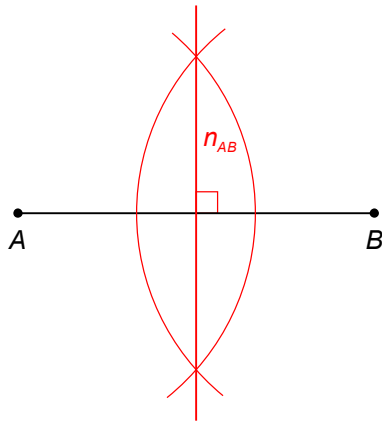
1. Fjern koordinatsystemet som vist under punkt 1 i opgave 8.1.
2. Vælg værktøjet *Linjestykke med given længde* og klik et sted på tegneblokken. Et punkt A vises og en boks dukker op, hvori man skriver længden 7,2. Afslut med OK. Linjestykket AB er nu tegnet.
3. Vælg værktøjet *Vinkel med given størrelse* og klik på punktet B og derefter A og skriv 67 i feltet for vinklens graddtal (mod uret). Tryk OK. Det vil skabe en delvist markeret vinkel med et nyt punkt B' .
4. Vælg værktøjet *Halvlinje* og klik først på hjørnet A efterfulgt af det nye punkt B' . Herved vil der blive tegnet en halvlinje ud af vinkelbenet.
5. Vælg værktøjet *Vinkel med given størrelse* og klik på punktet A og derefter B og skriv 33 i feltet for vinklens graddtal. Huske her at vælge *med uret*! Tryk OK.
6. Vælg værktøjet *Halvlinje* og klik først på hjørnet B efterfulgt af det nye punkt A' . Herved vil der blive tegnet en halvlinje ud af vinkelbenet.
7. Vælg *Skæringsværktøjet* og klik på de to halvlinjer fra punkt 4) og 6). Herved vil skæringspunktet mellem de to halvlinjer blive tegnet. Det skal være trekantens sidste hjørne C .
8. Vælg værktøjet *Polygon* og klik på punkterne A , B , C og igen A i nævnte rækkefølge. Derved er trekanten ABC fremhævet med en delvis transparent farve.
9. Fjern irrelevante elementer fra den endelige tegning på den måde, der er omtalt under punkt 10 i opgave 8.2.

Opgave 8.5 (Klassiske grundkonstruktioner)

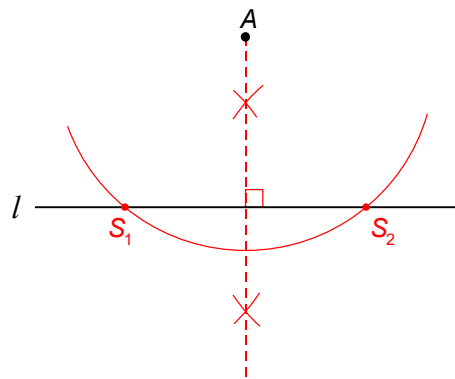
I denne opgave skal vi kigge på nogle af de klassiske grundkonstruktioner, som man møder, når man foretager *geometriske konstruktioner med passer og lineal*: Oprejse en midtnormal til et linjestykke, konstruere en normal til en linje igennem et givet punkt, halvere en vinkel, konstruere en linje parallel med en given linje l gående igennem et givet punkt og endelig: Inddele et linjestykke i n lige store dele. Konstruktionerne K1-K5 er illustreret og beskrevet på de efterfølgende to sider.

- a) Afprøv de tre første konstruktioner K1-K3, idet du udelukkende benytter en passer og en lineal. Har du ikke det til rådighed, kan du benytte GeoGebra, men med de begrænsede muligheder, som passer + lineal giver.
- b) Udfør alle fem konstruktioner K1-K5 i GeoGebra, hvor du har lidt mere automatiske operationer til rådighed. Specielt er konstruktionen K5 her interessant.

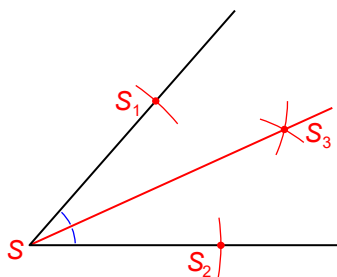
K1: Oprejse midtnormal



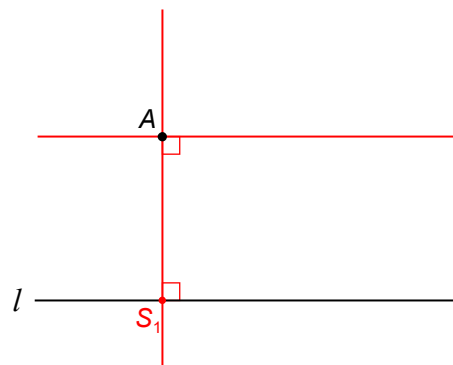
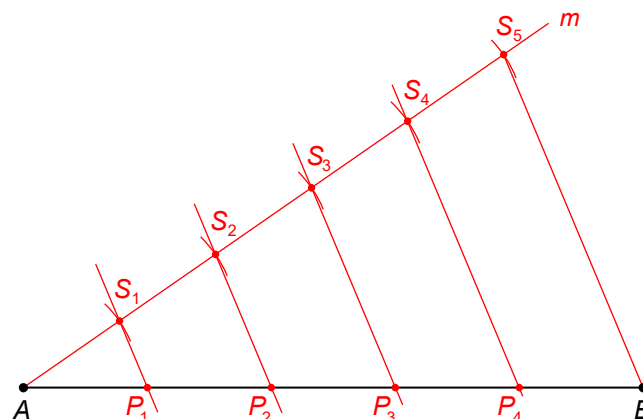
K2: Normal gennem punkt



K3: Halvere en vinkel



K4: Parallel linje gennem punkt

K5: Inddele et linjestykke i n lige store dele**K1: Oprejse midtnormal**

Givet linjestykket AB . Man tager en vilkårlig afstand i passeren - dog større end halvdelen af længden af AB . Herefter tegnes to cirkler med centrum i henholdsvis A og B . Disse to cirkler skærer hinanden i to punkter, som man tegner en linje igennem. Denne nye linje vil være den ønskede midtnormal n_{AB} .

K2: Normal gennem punkt

Givet en linje l og et punkt A . Man tager en vilkårlig afstand i passeren - dog større end afstanden fra A til linjen l . Med centrum i A tegnes en cirkel, som vil skære linjen l i to punkter S_1 og S_2 . Herfra gælder det blot om at oprejse en midtnormal til S_1S_2 efter fremgangsmåden beskrevet i K1.

K3: Halvere en vinkel

Givet en vinkel med vinkelspids i S . Man tager en vilkårlig afstand i passereren og tegner en cirkel med centrum i S . Cirklen vil skære hver af vinklens ben i to punkter S_1 og S_2 . Man tager en vilkårlig afstand i passereren - dog større end halvdelen af afstanden mellem punkterne S_1 og S_2 . Herefter tegnes to cirkler med centrum i henholdsvis S_1 og S_2 . Skæringspunktet længst væk fra S kaldes S_3 . Linjen gennem S og S_3 er den ønskede vinkelhalveringslinje.

K4: Parallel linje gennem punkt

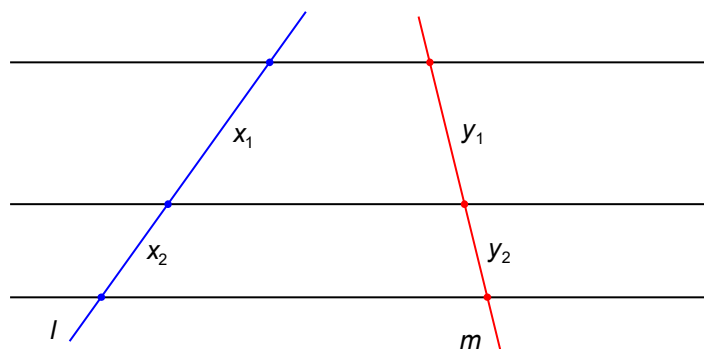
Givet en linje l og et punkt A . Start med at bruge konstruktionsmetoden K2 til at lave en normal til l , som går igennem A . Kald den n . Benyt herefter igen K2 til at konstruere en normal til n , som går igennem A . Denne nye normal er den ønskede linje, som er parallel med l .

K5: Dele et linjestykke i n lige store dele

Givet linjestykket AB . Med endepunkt i A tegnes en halvlinje m . Det vil være passende, at denne halvlinje danner en vinkel med AB på mellem 30° og 50° . Man tager en passende lille afstand r i passereren. Med centrum i A tegnes en cirkel med radius r til skæring med halvlinjen m i S_1 . Med centrum i S_1 tegnes på ny en cirkel med radius r til skæring med halvlinjen m i S_2 . Denne proces fortsættes n gange, så man har det sidste skæringspunkt S_n . På figuren er det 5 gange, hvor man altså stopper ved S_5 . Herefter forbindes S_n med B . Endelig konstrueres der parallelle linjer til linjen S_nB gennem punkterne $S_1, S_2, \dots, S_{n-1}$. Disse parallelle linjer skærer linjestykket AB i punkterne $P_1, P_2, \dots, P_{n-1}$. Disse $n-1$ punkter er de ønskede delepunkter.

Opgave 8.6* (Skærende linjer, som skærer parallelle linjer)

Givet tre parallelle linjer og to linjer l og m som skærer.

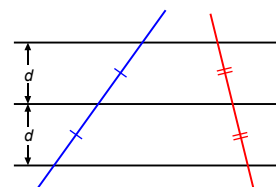


- a) Vis, at forholdet mellem længderne af de stykker, som de parallelle linjer afskærer på l , er det samme som forholdet mellem længderne af de stykker, som de parallelle linjer afskærer på m . Vis med andre ord, at:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}$$

Hjælp: Parallelforskyd den røde linje, så der dannes to ensvinklede trekanten ...

- b) Vis specielt, at hvis de parallelle linjer har samme afstand, så vil de parallelle linjer afskære lige store stykker på enhver linje, som måtte skære. NB! Bemærk, at b) godtgør rigtigheden af konstruktionen K5 i opgave 8.5.



Opgave 8.7 (Konstruktion af trekant)

Konstruer i GeoGebra en trekant med følgende oplysninger: $a = 7$, $c = 10$ og $B = 41^\circ$. Benyt herefter værktøjet *Vinkel* til at måle hver af trekantens øvrige to vinkler.

Opgave 8.8 (Konstruktion af trekant)

Konstruer i GeoGebra en trekant med følgende oplysninger: $c = 5$, $A = 62^\circ$ og $B = 37^\circ$. Benyt herefter værktøjet *Længde* til at måle længden af siderne a og b .

Opgave 8.9 (Konstruktion af trekant)

Konstruer i GeoGebra en trekant med følgende oplysninger: $a = 10$, $b = 4$ og $c = 12$. Benyt herefter værktøjet *Vinkel* til at måle hver af trekantens vinkler.

Opgave 8.10* (Konstruktion af trekant)

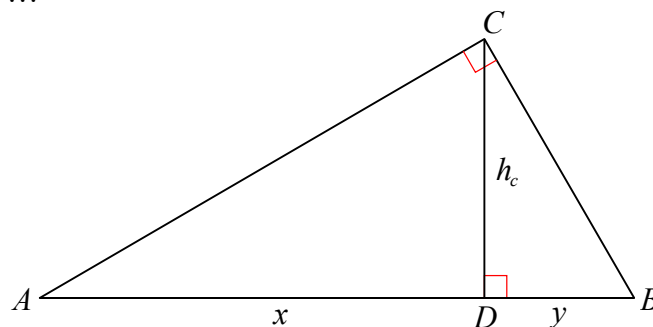
Konstruer en trekant med følgende oplysninger: $c = 8,4$; $A = 40^\circ$ og højden $h_c = 5,9$.

Hjælp: Hjørnet C må ligge et sted på den linje, som er parallel med linjestykket AB .

Opgave 8.11* (Højden i en retvinklet trekant)

Vis at i en retvinklet trekant vil højden h_c fra den rette vinkel ned på siden c dele siden c i to stykker x og y , som opfylder: $h_c^2 = x \cdot y$.

Hjælp: Kald fx vinklen A for ν og vis, at de to trekanter ADC og BDC , som højden deler den oprindelige trekant ABC i, begge er ensvinklede med trekant ABC . Kig derefter på skaleringsfaktorer ...

**Opgave 8.12 (Trekantuligheden)**

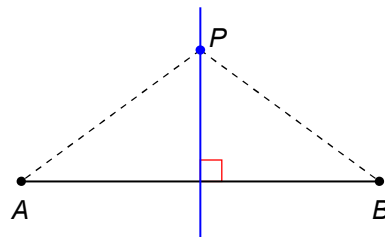
Argumenter for hvorfor siderne a , b og c i en generel trekant altid vil opfylde, at summen af to af siderne er større end den sidste side, altså at $a + b > c$, $a + c > b$ og $b + c > a$.

Hjælp: Overvej, hvordan du ville konstruere en trekant, hvis fx $a + b = c$ eller $a + b < c$. Hvad ville gå galt her, hvis du forsøgte at konstruere trekanten ved hjælp af konstruktionsmetode 1 side 18? Hvis du ikke kan overskue bogstaverne, kan du evt. prøve med nogle tal for at få idéen: Antag $a = 3$, $b = 4$ og $c = 8$. Start med at tegne c ...

Opgave 8.13 (Midtnormaler)

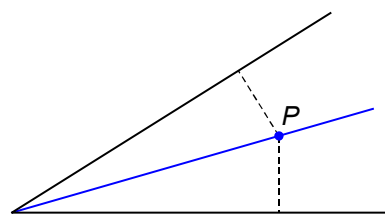
Bevis, at et punkt P ligger på midtnormalen til linjestykket AB , hvis og kun hvis P ligger lige langt fra linjestykkets endepunkter A og B . Bemærk, at der er to veje at vise! *Hjælp:* Se på kongruente trekanter.

Bemærk: Egenskaben godtgør rigtigheden af konstruktionen K1 fra opgave 8.5.

**Opgave 8.14 (Vinkelhalveringslinjer)**

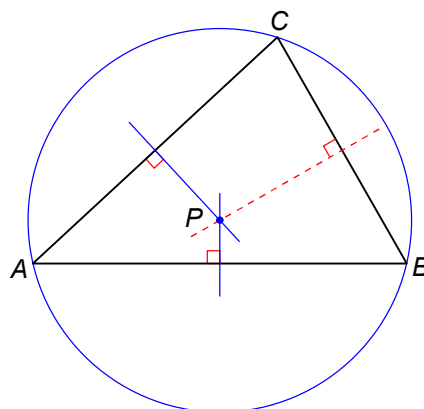
Bevis, at ethvert punkt P ligger på vinkelhalveringslinjen til en vinkel, hvis og kun hvis P ligger lige langt fra vinklens ben. Bemærk, at der er to veje at vise! *Hjælp:* Se på kongruente trekanter.

Bemærk: Egenskaben godtgør rigtigheden af konstruktionen K3 fra opgave 8.5.

**Opgave 8.15 (Trekantens omskrevne cirkel)**

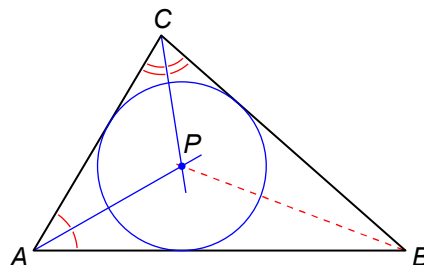
Allerede i afsnit 2 blev det påstået, at midtnormalerne i en trekant skærer hinanden i samme punkt, som derudover også er centrum i trekantens omskrevne cirkel. Det skal du bevise her.

Hjælp: Midtnormalerne for to af siderne skærer hinanden i et punkt P . Det gælder nu om at bevise, at højden fra P ned på den sidste side også er en midtnormal. Benyt egenskaben omtalt i opgave 8.13.

**Opgave 8.16 (Trekantens indskrevne cirkel)**

Allerede i afsnit 2 blev det påstået, at vinkelhalveringslinjerne i en trekant skærer hinanden i samme punkt, som derudover også er centrum i trekantens indskrevne cirkel. Det skal du bevise her.

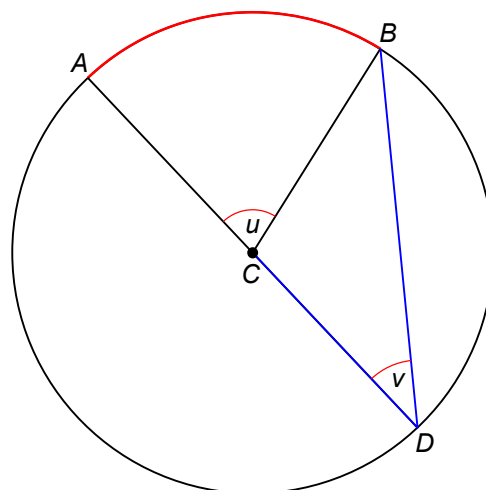
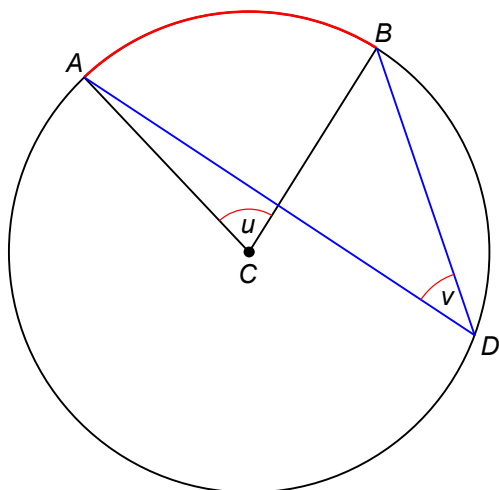
Hjælp: Vinkelhalveringslinjerne for to af vinklerne skærer hinanden i et punkt P . Det gælder nu om at bevise, at linjen gennem P og det sidste hjørne også er en vinkelhalveringslinje. Benyt egenskaben omtalt i opgave 8.14.



Opgave 9.1 (Periferi og centervinkler)

I denne opgave skal du færdiggøre beviset for sætning 15 om periferi og centervinkler. De to tilfælde, hvor C ligger henholdsvis *udenfor* periferivinklen og henholdsvis *på* det ene ben af centervinklen, mangler at blive behandlet. De er vist på figurerne nedenfor. Benyt en lignende teknik som der blev anvendt for tilfældet, hvor C ligger mellem periferivinklens ben.

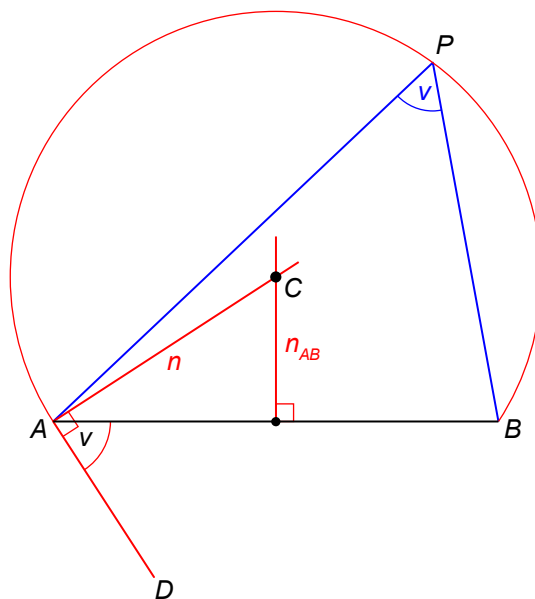
Hjælp: Start med i tilfældet til venstre at forbinde C og D med et linjestykke og kig derefter på de ligebenede trekanter ACD og BCD .



Opgave 9.2* (Synsvinkelkonstruktion)

Givet et linjestykke AB og en vinkel v . Der ønskes et punkt P således, at linjestykket AB ses under vinklen v , dvs. så $\angle APB = v$. Konstruktionen går som følger (se figuren):

- Afsæt under AB et linjestykke AD , som danner vinklen v med AB .
- Opret en normal n til AD i punktet A .
- Konstruer en midtnormal n_{AB} til linjestykket AB .
- Lad C være skæringspunktet mellem n og n_{AB} .
- Tegn med centrum i C og radius lig med $|AC|$ den del af cirklen, som ligger over linjestykket AB .
- Ethvert punkt P på cirkelbuen over AB vil opfylde betingelserne.



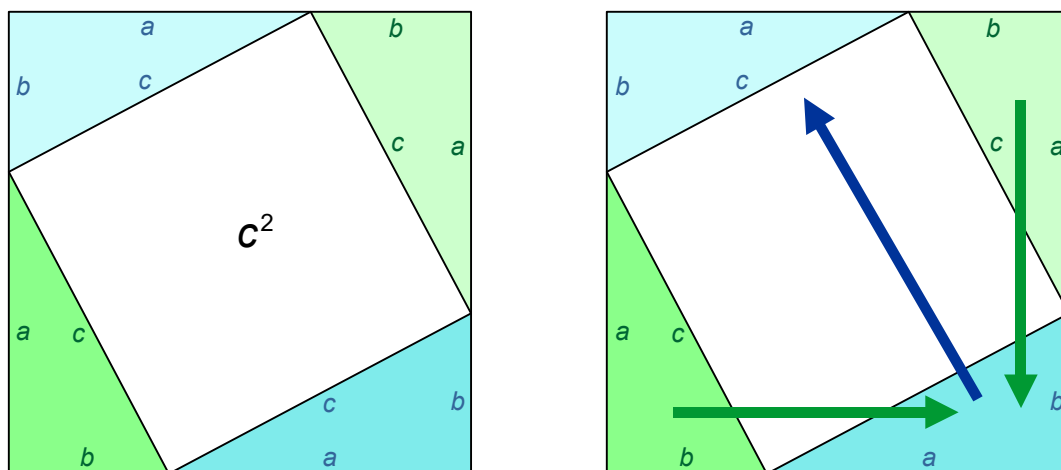
Du ønskes at vise, at metoden virker, dvs. at den "blå vinkel" ved P virkelig er lig med v .
Hjælp: Tænk i samme baner som i beviset for sætning 15.

Opgave 9.3 (Konkret synsvinkelkonstruktion)

Afsæt et vandret linjestykke AB med længden 6 cm. Du skal nu bruge synsvinkelkonstruktionsmetoden beskrevet i opgave 9.2 til at konstruere en vinkel C med gradtallet 52° – dvs. så AB ses under denne vinkel fra punktet C .

Opgave 10.1 (Bevis for Pythagoras' sætning – en variation)

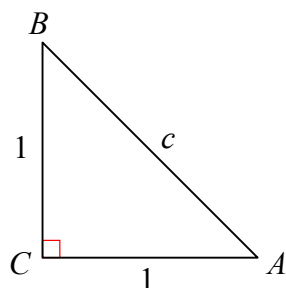
Som nævnt i bemærkning 17 kan man godt slippe for algebraiske udregninger, som dem i (3) i afsnit 10, hvis man fortager nogle parallelforskydninger indenfor en figur. Figuren er den nedenfor til venstre. Højre figur viser de trekanter, som skal parallelforskydes og i hvilken retning. Prøv at gøre det, fx ved at klippe trekanterne ud af et kvadrat og flytte rundt på dem. Der er en skabelon på næste side, som du kan printe ud og klippe i. Trekanterne flyttes på plads i det tomme kvadrat. Hvad får du ud af det? Kan du gennemskue, at det fuldfører beviset?



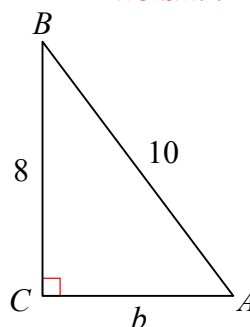
Opgave 10.2

- Betragt den retvinklede trekant 1 nedenfor. Brug Pythagoras' sætning til at vise, at hypotenusens eksakte længde er $\sqrt{2}$. Udregn det også i kommatal.
- Grækerne talte om at "konstruere tal", dvs. konstruere længder, som havde tallet som længde. Hvordan kan du konstruere tallet $\sqrt{3}$ efter at have konstrueret tallet $\sqrt{2}$?
- Bestem kateten b i trekant 2 ved hjælp af Pythagoras' sætning.

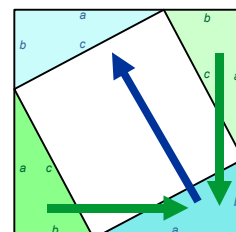
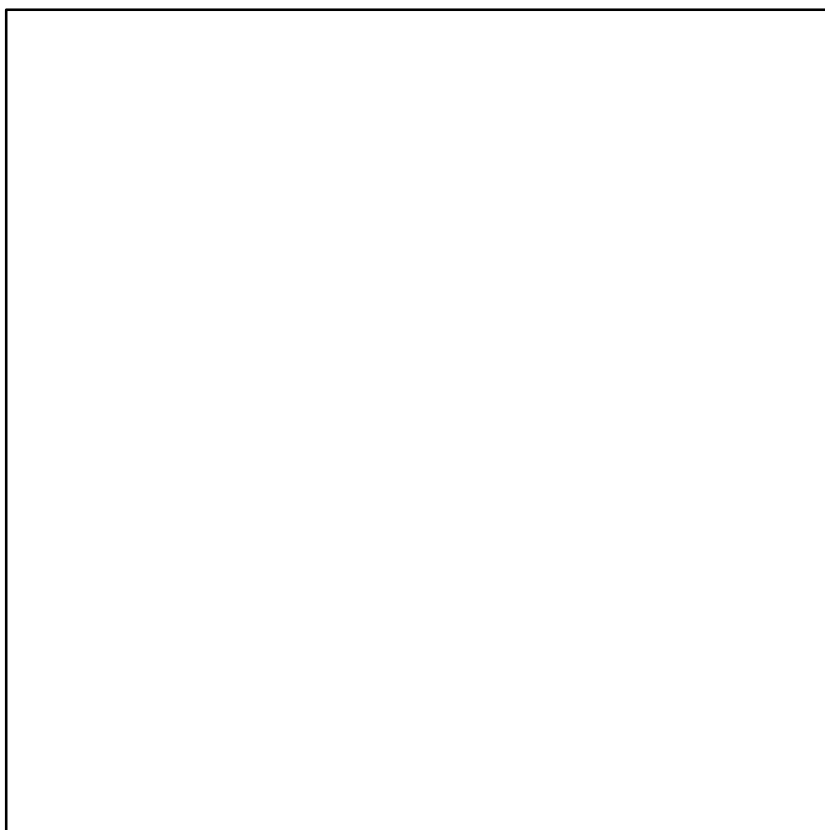
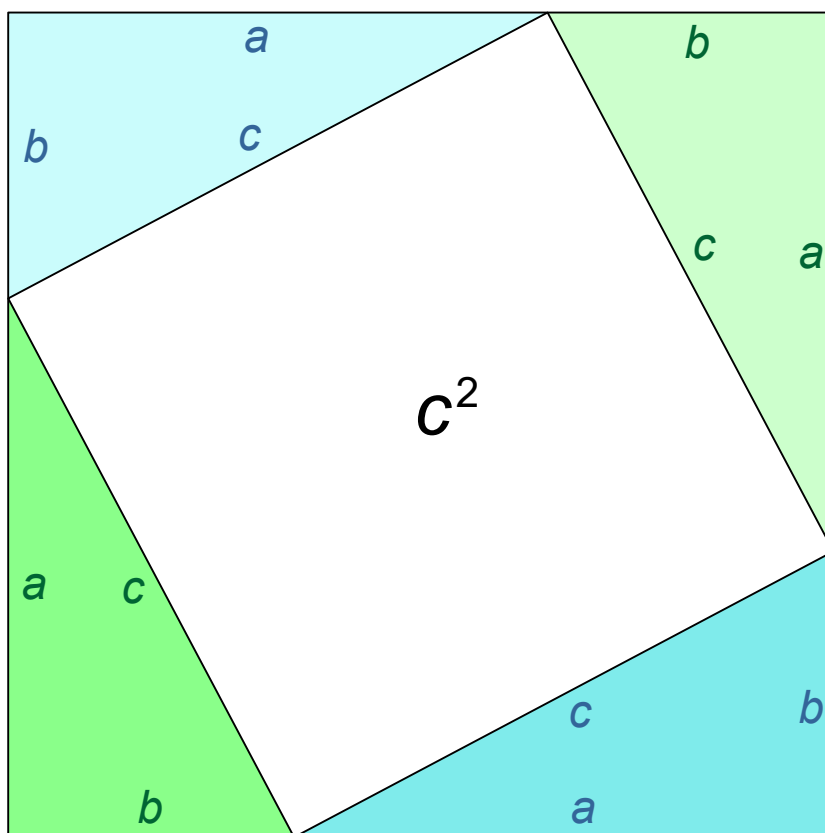
Trekant 1



Trekant 2

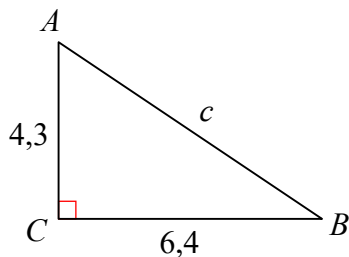
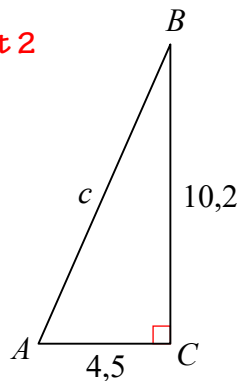
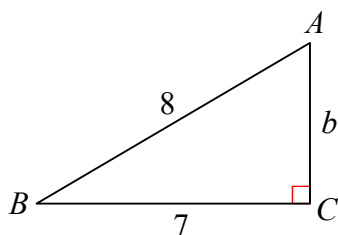
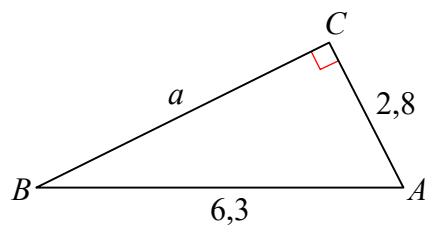
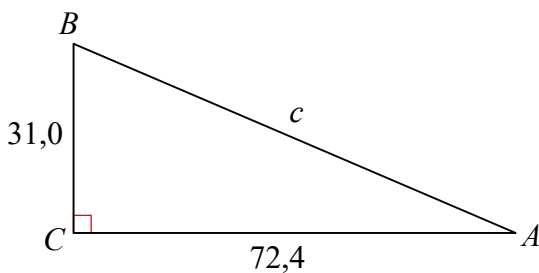
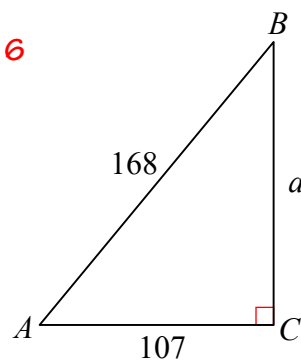
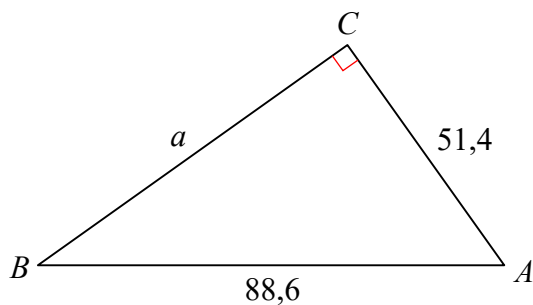
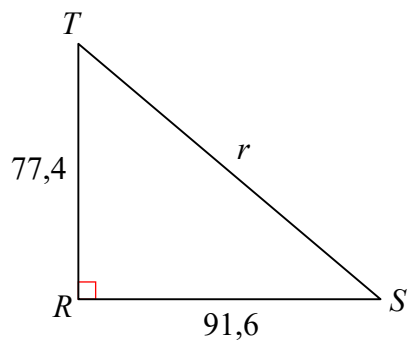


Skabelon til opgave 10.1



Opgave 10.3

Benyt Pythagoras' sætning til at beregne den ukendte side i hver af de retvinklede trekanter nedenfor. Benyt altså kun værktøjer svarende til en simpel lommeregner her. Angiv resultaterne med 1 decimals nøjagtighed.

Trekant 1**Trekant 2****Trekant 3****Trekant 4****Trekant 5****Trekant 6****Trekant 7****Trekant 8**

Opgave 10.4

Konstruer med passer og lineal eller GeoGebra en retvinklet trekant, som har en katete på 6 og en hypotenuse på 9. Mål hvor lang den sidste katete er og kontroller resultatet ved at bruge Pythagoras' sætning.

Opgave 10.5

Bestem den ukendte side i nedenstående retvinklede trekanter ABC , hvor C betegner den rette vinkel. Angiv resultaterne med 1 decimals nøjagtighed.

- a) $a = 4$ og $b = 1$ b) $b = 3,8$ og $c = 6,1$
 c) $a = 90,7$ og $b = 71,5$ d) $c = 68,0$ og $a = 60,6$

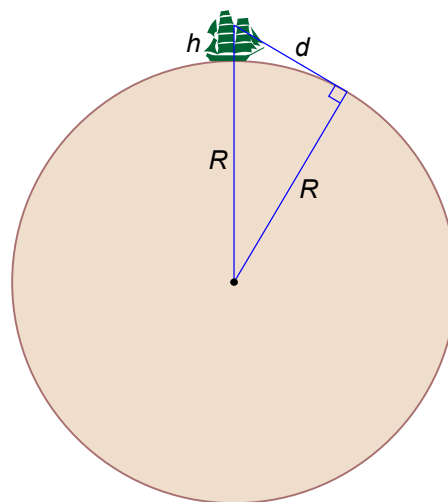
Opgave 10.6

En maler står på en stige, som er 2,5 m lang. Når den står op ad væggen, rækker den op i en højde af 2,25 m. Hvor langt står stigen ud fra væggen ved bunden?



Opgave 10.7 (Hvor langt kan man se på havet?)

Når styrmanden står på broen på et skib, kan han se langt ud over havet, afhængig af dennes øjenhøjde over vandoverfladen. I det følgende antager vi, at Jorden er kuglerund, og at vi kan se bort fra refraction (afbøjning) af lys i atmosfæren. Vi vil kalde styrmandens øjenhøjde over vandoverfladen for h og Jordens radius for R . Afstanden, som styrmanden kan se på åbent hav, betegnes med d – i fugleflugtslinje fra øje til horisont. Sammenhængen mellem de tre størrelser fremgår af den retvinklede trekant afbildet til højre. Her er h dog tegnet urealistisk stor, så den kan ses på figuren.



- a) Forklar baggrunden for den retvinklede trekant.

Styrmandens øjenhøjde over vandoverfladen er 14 meter og Jordens radius er 6371 km.

- b) Hvor langt kan styrmanden se på åbent hav?

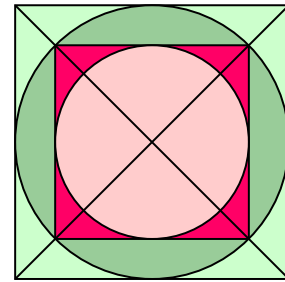
Hjælp: Brug Pythagoras' sætning til at beregne d .

- c) Hvor højt skal styrmanden op over vandoverfladen, for at han kan se 20 km væk?

- d) Udregn en færdig formel for d udtrykt ved h og R . Reducer den så meget som muligt.

Opgave 10.8*

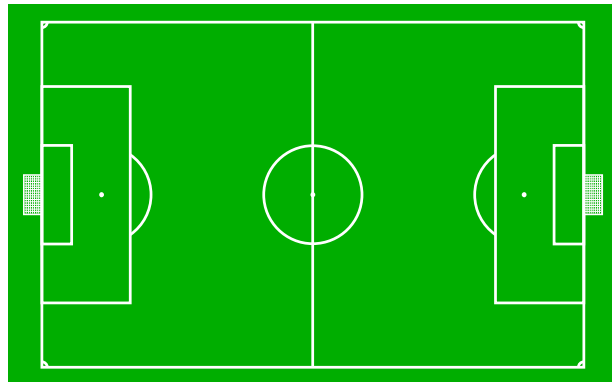
Figuren viser et kvadrat, hvori der er indskrevet en cirkel, hvori der er indskrevet et nyt kvadrat, hvori der er indskrevet en ny cirkel.



- Hvad er forholdet mellem det store kvadrats areal og det lille kvadrats areal? *Hjælp:* Sæt betegnelser på. Kald for eksempel siden i det store kvadrat for a .
- Samme spørgsmål for forholdet mellem cirklernes areal.

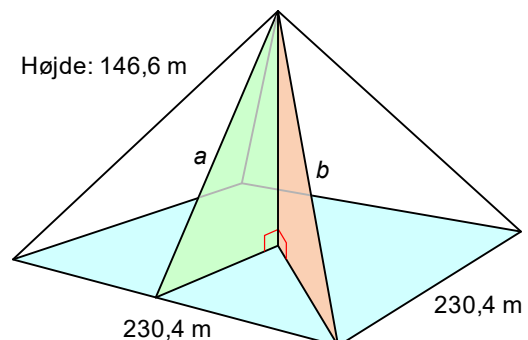
Opgave 10.9

Figuren viser en fodboldbane, som er 105 meter lang og 65,5 meter bred. En spiller skal fra det ene hjørneflag til det diametralt modsatte. Beregn hvor meget spilleren sparer ved at løbe langs diagonalen fremfor at løbe langs de to sidelinjer.

**Opgave 10.10 (Cheops pyramiden ved Giza)**

Den berømte Cheopspyramide ved Giza havde oprindeligt en højde på 146,6 m og en kvadratisk bund med sidelængden 230,4 m. Bestem længden af diagonalerne a og b som vist på figuren.

Hjælp: Tænk på metoderne fra eksempel 21.



Opgave 10.11* (Afstande i rummet)

Givet to punkter $P_1(x_1, y_1, z_1)$ og $P_2(x_2, y_2, z_2)$ i rummet. Benyt Pythagoras' sætning til at vise, at afstanden mellem de to punkter kan fås ved følgende formel:

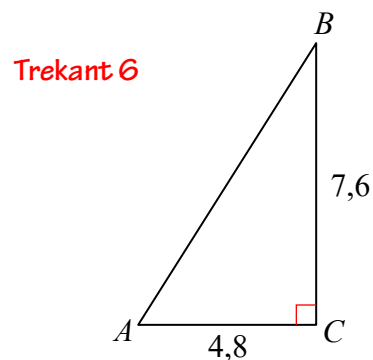
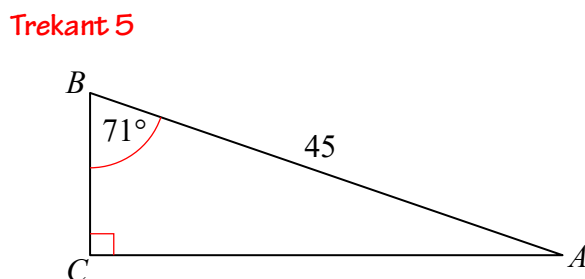
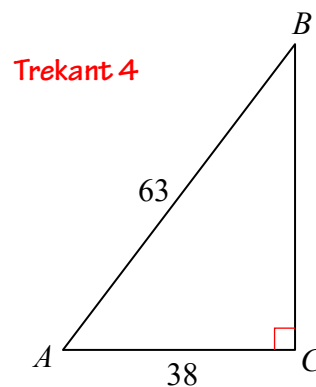
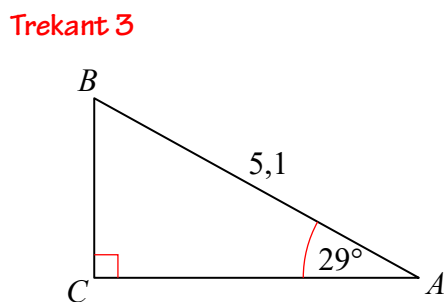
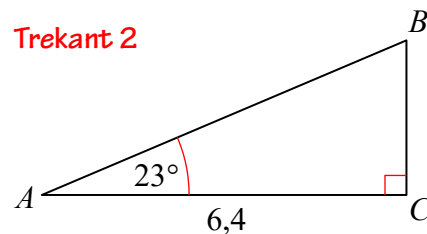
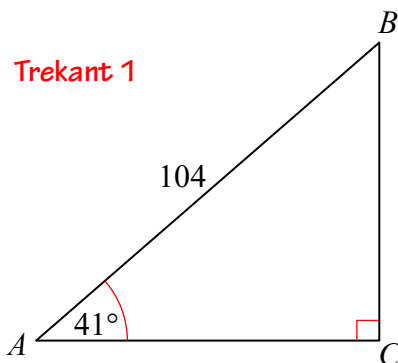
$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Hjælp: Benyt idéerne fra eksempel 21 og 22.

Opgave 11.1

Løs følgende opgaver i trekanterne nedenfor:

- | | |
|----------------------------------|------------------------------------|
| a) Bestem siden b i trekant 1. | d) Bestem vinklen B i trekant 4. |
| b) Bestem siden c i trekant 2. | e) Bestem siden b i trekant 5. |
| c) Bestem siden a i trekant 3. | f) Bestem vinklen A i trekant 6. |

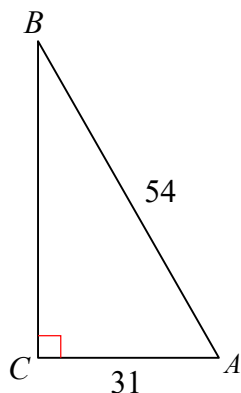


Opgave 11.2

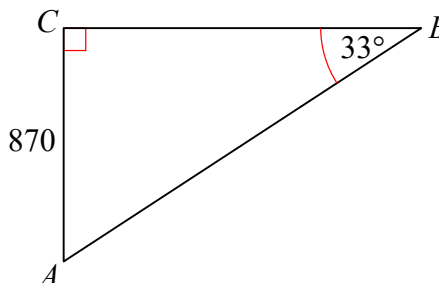
Løs følgende opgaver i trekanterne nedenfor:

- a) Bestem vinklen A i trekant 1 b) Bestem siden c i trekant 2.

Trekant 1



Trekant 2



Opgave 11.3

Løs nedenstående opgaver, idet du først skitserer en trekanten med de opgivne oplysninger. Sørg for, at den er nogenlunde realistisk i forholdene!

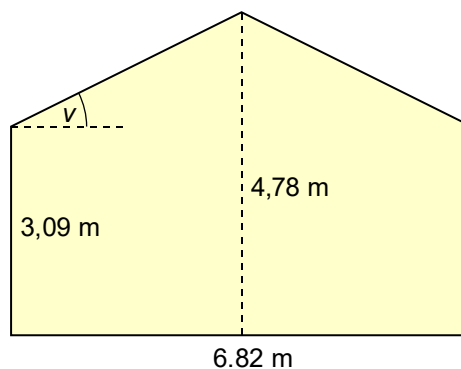
- I en retvinklet trekant er $a = 4,8$; $B = 32^\circ$; $C = 90^\circ$. Bestem siden c .
- I en retvinklet trekant er $b = 0,67$; $c = 1,04$; $C = 90^\circ$. Bestem vinklen A .
- I en retvinklet trekant er $c = 41$; $a = 23$; $C = 90^\circ$. Bestem vinklen A .
- I en retvinklet trekant er $b = 16,7$; $A = 82^\circ$; $C = 90^\circ$. Bestem siden a .
- I en retvinklet trekant er $b = 42$; $B = 68^\circ$; $C = 90^\circ$. Bestem siden a .
- I en retvinklet trekant er $b = 12,9$; $c = 18,7$; $C = 90^\circ$. Bestem vinklen B .

Opgave 11.4

I en retvinklet trekant oplyses det, at $a = 28$; $b = 35$; $C = 90^\circ$. Bestem de ukendte sider og vinkler i trekanten. Du bestemmer selv i hvilken rækkefølge. Du må også gerne gøre brug af Pythagoras' sætning samt udnytte vinkelsummen i en trekant, selv om det ikke er nødvendigt.

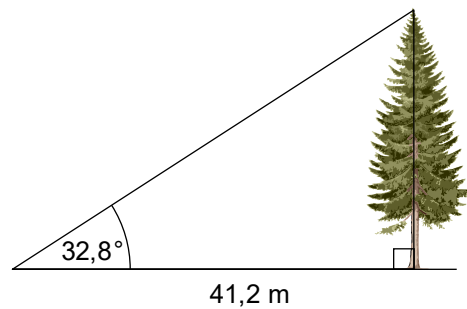
Opgave 11.5

I en bygning er målene som vist på figuren. Bestem tagets vinkel v , idet det oplyses, at gavlen er symmetrisk omkring den stiplede lodrette linje.



Opgave 11.6

I en vandret afstand på 41,2 m fra et træ, kan træets top ses under en vinkel på $32,8^\circ$ i forhold til vandret. Bestem træets højde.

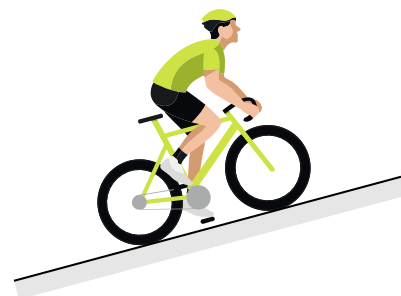
**Opgave 11.7 (Stigningsprocent)**

I cykelverdenen defineres *stigningsprocenten* p for en bakke på følgende måde:

$$p = \frac{\text{Lodret stigning}}{\text{Vandret længde}} \cdot 100\%$$

Eksempel: Hvis man på en bakke bevæger sig 100 meter opad og 1000 m i vandret retning, så er stigningsprocenten på

$$p = \frac{100 \text{ m}}{1000 \text{ m}} \cdot 100\% = 0,1 \cdot 100\% = 10\%$$

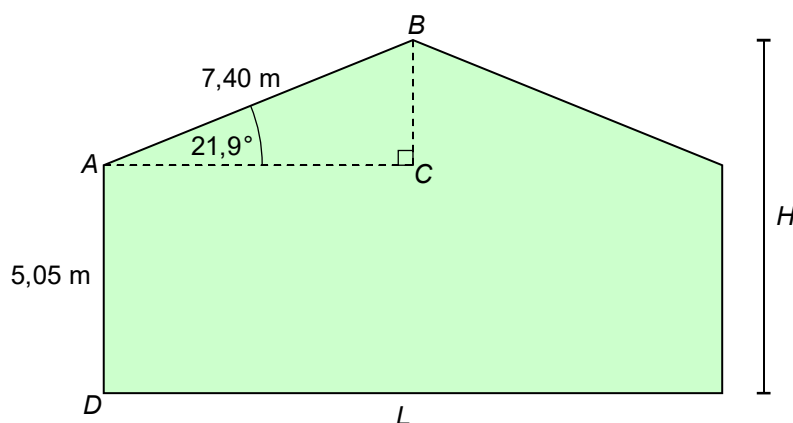


Jonas Vingegaard kører 650 meter op ad en bakke, som har en stigningsprocent på 10,5%.

- Beregn den vinkel, som stigningen danner i forhold til vandret.
- Hvor meget øger han sin højde over vandoverfladen?
- Hvor meget har han bevæget sig i vandret retning?

Opgave 11.8

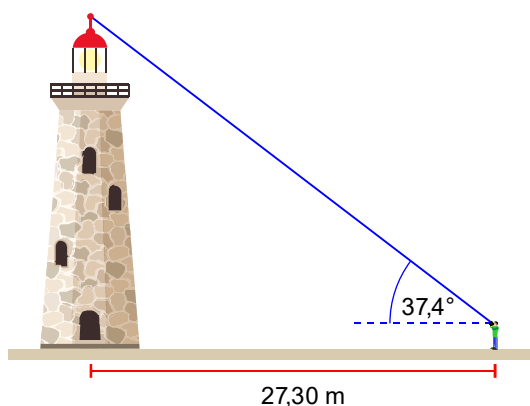
En symmetrisk bygning har et tag, som hælder med $21,9^\circ$. Ellers er målene som anført på figuren. Bestem længden L af gavlen og højden H af bygningen.

**Opgave 11.9**

En retvinklet trekant er $b = 83$; $B = 38^\circ$; $C = 90^\circ$. Bestem de ukendte sider og vinkler i trekanten. Du bestemmer selv i hvilken rækkefølge. Du må også gerne gøre brug af Pythagoras' sætning samt udnytte vinkelsummen i en trekant, selv om det ikke er nødvendigt.

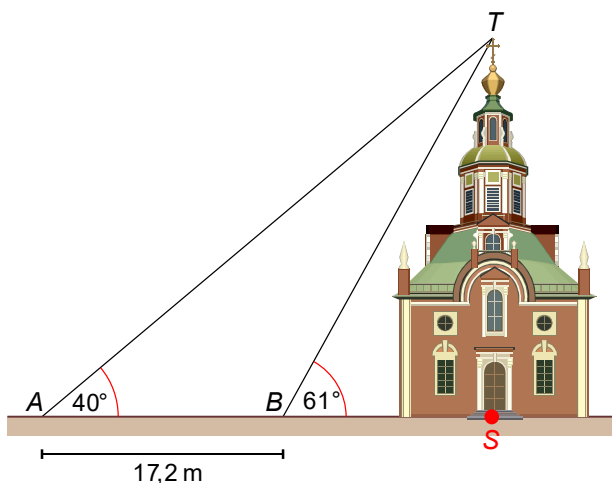
Opgave 11.10

Anton ønsker at vurdere højden af et fyrtårn. Han stiller sig i afstanden 27,30 meter fra bunden og midten af tårnet og foretager en måling med en sekstant. Han måler den vinkel, som strålen fra tårnets top danner med vandret, til at være $37,4^\circ$. Bestem tårnets højde, idet det oplyses, at Antons øjenhøjde er 1,80 m.

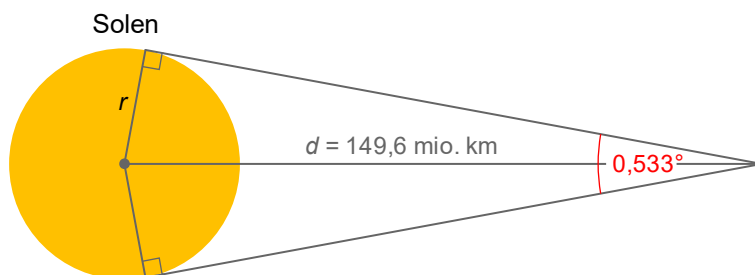
**Opgave 11.11***

I punkterne A og B måles vinklerne til toppen af en høj bygning som henholdsvis 40° og 61° som vist på figuren. Afstanden mellem de to punkter A og B måles til 17,2 m. Bestem bygningens højde h .

Hjælp: Opstil et udtryk for h i hver af de to retvinklede trekanter BST og AST og sæt derefter udtrykkene lig med hinanden. Løs endelig ligningen med hensyn til x .

**Opgave 11.12**

Solen befinder sig 149,6 mio. km fra Jorden. Når man fra Jorden kigger på Solen, så har den en *vinkeldiameter* på $0,533^\circ$. Bestem Solens diameter.

**Opgave 11.13**

Bestem de ukendte vinkler i trekanterne i opgave 10.3 fra afsnit 10.

Opgave 12.1

I denne opgave skal du aflæse cosinus og sinus til en række vinkler og skrive dem i tabellen nedenfor. Benyt enhedscirklen med visning af vinkler på næste side. Print eventuelt denne side og siden med enhedscirklen ud på hvert sit ark papir. Observer også de mange symmetrier, som gælder for de trigonometriske funktioner.

Vinkel v (°)	0	15	30	45	60	75
$\cos(v)$						
$\sin(v)$						

Vinkel v (°)	90	105	120	135	150	175
$\cos(v)$						
$\sin(v)$						

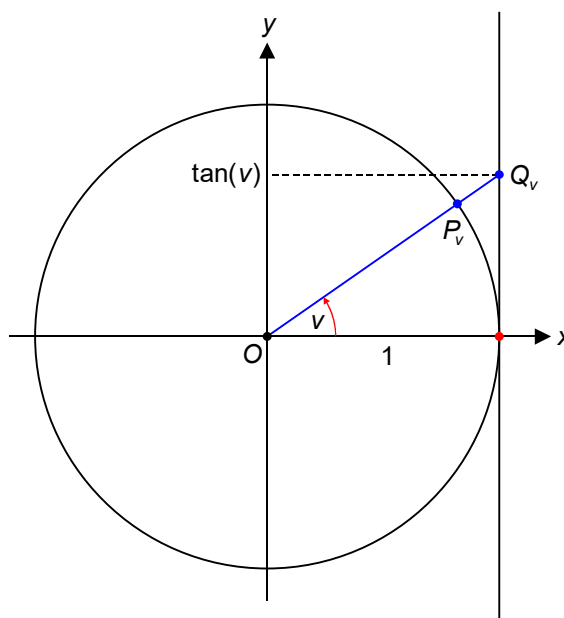
Vinkel v (°)	180	195	210	225	240	255
$\cos(v)$						
$\sin(v)$						

Vinkel v (°)	270	285	300	315	330	345
$\cos(v)$						
$\sin(v)$						

Opgave 12.2*

I afsnit 12 blev det vist, hvordan $\cos(v)$ og $\sin(v)$ kan aflæses på enhedscirklen. Imidlertid kan $\tan(v)$ også aflæses, men på følgende måde: Tegn en lodret linje i punktet $(1,0)$. Linjen igennem $(0,0)$ og retningspunktet P_v skærer den lodrette linje i et punkt Q_v . Da fås $\tan(v)$ som y -koordinaten til Q_v . Bevis dette.

Hjælp: Vis først at linjen igennem $(0,0)$ og retningspunktet P_v har følgende ligning: $y = \tan(v) \cdot x$.



Opgave 12.3

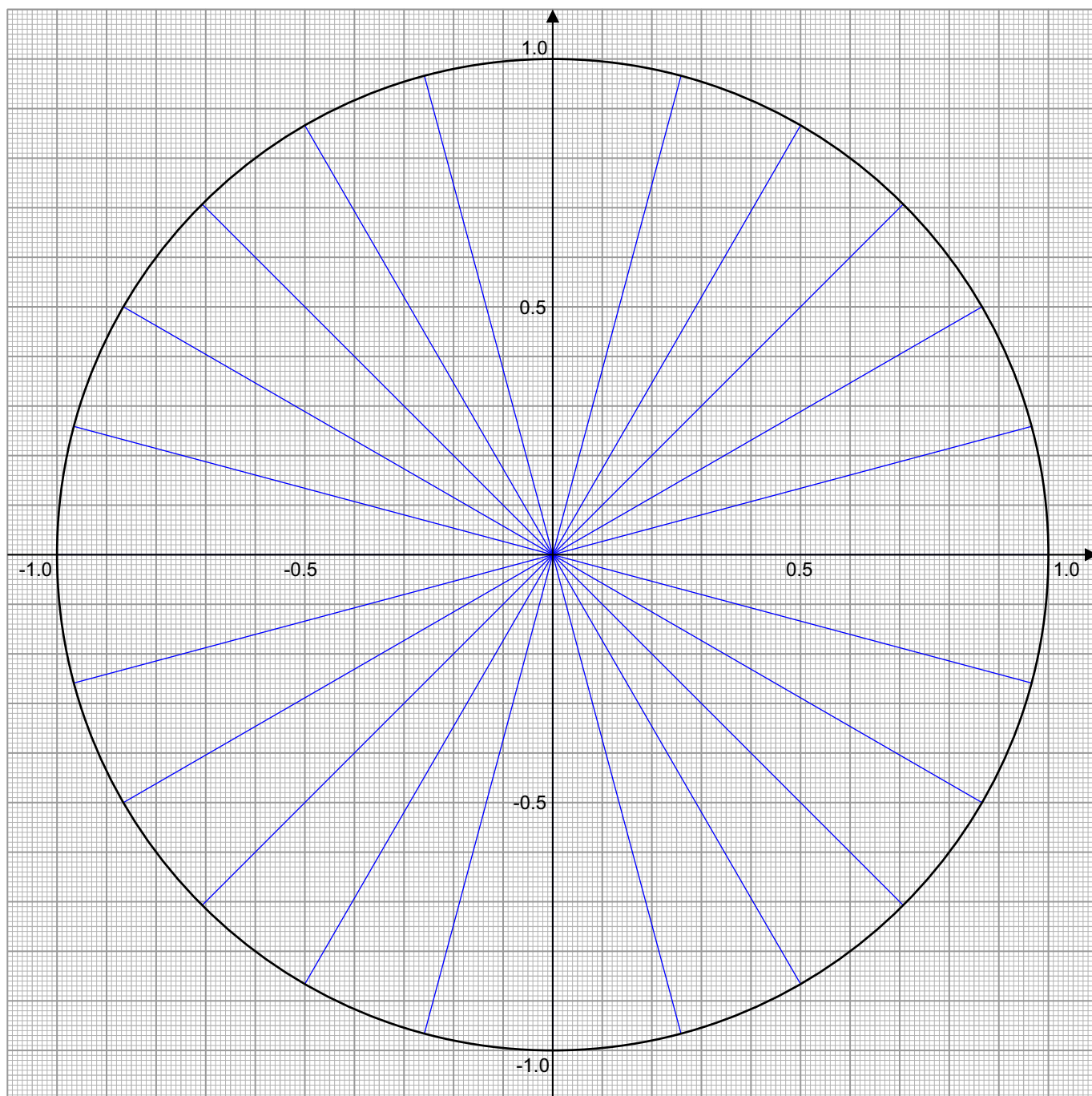
Vis at cosinus og sinus er *periodisk* med perioden 360° , dvs. at:

$$\cos(v + 360^\circ) = \cos(v) \quad \text{og} \quad \sin(v + 360^\circ) = \sin(v)$$

Hjælp: Hvor ligger retningspunktet P_{v+360° i forhold til retningspunktet P_v .

Enhedscirke til opgave 12.1.

Aflæse cosinus og sinus til vinkler



Opgave 12.4

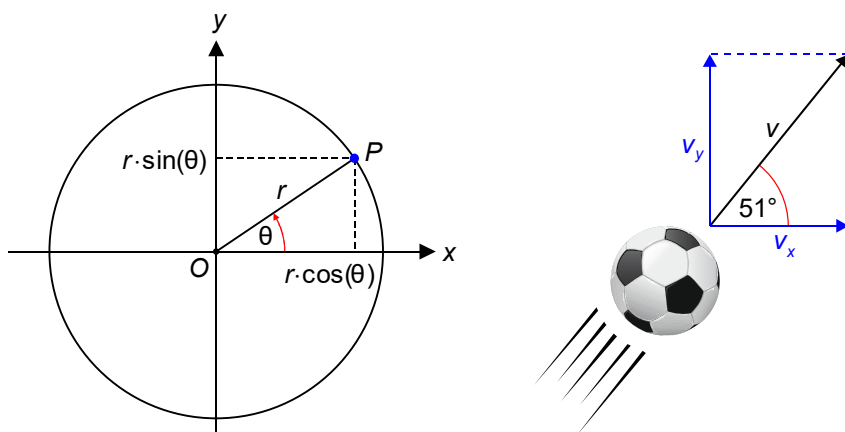
Vis, at der gælder følgende symmetrier:

- a) $\cos(v+180^\circ) = -\cos(v)$ og $\sin(v+180^\circ) = -\sin(v)$
 b) $\cos(90^\circ - v) = \sin(v)$ og $\sin(90^\circ - v) = \cos(v)$

Hjælp: a) Vælg en vinkel v og afsæt dens retningspunkt P_v på enhedscirklen. Afsæt derefter retningspunktet P_{v+180° for vinklen $v+180^\circ$ på enhedscirklen. Sammenlign disse retningspunkters koordinater – ligesom i beviset for sætning 31. b) Gør noget tilsvarende som i a). I øvrigt kalder man vinklen $90^\circ - v$ for *komplementvinklen* til v .

Opgave 12.5

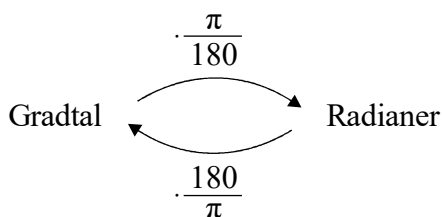
Et punkt P befinder sig på en cirkel med radius r og centrum i $(0,0)$. Linjestykket OP danner vinklen θ med vandret. På den højre del af figuren ser vi en fodbold blive sendt afsted med en fart v på 25 m/s. Hastighedsvektoren danner en vinkel på 51° med vandret.



- a) Argumenter for, hvorfor punktet P har koordinatsættet $(r \cdot \cos(\theta), r \cdot \sin(\theta))$.
 b) Brug a) til at bestemme boldens fart v_x i x -aksens retning og boldens fart v_y i y -aksens retning, altså i henholdsvis vandret og lodret retning.

Opgave 13.1 (Omregning mellem gradtal og radianer)

I denne opgave skal du omregne vinkler angivet i gradtal til radianer og vice versa, altså udfylde de tomme felter i tabellen. Husk, at når du går fra gradtal til radianer, skal du gange med $\pi/180$, mens du skal gange med den omvendte brøk, når du går den anden vej:

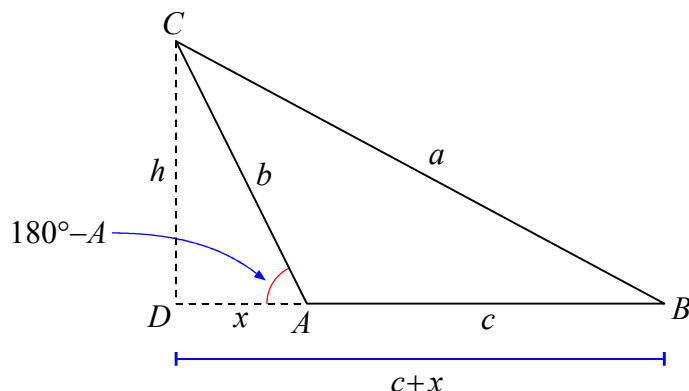


Gradtal	Radianer
360°	2π
90°	
	π
	π/3
45°	
	1,5π
67°	
	2,87

Opgave 14.1 (Bevis for cosinusrelation i stump tilfælde)

I beviset for cosinusrelationerne i sætning 35 blev det overladt til læseren at bevise sætningen, når en vinkel er stump. Det er så denne opgave. Vi antager, at vinkel A er stump. Vis, at da gælder stadig $a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(A)$.

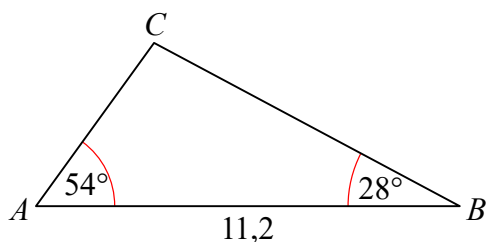
Hjælp: Antag først de størrelser sat på trekanten, som fremgår af figuren nedenfor. Se først i den retvinklede trekant ACD og vis, at $x = -b \cdot \cos(A)$, idet du benytter (6) i sætning 31. Benyt derefter strategien fra det spidse tilfælde: Brug Pythagoras' sætning på både $\triangle ACD$ og $\triangle BCD$. Udtryk for h^2 findes fra hver af de to ligninger. Derefter kan de to udtryk for h^2 sættes lig med hinanden, etc.



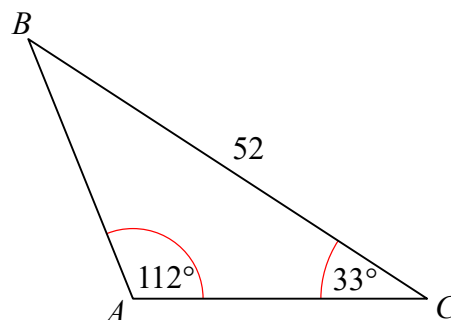
Opgave 14.2 (Sinusrelationen)

- I afsnit 8 så vi på forskellige trekanttilfælde: Hvilke trekanttilfælde er der tale om for hver af de to trekanter på figuren nedenfor. Er de entydigt bestemte op til kongruens?
- Brug vinkelsummen i en trekant til at beregne vinklen C i trekant 1 og benyt derefter sinusrelationen til at bestemme de to manglende sider i trekanten.
- Udregn de manglende sider og vinkler i trekant 2 ved at bruge sinusrelationen og vinkelsummen i en trekant.

Trekant 1



Trekant 2

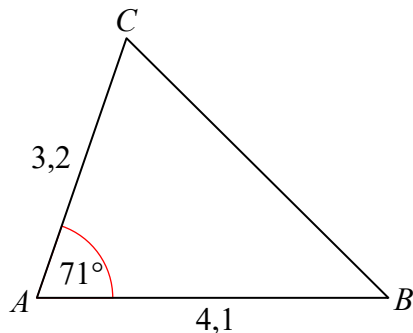
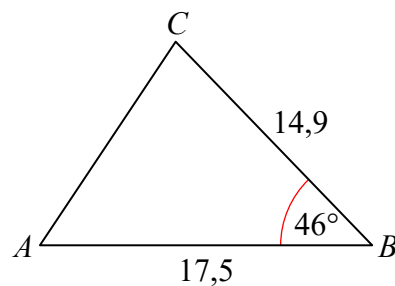


Opgave 14.3 (Sinusrelationen + areal)

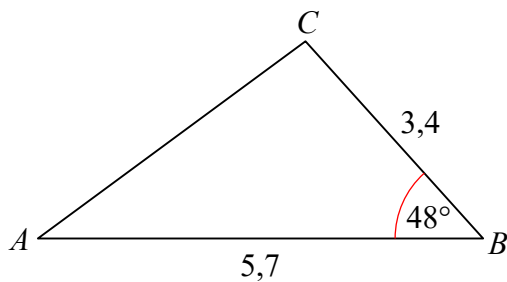
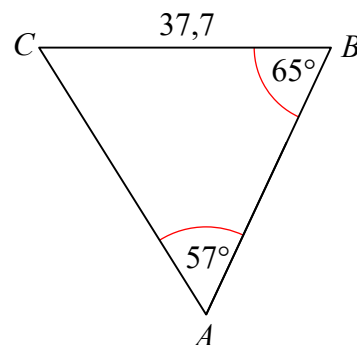
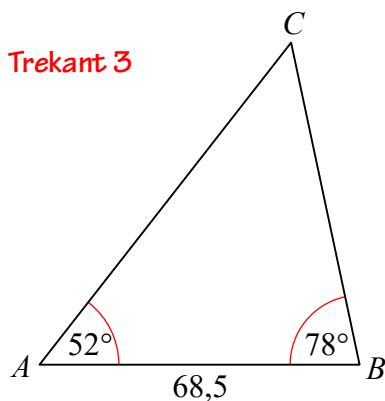
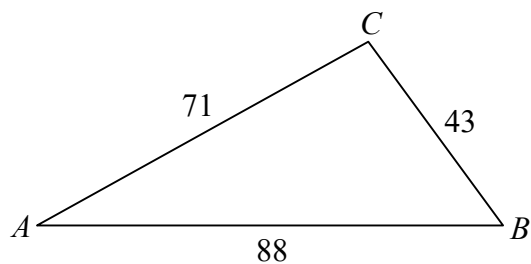
Givet en trekant ABC med følgende oplysninger: $B = 52^\circ$, $C = 61^\circ$ og $c = 214$. Brug vinkelsummen i en trekant samt sinusrelationen til at bestemme de resterende sider og vinkler i trekanten. Bestem desuden arealet af trekanten.

Opgave 14.4 (Cosinusrelationen)

- a) I afsnit 8 så vi på forskellige trekanttilfælde: Hvilke trekanttilfælde er der tale om for hver af de to trekanter på figuren nedenfor. Er de entydigt bestemte op til kongruens?
- b) Brug cosinusrelationen til at beregne siden a i trekant 1 nedenfor. Benyt derefter cosinusrelationen til at bestemme vinkel B . Vinkelsummen i en trekant kan endelig bruges til at bestemme vinklen C .
- c) Udregn de manglende sider og vinkler i trekant 2 ved at bruge cosinusrelationen og vinkelsummen i en trekant.

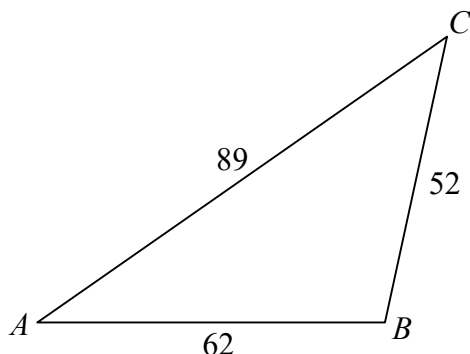
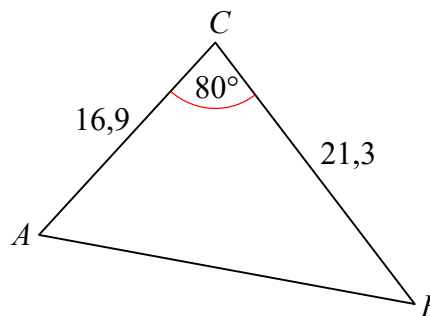
Trekant 1**Trekant 2****Opgave 14.5 (Blandede opgaver)**

Benyt sinusrelationen og/eller cosinusrelationen samt vinkelsummen i en trekant til at bestemme de manglende sider og vinkler i hver af trekanterne nedenfor.

Trekant 1**Trekant 2****Trekant 3****Trekant 4**

Opgave 14.6 (Cosinusrelationen)

Benyt cosinusrelationen og vinkelsummen i en trekant til at bestemme de ukendte sider og vinkler i hver af trekanterne nedenfor.

Trekant 1**Trekant 2****Opgave 14.7**

I hver af underspørgsmålene nedenfor er givet tre oplysninger i en trekant ABC . Udregn de øvrige sider og vinkler i hver af trekanterne.

- $A = 22^\circ$, $b = 38$ og $c = 14$.
- $A = 61^\circ$, $B = 38^\circ$ og $a = 205$.
- $a = 23,7$; $b = 16,8$ og $c = 20,2$.
- $B = 61^\circ$, $C = 42^\circ$ og $a = 6,7$.

Opgave 14.8* (Tilfælde 5)

Givet en trekant ABC med følgende oplysninger: $A = 39^\circ$, $a = 57$ og $c = 76$.

- Argumenter for, hvor vi er i trekanttilfælde 5, jf. afsnit 8. Konstruer trekanten med passer, lineal og vinkelmåler (eller GeoGebra), og konstater, at der ikke er nok oplysninger til at bestemme trekanten entydigt op til kongruens.

Nu gives en ekstra oplysning: Vinkel C er stump.

- Udregn derefter de manglende sider og vinkler i trekant ABC .

Nu ændres oplysningerne i trekant ABC : Vinkel A og a er som ovenfor, men $c = 80$, og vi ved ikke længere, om C er stump eller spids.

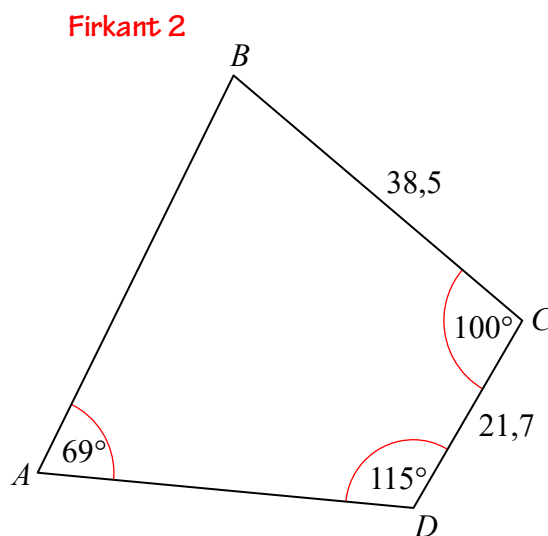
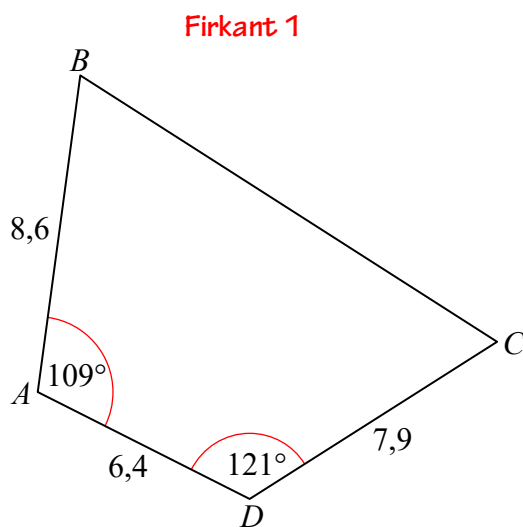
- Vis, at nu er der kun én løsning, selv om den ekstra oplysning om stump vinkel ikke er der længere. *Hjælp*: Se på vinkelsummen!
- Bestem derefter de ukendte sider og vinkler i trekanten.

Opgave 14.9 (Arealer)

Bestem arealerne af trekanterne 1 og 2 fra opgave 14.2.

Opgave 14.10 (Firkanter)

Bestem de ukendte sider og vinkler i nedenstående to firkanter. Se eksempel 42 for inspiration. Bemærk, at du i firkant 2 kan udnytte vinkelsummen i en firkant, som er 360° .



X-opgaver

Denne sektion indeholder ekstra opgaver, som enten kan være blandede opgaver eller opgaver med en konkret interessant anvendelse eller pointe.

Opgave X1 (Herons formel)

Der findes en interessant generel formel til bestemmelse af en trekants areal:

Herons formel

Givet en trekant med siderne a , b og c . Da gælder følgende formel for trekantens areal:

$$(X1) \quad T = \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)}$$

hvor s er den halve omkreds: $s = \frac{1}{2} \cdot (a+b+c)$.

Givet en trekant med følgende oplysninger: $A = 71^\circ$, $B = 44^\circ$ og $c = 29,5$.

- Bestem de ukendte sider og vinkler i trekanten ved hjælp af sinusrelationerne og vinkelsummen i en trekant.
- Bestem trekantens areal ved hjælp af sætning 34.
- Udregn den halve omkreds s af trekanten, og benyt derefter Herons formel til at bestemme trekantens areal. Får du det samme som i b)?

Opgave X2 (Skalering af trekanter bevarer vinkler)

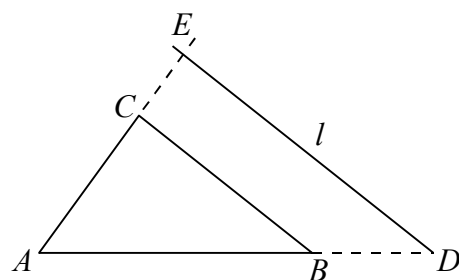
Den omvendte sætning til sætning 11 lyder:

Sætning

Hvis forholdet mellem siderne i to trekanter er konstant, dvs. hvis den ene trekant er en skalering af den anden, så er de to trekanter ensvinklede.

- a) Bevis denne sætning.

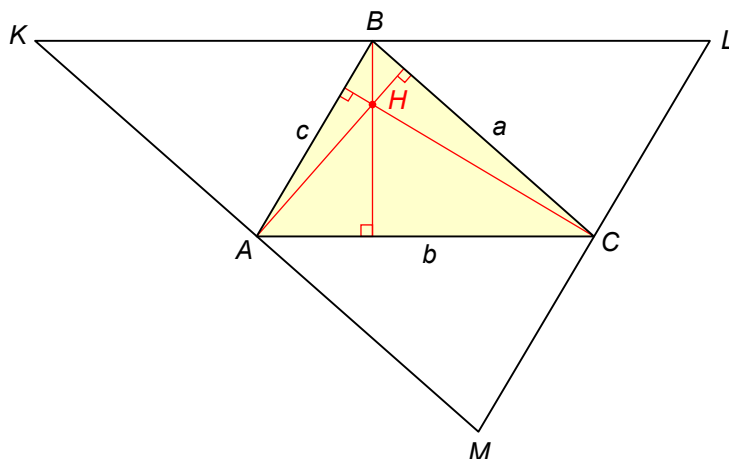
Hjælp: Givet trekant ABC og en anden trekant $A_1B_1C_1$, som er en skalering af trekant ABC med skaleringsfaktoren k . Start med at skalere siden AB med k , så man får en nye side AD . Tegn en linje l gennem D parallel med BC . Forlæng AC til skæring med linjen l i et punkt, vi kalder E . Argumenter for, at $\triangle ABC$ og $\triangle ADE$ er ensvinklede. Brug derefter sætning 11 på de to trekanter. Argumenter for, at de to trekanter $A_1B_1C_1$ og ADE er kongruente.



Opgave X3 (Højderne skærer hinanden i samme punkt)

Vi mangler at bevise sætning 1 om at højderne i en trekant skærer hinanden i det samme punkt. Læseren skal her med hjælp ledes frem til et elegant bevis: Start med trekant ABC og tegn igennem hvert af hjørnerne A , B og C en linje, som er parallel med den modstående side. Det danner en ny større trekant KLM .

- a) Vis at hjørnerne i den oprindelige trekant ABC er midtpunkterne på siderne i den nye trekant. *Hjælp:* Tænk på parallelogrammer, ensvinklede trekanter og kongruens.
- b) Argumenter for, at højderne i trekant ABC (tegnet med rødt) skærer i samme punkt. *Hjælp:* Hvad er disse højder set i forhold til den store trekant KLM ? Udnyt da en anden af sætningerne i afsnit 2.

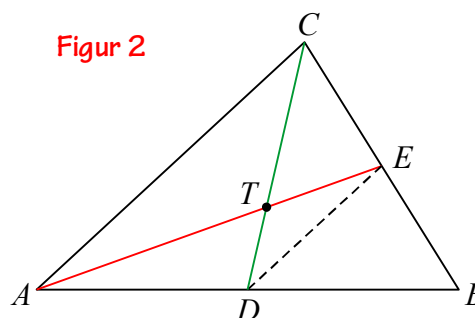
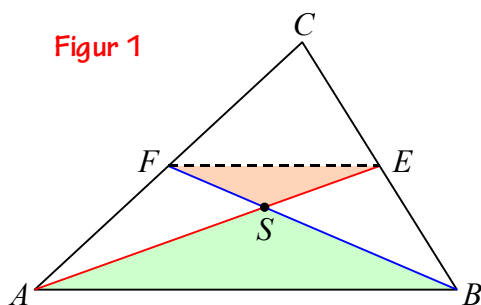


Opgave X4 (Medianerne skærer hinanden i samme punkt)

Vi mangler at bevise sætning 2 om medianernes skæringspunkt i en trekant:

Medianerne i en trekant går igennem det samme punkt M , og dette punkt deler hver af medianerne i forholdet 2:1 regnet fra vinkelspidsen.

Læseren skal her med hjælp ledes frem til et bevis. I beviset er sidste udsagn om forholdet, som medianerne skærer hinanden i, vigtig. På figur 1 er medianerne fra hjørnerne A og B indtegnet i trekanten.



- a) Argumenter for, at FE er parallel med AB og at $|FE| = \frac{1}{2} \cdot |AB|$.

Hjælp: Vis, at hvis man skalerer den store trekant ABC med $\frac{1}{2}$, så får man en trekant, som er kongruent med trekant CFE . Tænk også på sætningen i opgave X2.

- b) Vis at trekant ABS og trekant ESF er ensvinklede.

- c) Brug a) og b) til at vise, at $|AS| = 2 \cdot |SE|$.

Nu udskiftes medianen fra B med den fra C . Situationen er vist på figur 2. Her fås selvfølgelig analoge konklusioner, blandt andet at $|AT| = 2 \cdot |TE|$.

- d) Argumenter for, at punkterne S og T er sammenfaldende, hvilket beviser sætningen.

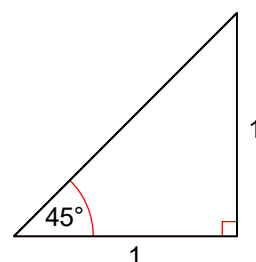
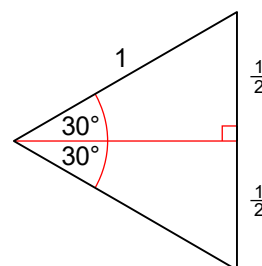
Opgave X5

Vis, at der gælder følgende eksakte værdier for de trigonometriske funktioner til 30° og 45° :

$$\cos(30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin(30^\circ) = \frac{1}{2}, \quad \tan(30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\cos(45^\circ) = \sin(45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \tan(45^\circ) = 1$$

Hjælp: Man kan udnytte, at 30° er den halve vinkel i en ligesidet trekant med sidelængde 1. På samme måde er 45° vinklen i en ligebeinet retvinklet trekant. Benyt definition 23 og brug desuden Pythagoras' sætning.



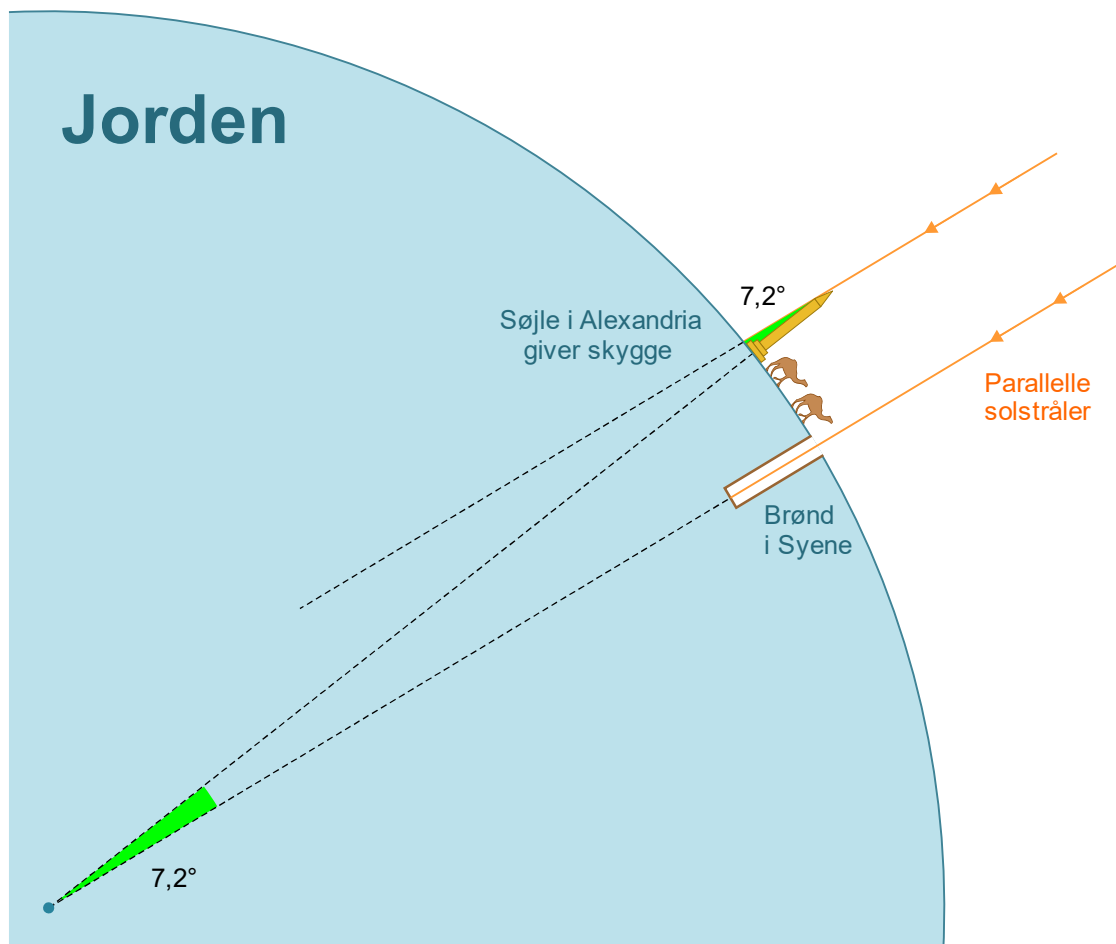
Opgave X6 (Erathostenes)

Grækeren *Erathostenes af Cyrene* (ca. 276 f.Kr. – ca. 194 f.Kr.) var en lærd mand, hvis interessefelt spændte vidt. Således kan man kalde ham matematiker, geograf, poet, astronom og musikteoretiker. Efter at have studeret i Alexandria og Athen, slog han sig ned i Alexandria omkring 255 f.Kr. og blev leder af det store, berømte bibliotek der. En af de ting, han udrettede, var at bestemme Jordens omkreds med overraskende stor præcision. Ved



sommersolhverv stod Solen lodret over *Syene* (nu *Aswan*), hvilket fik Solen til at stå direkte ned i en brønd. Erathostenes bemærkede, at på samme dato og tid i Alexandria stod solstrålerne ned med en vinkel på $7,2^\circ$ i forhold til lodret. Afstanden mellem de to byer er ca. 800 km, regnet i moderne mål. Han var også klar over, at strålerne fra Solen kan betragtes som stort set parallelle på grund af Solens store afstand fra Jorden.

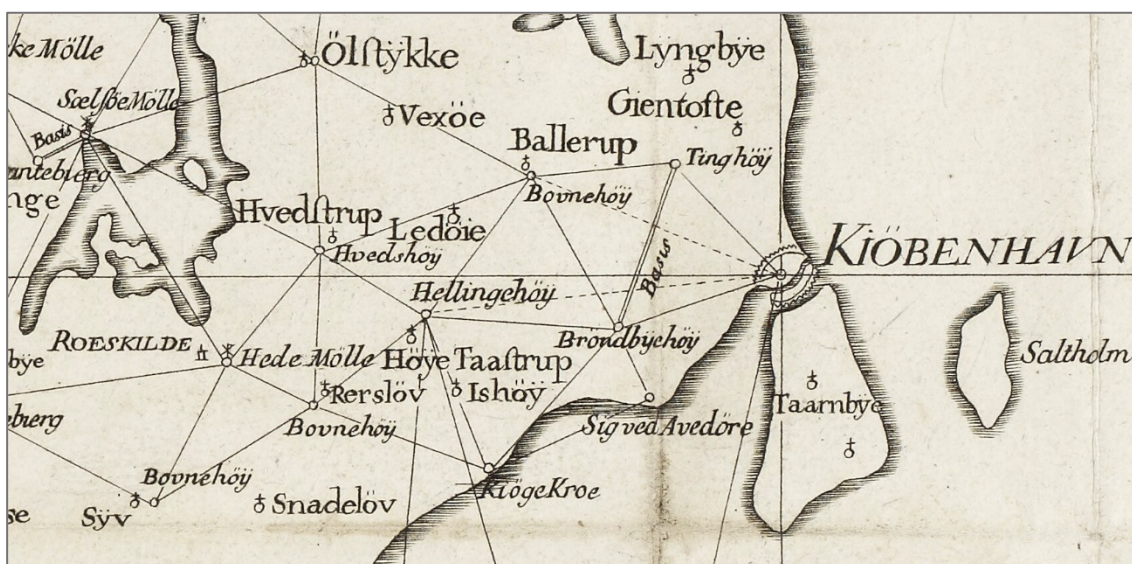
- a) Brug de grundlæggende regler fra afsnit 5 til at redegøre for, at vinklen på $7,2^\circ$ også findes inde ved Jordens centrum, som vist på figuren. Benyt ellers oplysningerne til at bestemme en værdi for Jordens omkreds.



Opgave X7 (Landmåling)

Det Kongelige Danske Videnskabernes Selskab, som var blevet stiftet i 1742, foranstaltede i 1762 påbegyndelsen af en opmåling af Danmark. Arbejdet, hvor en hovedkraft var Thomas Bugge (1740-1815), afsluttedes først i 1820, men så havde man også et Danmarkskort, som var langt mere præcist end de hidtidige kort. Processen er glimrende beskrevet i det lille hæfte [11]. Metoden var at udføre en *topografisk opmåling* samt en *triangulering*. Den topografiske opmåling, som involverer et *målebord*, betød at man kunne lave kort over små områder, men for at få det hele til at passe sammen med tilstrækkelig stor nøjagtighed, havde man brug for et slags skelet, hvorpå de små kort kan anbringes. Det er her trianguleringen kommer ind i billedet. Man kan læse nærmere herom i [11] og i [12]. I sidstnævnte er endda anvist en eksperimentel måde, hvorpå man kan udføre sin egen lille triangulering med simple værktøjer. Nærværende opgave vedrører imidlertid kun beregninger i nogle af de trekanter, som Thomas Bugge havde målt vinkler i. Opgaveløseren skal blandt andet anvende sinusrelationerne.

Nedenfor ses en triangulering af et område af Sjælland nær København. Der er tale om et udsnit af det indstikskort, som findes i [13]. Det fulde kort er vist to sider længere fremme.



Udgangspunkt for trianguleringen er *Rundetårn* i København. Det er hjørnet C i den første trekant ABC. De øvrige hjørner er *Tinghøj* (B) og *Brøndbyhøj* (A). På næste side findes en tabel med de vinkler, som blev målt i de første fem trekanter ved hjælp af "Det Geografiske Instrument". Desuden er angivet længden af siden AB (dobbelt optrukket). Den er i målt i alen ved hjælp af målestænger. Med tre oplyste vinkler og en side i en trekant var det nok til at beregne de øvrige sider BC og AC i trekant 1. I de øvrige trekanter blev vinklerne også målt. Herefter kunne man trevle situationen op ved at beregne de ukendte sider i trekanterne 2, 3, 4 og 5 i nævnte rækkefølge. Resultaterne fremgår af tabellen på næste side.

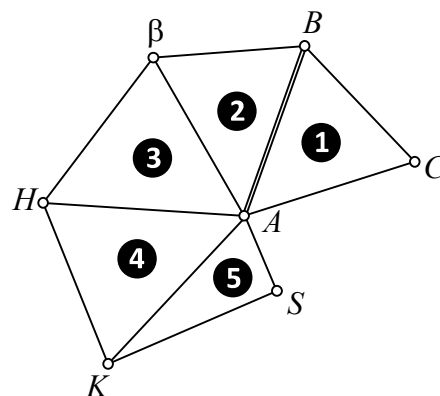
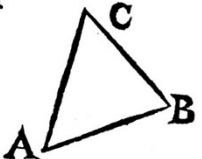
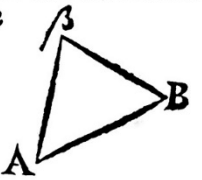
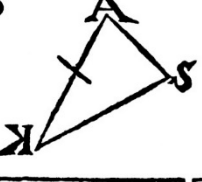


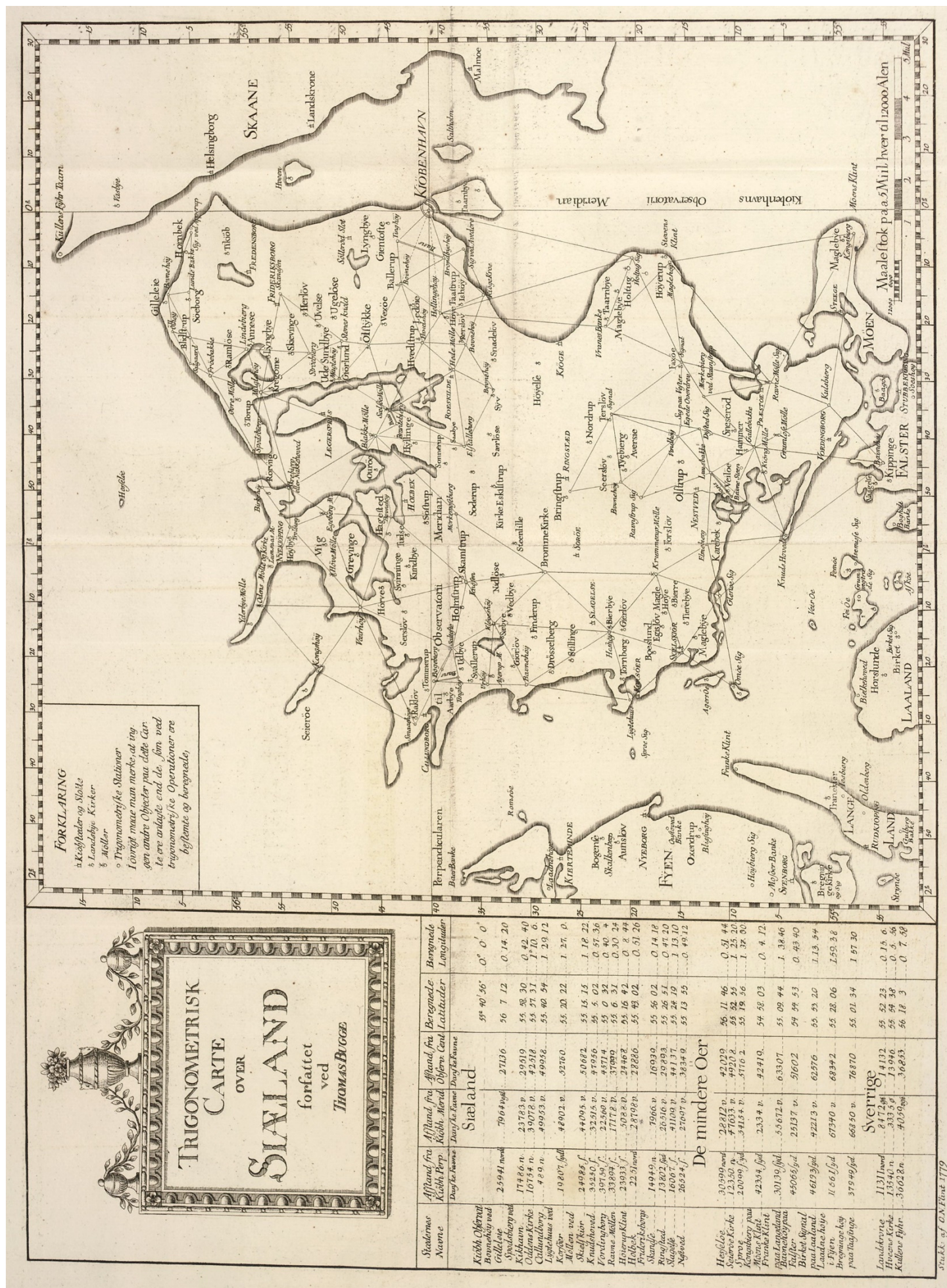
Tabelle over de trigonometriske Triangler igiennem Siælland.

Orden og Plan af Trianglerne.	Stedernes og Stationernes Navne.	Observerte Vinkler.	Korrektion.	Beregnete Distancer i Danske Alen.
1 	A Brøndbyehøi. B Tinghøi. C Centrum Observatorii i Kjøbenhavn.	A : $52^{\circ}.21'.00''$ B : $64.04.00$ C : $63.35.07$	— 2" — 2" — 3"	BC : 12832 + AC : 14575 + AB : 14515 Den opmaalte Basis.
2 	A Brøndbyehøi. B Tinghøi. β Bovenhøi ved Valløse.	A : $51.04.49$ B : $63.48.28$ β : $65.06.20$	+ 6" + 8" + 9"	Bβ : 12450 — Aβ : $14358\frac{1}{2}$ + AB : 14515 Den opmaalte Basis.
3 	A Brøndbyehøi. β Bovenhøi ved Valløse. H Hellingehøi ved Høie-Taastrup.	A : $59.17.17$ β : $66.13.50$ H : $54.28.35$	+ 6" + 7" + 5"	Hβ : 15168 AH : 16146 + Aβ : $14358\frac{1}{2}$ + ved Δ 2.
4 	A Brøndbyehøi. H Hellingehøi ved Høie-Taastrup. K Signal ved Ringe Kro.	A : $51.17.19$ H : $66.43.16$ K : $61.59.14$	+ 2" + 5" + 4"	HK : $14270\frac{1}{4}$ + AK : 16800 + AH : 16146 +
5 	A Brøndbyehøi. S Signal ved Næstved-Strand. K Signal ved Ringe Kro.	A : $64.51.37$ S : $91.03.47$ K : $24.04.39$	— 1" — 2" — 0"	KS : 15211 + AK : 16800 + AS : 6855 +

Bemærk, at man regnede vinkler i grader, bueminutter og buesekunder! Her er 1 bueminut, skrevet 1', det samme som $1/60^{\circ}$ og et buesekund, skrevet 1'', det samme som $(1/60)'$ eller $1/3600^{\circ}$. Vinklen $23^{\circ}46'12''$ kan for eksempel omskrives til følgende vinkel i grader med kommat: $(23 + \frac{46}{60} + \frac{12}{3600})^{\circ} = 23,770^{\circ}$. På grund af måleusikkerhed, gav de tre vinkler ikke altid 180° tilsammen, som de skal. Derfor udjævnede Thomas Bugge fejlene ved at indregne korrektionerne i 4. kolonne.

- Benyt sinusrelationerne til at eftervise de værdier for siderne BC og AC , som Thomas Bugge angiver i højre kolonne for trekant 1. NB! Omregn først vinklerne til grader med kommat og husk at indregne korrektionerne, som står i 4. kolonne! Siden AB er målt til 14515 alen og er dermed kendt.
- Udregn siderne $B\beta$ og $A\beta$ i trekant 2.
- Udregn siderne i de øvrige trekanter 3, 4 og 5. Her skal du udnytte en side fra de forrige beregninger.
- Undersøg mere om Thomas Bugge på Internettet.

Hvis du har ekstra energi og tid, er det en mulighed at give sig i kast med eksperimenter med trianguleringer, som beskrevet i [12].



Trigonometrisk kort over Sjælland fra bogen: Thomas Bugge. *Beskrivelse over den Opmaalings Maade som er brugt ved de danske geographiske Karter; Med tilføjet trigonometriske Karte over Siælland og de der henhørende Triangler, beregnede Longituder og Latituder; samt astronomiske Observationer.* Gyldendals forlag, Kiøbenhavn 1779. Kortet er fra Det Kongelige Bibliotek.

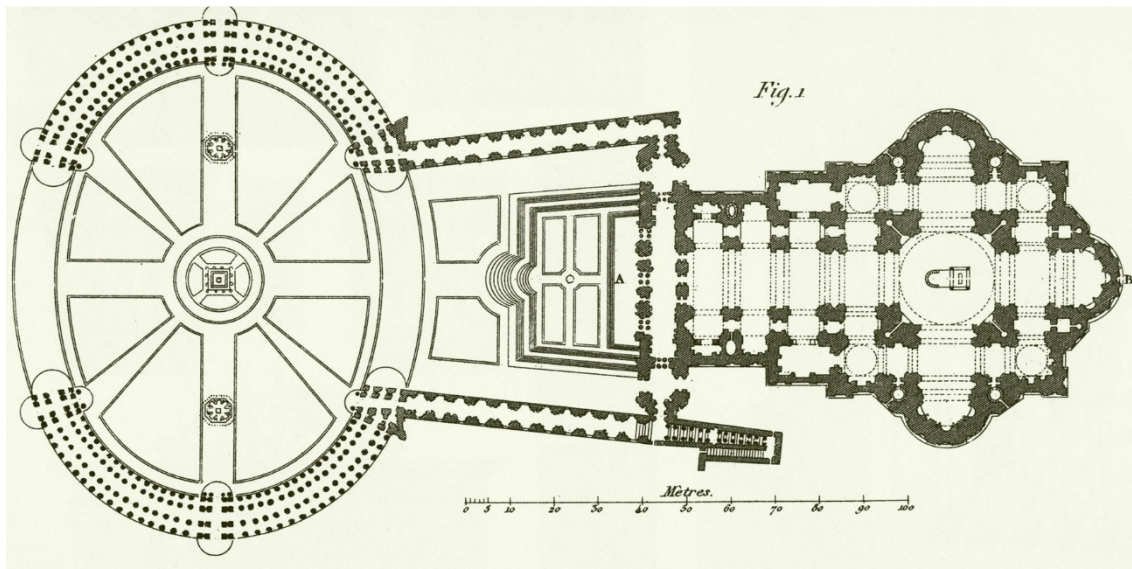
Opgave X8 (Peterspladsen – en oval)

Peterspladsen foran Peterskirken i Rom er først og fremmest udformet af kunstneren Gian Lorenzo Bernini (1598–1680). Pladsen med dens kolonnader er et mesterværk indenfor den barokke arkitektur. Den runde del af pladsen har form som en *polycentrisk oval* og ikke en ellipse, som man ellers ofte ser angivet. Kurven er imidlertid tæt på at være en ellipse, men er det altså principielt ikke. Med en polycentrisk oval menes en lukket konveks kurve, som er sammensat af cirkelbuer med forskellige centre og forskellige radier. Problematikken er beskrevet i [15] og [10].



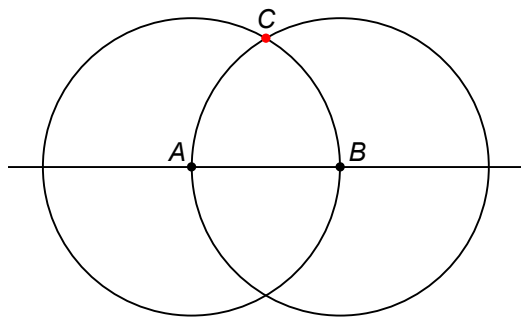
På siderne af pladsen ses *kolonnader*, som er søjlerækker med en søjlegang og en overliggende arkitrav. På toppen er anbragt 140 statuer af helgener. De buende dele af kolonnaderne skal give indtrykket af ”arme”, som byder besøgende velkommen. Omkring den ovale del af pladsen er der i alt fire rækker med søjler, som det fremgår af den antikke illustration på næste side. Når man står på Peterspladsen, vil man normalt kunne se en mur af søjler, men står man lige præcis i en af de to ”brændpunkter” på pladsen, så vil man kunne se gennem søjlerne, fordi den inderste række af søjler da vil dække over de tre rækker med søjler, som ligger bagved. Dette fænomen er i sig selv en visuel pointe. Vi skal snart se, hvorfor dette er tilfældet. I midten af pladsen står Vatican-obelisken, som i 1586 blev bragt til Rom fra Ægypten.



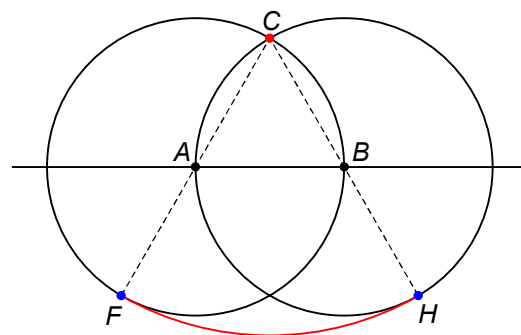


I det følgende skal formen af pladsens ovale del af pladsen konstrueres i GeoGebra, som antydnet på figuren herunder. Konstruktionsbeskrivelsen følger under figuren.

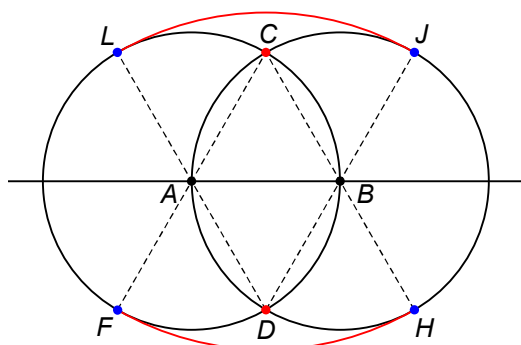
Trin 1



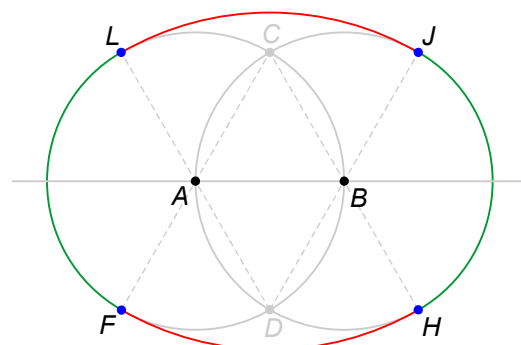
Trin 2



Trin 3



Trin 4



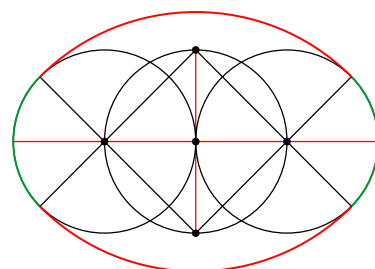
a) Udfør konstruktionen nedenfor.

GeoGebra

1. Fjern koordinatsystemet i GeoGebra (se evt. hvordan i opgave 8.1 punkt 1)
2. Vælg værktøjet *Linjestykke med given længde*. Klik på tegnefladen og skriv 5 som en mulig længde. Dermed er linjestykket AB tegnet.
3. Vælg værktøjet *Cirkel ud fra centrum og punkt* og klik først på A og derefter B. Derved fås den venstre cirkel med centrum i A og gående igennem B, som vist i trin 1.
4. Tegn på lignende måde den anden cirkel med centrum i B, gående igennem A.

5. Vælg *Skæringsværktøj* og klik på henholdsvis den ene cirkel og den anden cirkel. Herved vil de to skæringspunkter mellem cirklerne blive tegnet. Vi vil først bruge det øverste skæringspunkt *C*.
 6. Vi er nu kommet til trin 2 på figuren. Vælg værktøjet *Halvlinje* og tegn en halvlinje fra *C* gennem *A* ved først at klikke på *C* og derefter *A*.
 7. Tegn på tilsvarende måde en halvlinje fra *C* gennem *B*.
 8. Benyt *Skæringsværktøjet* til at bestemme skæringerne mellem halvlinjen fra punkt 6 og den venstre cirkel. Det giver skæringspunktet *F*.
 9. Benyt *Skæringsværktøjet* til at bestemme skæringerne mellem halvlinjen fra punkt 7 og den højre cirkel. Det giver skæringspunktet *H*.
 10. Vælg værktøjet *Cirkelbue* og klik på punkterne *C*, *F* og *H* i nævnte rækkefølge. Det skaber en cirkelbue fra *F* til *H*. Du kan farve den rød ved at højreklikke på buen, vælge *Egenskaber...* og under fanen *Farve* klikke på farven rød. Vi er nu færdig med trin 2 på figuren.
 11. I dette punkt skal du gentage processen fra punkt 6 til 10 for at tegne den øverste røde cirkelbue: Tegn først en halvlinje fra *D* gennem *A* og derefter en fra *D* gennem *B*. Halvlinjernes skæringspunkter med først den højre cirkel og derefter den venstre cirkel fås ved hjælp af *Skæringsværktøj*. Det giver punkterne *J* og *L*. Endelig tegnes en cirkelbue fra *J* til *L* ved at vælge værktøjet *Cirkelbue* og derefter klikke på punkterne *D*, *J* og *L* i nævnte rækkefølge. Slut af med at farve cirkelbuen rød.
 12. Klik på den venstre cirkel, hvorved man kan se på pågældende element fremhævet i Algebra vinduet. Klik på den lille prik til venstre for elementet for at skjule cirklen. Gentag processen med den højre cirkel.
 13. Tegn nu med værktøjet *Cirkelbue* en cirkelbue fra *H* til *J* ved at klikke på punkterne *B*, *H* og *J* i nævnte rækkefølge. Farv buen grøn.
 14. Tegn med værktøjet *Cirkelbue* en cirkelbue fra *L* til *F* ved at klikke på punkterne *A*, *L* og *F* i nævnte rækkefølge. Farv buen grøn.
 15. Nu skulle den polycentriske oval være tegnet. Skjul de irrelevante linjer og punkter, dog undtagen punkterne *A* og *B*.
- b) Du skal nu verificere, hvor godt formen konstrueret i GeoGebra passer med den virkelige oval på Peterspladsen. Åbn hertil *Google Maps* og skriv ”Peterskirken” i søgefeltet. Sørg for, at du får et satellitfoto. Drej nu kortet rundt, så den ovale plads har sin længde i vandret retning og bredde i højderetningen. Bemærk, at for at du kan dreje kortet, kan det være nødvendigt at klikke på kortikonen, ikonen *Mere* og slå *Globusvisning* til. Situationen skal ses lodret oppefra. Sørg for, at den fremstår rimelig stor. Tag til sidst et skærm billede af ovalen i JPG eller PNG-format.
- c) Tilbage i GeoGebra-filen vælges menuen *Rediger > Indsæt billede fra > Fil*, hvorved kortet fra b) kan indsættes. Bemærk, at der er to håndtag på billedet, som befinder sig bagved den tegnede oval. Når du først har markeret billedet, kan det via håndtagene skaleres ligeligt, dvs. så forholdene i *x* og *y*-retningen bevares. Ret til, så ovalen kommer til at ligge så godt som muligt *indenfor* kolonnaderne. Kan du godtage, at ovalen passer?
- d) Argumenter for, at de to ovenfor omtalte punkter *A* og *B* er de punkter, hvorfra den inderste række af søjler vil se ud til at dække for de øvrige tre rækker af søjler.

Den italienske arkitekt *Sebastiano Serlio* (1475-1554) studerede andre versioner af ovalen ovenfor, blandt andet den, som er illustreret på figuren til højre. Du kan eventuelt studere Serlios bidrag til arkitekturen nærmere.

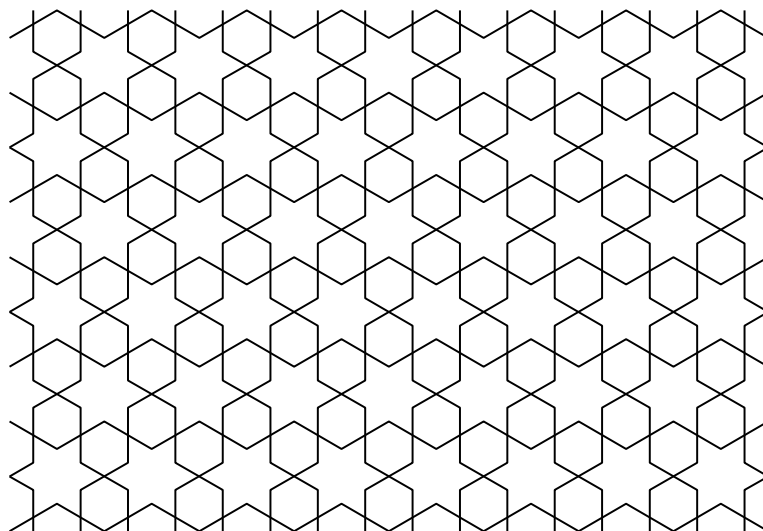


Opgave X9 (Flisemønstre i islamisk kunst)

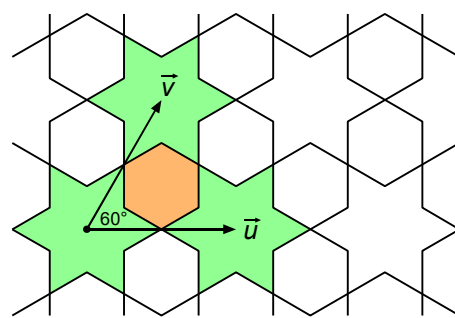
Islamisk kunst er fyldt med smukke geometriske mønstre. På billedet nedenfor ses for eksempel detaljer fra Hassan II Moskeen i Casablanca, Marokko. Udviklingen med at bruge disse geometriske mønstre begyndte for alvor i det 8. århundrede. Det var også fra denne periode, at arabiske matematikere ydede betydelige bidrag i geometri og algebra. Gentagelserne og formerne i mønstrene, som typisk indeholder polygoner, stjerneformede polygoner og cirkler, kan symbolisere uendelighed, kontinuitet og harmoni.



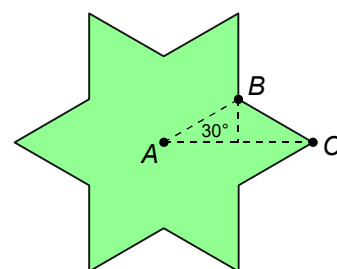
I denne opgave skal vi betragte et geometrisk mønster, som ikke er alt for kompliceret, men som alligevel er interessant. Faktisk omtales det også visse steder som Marokkansk. Mønsteret indeholder to former, nemlig en stjernepolygon med 6 spidser (*hexagram*) og en regulær sekskant (*hexagon*).



At konstruere mønsteret manuelt i GeoGebra ved at trække linjestykker ud er ikke en farbar vej. Det vil tage evigheder, og man ville miste overblikket. I stedet skal vi gøre brug af GeoGebra's indbyggede kommandoer. Først vil vi imidlertid analysere mønsteret matematisk med henblik på at angribe opgaven systematisk. Figuren til højre viser, at det egentligt er stjernen, der er parallelforskyd



retninger: vandret og i en vinkel på 60° . Hexagonerne vil blot være mellemrum mellem stjernerne. Dermed skal vi altså blot koncentrere os om at tegne stjernerne. Første opgave er at tegne en enkelt stjerne. Vi lader punktet A have koordinaterne $(0,0)$. Linjestykket AB vil hælde med 30° i forhold til vandret. Hvis vi lader linjestykket have længden 2, så bliver koordinaterne for B lig med $(2 \cdot \cos(30^\circ), 2 \cdot \sin(30^\circ))$, jf. opgave 12.5 a). Koordinaterne for C må da klart være $(4 \cdot \cos(30^\circ), 0)$. Faktisk vil vores konstruktion være så robust, så hvis man senere ændrer koordinaterne for A , B og C , så vil resten af mønsteret indrette sig derefter!



Hvis vi nu roterer punktet C med 60° , 120° , 180° , 240° , 300° og 360° omkring punktet A , så får vi alle de ydre spidser på stjernen. Vi kommer til at lave en liste med dem med navnet Y , så $Y(1)$, $Y(2)$, $Y(3)$, $Y(4)$, $Y(5)$ og $Y(6)$ kommer til at indeholde koordinaterne for disse spidser. På lignende måde vil vi rotere B omkring A med vinklerne 60° , 120° , 180° , 240° , 300° og 360° for at få alle de indre kanter i stjernen. En liste med navnet I vil indeholde alle disse kanter koordinater: $I(1)$, $I(2)$, $I(3)$, $I(4)$, $I(5)$ og $I(6)$. Når vi har alle disse koordinater, kan vi forbinde dem via kommandoen *Polygon* og få vores prototype for en enkelt stjerne. Derefter er det tid for parallelforskydning. Her får vi brug for de to vektorer $\vec{u}$ og $\vec{v}$ vist på den øverste figur. Først ser vi, at $\vec{u} = 2 \cdot \overrightarrow{AC}$. Vektoren $\vec{v}$ fås ved at dreje vektoren $\vec{u}$ med 60° . Det er der en kommando til.

Først parallelforskydes prototypen af stjernen med vektorerne $\vec{u}$, $2\vec{u}$, $3\vec{u}$, $4\vec{u}$, ... for at få en vandret række af stjerner, som vi kalder "Stjernerække". De gentagne parallelforskydninger kan udføres smart og kompakt ved hjælp af kommandoerne *Parallelforskyd* og *Sekvens*. De kommandoer, vi får brug for, er listet i tabellen med både det danske og det engelske navn. Bemærk, at man inde i programmet kan ændre sprog via menuen *Indstillinger > Sprog >*. Denne "Stjernerække" kan efterfølgende parallelforskydes med vektorerne $\vec{v}$, $2\vec{v}$, $3\vec{v}$, ... så vi til slut har det færdige mønster. Nu til konstruktionsdetaljerne, hvor vi bruger de danske kommandonavne. Af hensyn til forståelsen vil læseren undervejs blive bedt om at udføre ting i mindre trin. Kommandoerne skal skrives i det såkaldte *inputfelt* og de udføres, når man trykker på **Enter**. Herefter vil de figurere i *Algebra vinduet*, hvorfra man kan ændre ting.

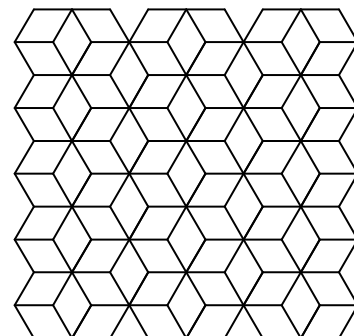
Dansk	Engelsk
Linjestykke	Segment
Polygon	Polygon
Drej	Rotate
Sekvens	Sequence
Vektor	Vector
Parallelforskyd	Translate

For eksempel kan man højreklikke på en kommando og vælge *Egenskaber* for at redigere i et nyt vindue. Hvis man begår fejl, kan man enten slette eller fortryde med **Ctrl+Z**.

GeoGebra

1. I inputlinjen skrives: $A=(0,0)$
2. I inputlinjen skrives: $B=(2*\cos(30^\circ), 2*\sin(30^\circ))$. Bemærk, at særlige tegn såsom et grad tegn ($^\circ$) fås i inputlinjen ved at klikke på ikonen visende et α ude i højre side.
3. I inputlinjen skrives: $C=(4*\cos(30^\circ), 0)$.
4. Vi får senere brug for de vektorer, der skal parallelforskydes efter. Derfor definerer vi dem nu. I inputlinjen skrives: $u=2*\text{Vektor}(A,C)$
5. Den anden vektor fås ved at dreje den første med 60° . I inputlinjen skrives: $v=\text{Drej}(u, 60^\circ)$
6. Vi skal nu skabe de ydre spidser på stjernen ved at rotere punktet C med vinklerne henholdsvis 60° , 120° , 180° , 240° , 300° og 360° omkring punktet A . Først skal læseren dog se, hvordan man gennemfører en enkelt rotation. Skriv i inputlinjen: $\text{Test}=\text{Drej}(C, 60^\circ, A)$
7. Du skulle nu gerne se et nyt punkt, som svarer til at dreje punktet C med 60° omkring A . Bemærk i øvrigt følgende: Vi skrev $\text{Test} =$ foran kommandoen. Det er blot et navn, som vi selv vælger. Det er hensigtsmæssigt, når vi senere skal arbejde videre med disse objekter. Dette var dog blot en prøve for at se kommandoen *Drej* i funktion. Slet *Test* i Algebra vinduet, så objektet er væk.
8. Nu skal vi udføre alle drejningerne omtalt i punkt 6 på én gang ved at anbringe en *Sekvens* kommando udenom kommandoen *Drej*. Skriv i inputlinjen: $Y=\text{Sekvens}(\text{Drej}(C, k*60^\circ, A), k, 1, 6)$
9. Nu skulle du gerne kunne se punktet C drejet rundt omkring A med vinklerne 60° , 120° , 180° , 240° , 300° og 360° . Bemærk, at når k gennemløber alle hele tal fra 1 til og med 6, vil $k*60^\circ$ gennemløbe de multipla af 60° , som vi ønsker. Listen af punkter har fået navnet Y . Skab herefter en liste I med alle de indre hjørner ved i inputlinjen at skrive: $I=\text{Sekvens}(\text{Drej}(B, k*60^\circ), k, 1, 6)$
10. Vi skal have alle de ydre og indre hjørner forbundet. Det sker via kommandoen *Polygon*. Skriv i inputlinjen: $\text{Stjerne}=\text{Polygon}(Y(1), I(1), Y(2), I(2), Y(3), I(3), Y(4), I(4), Y(5), I(5), Y(6), I(6), Y(1))$
11. Bemærk, at det er vigtigt, at man i afslutningen af polygon-kommandoen gentager startpunktet $Y(1)$, så ringen er sluttet! Du skulle nu gerne kunne se en stjerne. Vi er nu nået til at skulle parallelforskyde. Først skal læseren dog se, hvordan man gennemfører en enkelt parallelforskydning med vektoren u . I inputlinjen skrives: $\text{Test}=\text{Parallelforskyd}(\text{Stjerne}, u)$
12. Du skulle gerne se en enkelt ny stjerne skabt ved parallelforskydning i vandret retning. Vi ønskede dog at parallelforskyde med vektorerne u , $2u$, $3u$, ... Derfor skal vi have fat i kommandoen *Sekvens* igen. Vi bruger parameter k , som løber fra 1 til 10. Slet først objektet *Test* under punkt 11 og skriv i inputlinjen: $\text{Stjernerække}=\text{Sekvens}(\text{Parallelforskyd}(\text{Stjerne}, k*u), k, 1, 10)$
13. Du skal nu gerne kunne se en vandret række med 10 nye stjerner foruden den oprindelige. Rækken af stjerner har vi givet navnet "Stjernerække". Det eneste vi mangler nu, er at parallelforskyde "Stjernerække" med v , $2v$, $3v$, ... Det gør vi analogt til metoden fra punkt 12. Vi lader parameteren k løbe fra 1 til 10. Skriv i inputlinjen: $\text{Mønster}=\text{Sekvens}(\text{Parallelforskyd}(\text{Stjernerække}, k*v), k, 1, 10)$
14. Du skulle nu gerne kunne se det ønskede mønster. Du kan endda ændre farven på stjernerne ved at højreklikke på *Mønster* og vælge *Egenskaber*... Under fanen *Farve* kan farven ændres.

- a) Gennemfør en tegning af det islamiske mønster ved at følge beskrivelsen ovenfor.
- b) Har du mod på mere, kan du prøve dig frem med mønsteret til højre. Tegn først en "celle" og parallelforskyd derefter i to retninger i GeoGebra.
- c) Kig eventuelt på den fremragende video i [L4] om islamisk kunst og de geometriske metoder, man bruger for at lave mønstrene.

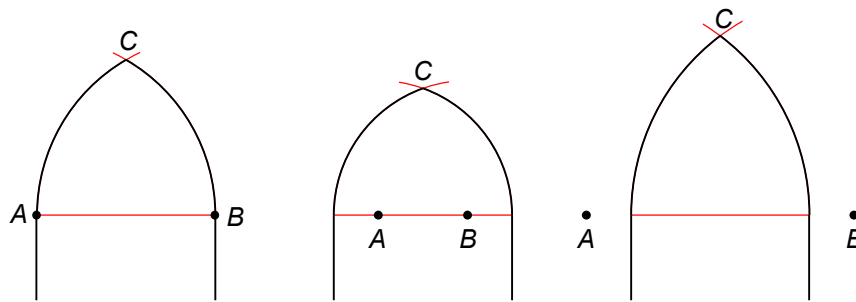


Opgave X10 (Geometrien i gotiske kirker)

Efter romertiden øgede den kristne kirke langsomt sin indflydelse. Det påvirkede også arkitekturen. En milepæl var den gotiske arkitektur, hvor man blandt andet fraveg de klassiske romerske buer. Statisk set var det en forbedring, at de gotiske kirker med deres spidse buer ikke behøvede så meget støtte fra siderne for at være stabile, som tilfældet var med de romerske bygninger. Vægten blev placeret anderledes, og kirkerne kunne bygges højere. Man ville have høje imponerende bygninger og ikke mindst have skabt mere lys i kirkerne. De udvendige såkaldte *stræbepiller* med *stræbebuer* ("flyvende støtteben") fremstod elegante, og man behøvede ikke så tykke mure. Det betød også mulighed for større vinduer. I loftet var der ofte *krydshvælvninger*. Enorme farvede glasmosaikvinduer med geometriske mønstre og religiøse motiver gav et godt lys i kirken og viste storhed udadtil. Den gotiske periode varede fra ca. år 1150-1550. Der figurerer selvfølgelig en masse geometri i de gotiske kirker. Cirklen repræsenterer evighed og perfektion og trekanten symboliserer treenigheden (Faderen, Sønnen og Helligånden). Disse former er integreret i det overordnede design for at formidle åndelige budskaber og forstærke den hellige atmosfære i kirken. Nedenfor den ikoniske gotiske katedral *Notre Dame* i Paris.

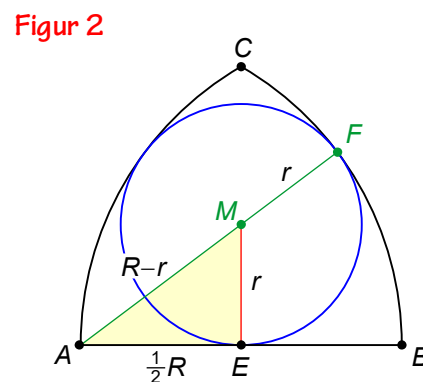
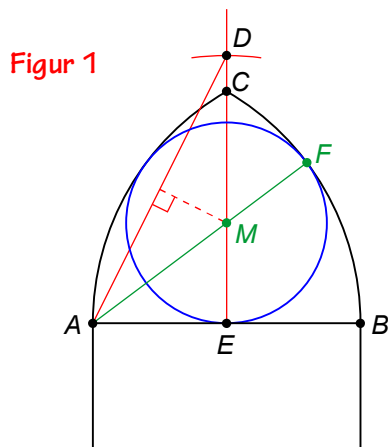


Den geometri, som vi skal se på i det følgende, er inspireret af [16]. Vi begynder med at omtale den *gotiske spidsbue*. På næste side vises tre versioner. Standardversionen, hvor buen AC fås ved at tegne en cirkelbue med radius $R = |AB|$, og centrum i B , og buen BC fås ved at tegne en cirkel med samme radius R , men nu med centrum i A . Disse to cirklers øverste skæringspunkt udgør toppunktet C . Denne konstruktion betyder, at den trekant, der fremkommer ved at forbinde punkterne A , B og C med rette linjestykker, er en *ligesidet* trekant. Den anden version af spidsbuen fås ved at lade de to centre for cirklerne, altså A og B , befinde sig det samme stykke inde imellem de lodrette sider. I den tredje version ligger centrene A og B det samme stykke udenfor de lodrette sider.



- a) Konstruer med passer og lineal eller GeoGebra en version af et vindue med en gotisk standardbue, som vist på den venstre figur.

Man ser i den gotiske arkitektur ofte elementer, hvor cirkler er indskrevet i de gotiske spidsbuer. I dette tilfælde skal vi indskrive en cirkel i en standard spidsbue. Buernes radius er $R = |AB|$, og radius for den indskrevne cirkel betegner vi med r . Figur 1 antyder konstruktionsmetoden, hvor vi fra start har givet standardspidsbuen og ønsker at konstruere den indskrevne cirkel.



Konstruktion

1. Tegn en midtnormal til linjestykket AB . Midtnormalens skæring med AB kaldes E .
2. Afsæt afstanden R op ad midtnormalen. Endepunktet betegnes D .
3. Forbind A og D med et linjestykke.
4. Tegn midtnormalen til linjestykket AD . Dens skæringspunkt med linjestykket ED kaldes M . Dette punkt er centrum for den indskrevne cirkel.
5. Tegn en cirkel med centrum i M og med en radius r , som skal være lig med længden af ME . Denne cirkel er den ønskede indskrevne cirkel.

- b) Udfør konstruktionen beskrevet ovenfor enten med passer og lineal eller ved hjælp af GeoGebra.
- c) (lidt svær) Argumenter for, at konstruktionen er korrekt, dvs. at cirklen virkelig tangerer linjestykket AB og hver af spidsbuerne. *Hjælp:* Man søger et punkt M på midtnormalen ED , som ligger lige langt fra linjestykket AB og buen BC (og dermed også buen AC på grund af symmetrien). Det er oplagt, at punktet eksisterer, hvilket man kan overbevise sig om ved at skubbe den mulige kandidat for M fra E op ad midtnor-

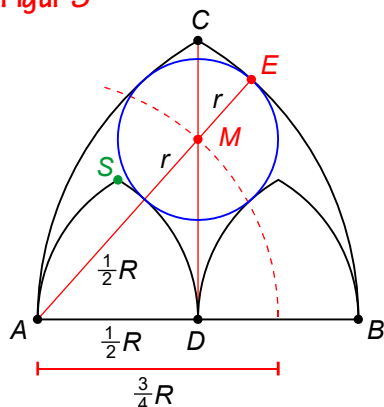
malen til AB . Der mangler blot at blive argumenteret for, at M ligger på midtnormalen til AD også. Hertil er det nok at vise at $|AM| = |MD|$ (jf. egenskaben omtalt i opgave 8.13). Udnyt, at $|AB| = |AF| = R$.

- d) Vis, at radius i den indskrevne cirkel er givet ved formlen : $r = \frac{3}{8}R$.

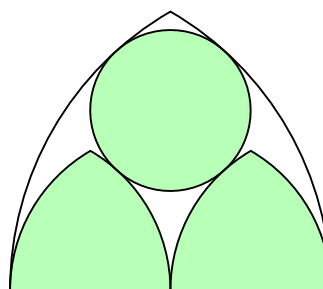
Hjælp: Benyt den på figur 2 markerede retvinklede trekant og brug Pythagoras' sætning på trekanten. Reducer og isoler herefter r .

De gotiske arkitekter indskrev undertiden også flere cirkler, men også mindre spidsbuer. Vi skal kigge på et tilfælde, hvor der i standardspidsbuen er indskrevet en cirkel samt to ens, men mindre spidsbuer.

Figur 3



Figur 4



Konstruktion

1. Tegn en midtnormal til linjestykket AB . Midtnormalens skæring med AB kaldes D .
2. Tegn to små standardspidsbuer på linjestykkerne AD og DB .
3. Tegn en cirkel med centrum i A og radius lig med $3/4R$ til skæring med midtnormalen i punktet M .
4. Tegn en linje gennem A og M til skæring med buen BC i punktet E .
5. Den indskrevne cirkel kan nu tegnes som den cirkel, der har centrum i M og som har radius lig med længden af linjestykket ME .

Bemærk, at da buerne DS og BC begge har centrum i A , må den indskrevne cirkel, som tangerer begge buer, nødvendigvis ligge på linjen gennem A og cirkelns centrum M . En tangent til en cirkel er nemlig altid vinkelret på radius. Ved at betragte længderne langs linjestykket AE får vi derfor: $\frac{1}{2}R + r + r = R \Leftrightarrow r = \frac{1}{4}R$. Dette godtgør konstruktionens rigtighed.

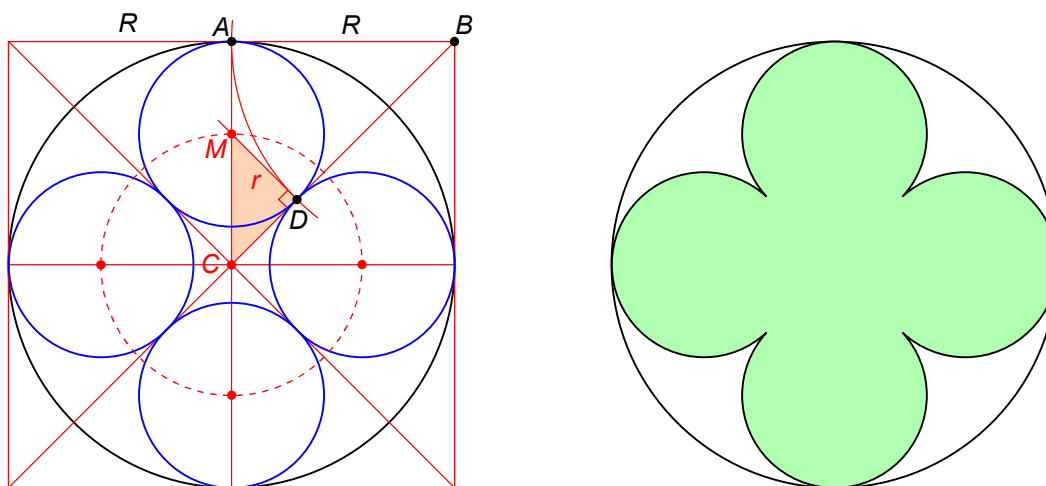
- e) Udfør konstruktionen beskrevet ovenfor enten med passer og lineal eller ved hjælp af GeoGebra.

De gotiske arkitekter yndede også at lave en vinduesrose eller rosette, som ofte var en stor cirkel med alverdens udsmykning og som filtrerer lyset ind i kirken og fylder rummet med farvet lys fra glasmosaikken. Flotte geometriske former, der for eksempel kunne indeholde elementer, hvor små cirkler er indskrevet i store cirkler. Det kunne være 3, 4 eller flere små cirkler indskrevet i en større cirkel eller i en anden form. Dekorationerne kunne også forekomme i loftet eller – som vist på fotoet på næste side – i en gotisk spids-

bue. I dette tilfælde er det et motiv fra katedralen i Magdeburg. Vi ser blandt andet et ”firkløver”. Et sådant firkløver, eller noget der ligner, skal vi prøve at konstruere.



På figuren nedenfor til venstre er et bud på en konstruktion antydnet og til højre er vist, hvordan det kan se ud, hvis man fylder det inderste ud.

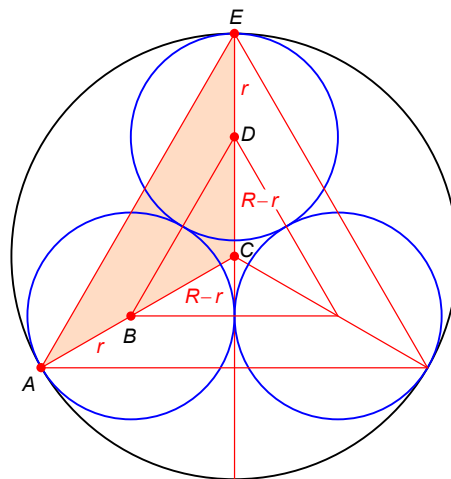


Konstruktion

1. Udgangspunktet er en cirkel med et centrum. Vi skal konstruere de fire indskrevne cirkler. Begynd med at tegne et ”kors” bestående af en vandret og en lodret diameter i den store cirkel. Tegn derefter et omskrevet kvadrat, som vist. Tegn også de to diagonaler i kvadratet.
2. Med centrum i hjørnet B tegnes en cirkelbue med radius lig med længden af linjestykket AB til skæring med diagonalen BC i et punkt, vi vil kalde D .
3. Opret i punktet D en normal til linjestykket BC . Dens skæringspunkt med den lodrette diameter betegnes M . Punktet skal være centrum for en indskreven cirkel. Radius r skal være lig med længden af linjestykket CD . Tegn denne cirkel.
4. Tegn en cirkel med centrum i C og med radius lig med længden af CM . Denne cirkel, som er vist stiple, skærer diameterne i punkter, som er de øvrige centre for de indskrevne cirkler, etc.

- f) Udfør konstruktionen beskrevet på forrige side enten med passer og lineal eller ved hjælp af GeoGebra.
- g) Vis, at radius r af de indskrevne cirkler fås af radius R af den oprindelige store cirkel på denne måde: $r = \sqrt{2} \cdot R - R$. *Hjælp:* Vis at hypotenusen BC i den retvinklede trekant ABC har længden $\sqrt{2} \cdot R$ ved at bruge Pythagoras' sætning. Hvorfor er trekant CDM en ligebenet og retvinklet trekant? Vis, at det betyder at $|CD| = r$. Hvorfor er $|BA| = |BD|$?

Vi skal slutte opgaven af med konstruktion af et ”trekløver”. Denne har en særlig plads i kirken, fordi den symboliserer treenigheden. Vi skal først udlede en formel for radius r af de indskrevne cirkler udtrykt ved radius R i den oprindelige store cirkel. For det første er det klart på grund af symmetrien, at de små cirklers røringpunkter med den store cirkel er hjørner i en ligesidet trekant. Det samme kan siges om de små cirklers centre. Disse to trekanter, hvor alle vinkler er 60° , er derfor ligesidede. Specielt er trekant ACE og trekant BCD ensvinklede. Dermed er forholdet mellem enslygende sider ens (Sætning 11):

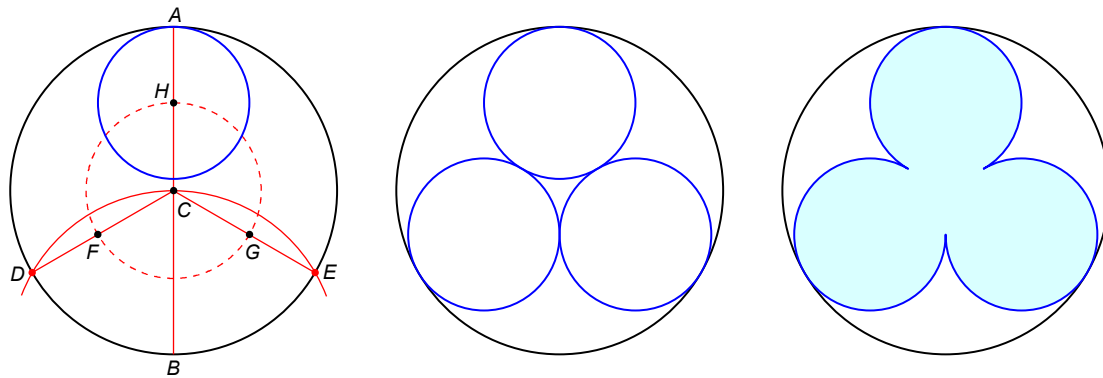


$$\begin{aligned} \frac{|AE|}{|BD|} &= \frac{|AC|}{|BC|} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}R}{2r} = \frac{R}{R-r} \Leftrightarrow \sqrt{3}R \cdot (R-r) = 2rR \Leftrightarrow \sqrt{3} \cdot (R-r) = 2r \\ \Leftrightarrow \sqrt{3}R - \sqrt{3}r &= 2r \Leftrightarrow \sqrt{3}R = (2 + \sqrt{3}) \cdot r \Leftrightarrow r = \frac{\sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} \cdot R \\ \Leftrightarrow r &= \frac{\sqrt{3} \cdot (2 - \sqrt{3})}{(2 + \sqrt{3}) \cdot (2 - \sqrt{3})} \cdot R \Leftrightarrow r = \frac{2\sqrt{3} - 3}{2^2 - (\sqrt{3})^2} \cdot R \Leftrightarrow r = (2\sqrt{3} - 3) \cdot R \end{aligned}$$

I den sidste linje er forlænget med en faktor for at undgå kvadratrødder i nævneren. Bemærk, at $|AE| = \sqrt{3}R$. Dette fremkommer ved at projicere AC ned på AE og gange med 2. $\angle CAE = 30^\circ$, så vi får følgende: $|AE| = 2 \cdot R \cdot \cos(30^\circ) = 2 \cdot R \cdot \sqrt{3}/2 = \sqrt{3}R$ (se opgave X5). I kommatall får vi følgende værdier:

$$\begin{aligned} r &= (2\sqrt{3} - 3) \cdot R \approx 0,464101616 \cdot R \\ R - r &= R - (2\sqrt{3} - 3) \cdot R = (4 - 2\sqrt{3}) \cdot R \approx 0,535898384 \cdot R \end{aligned}$$

Årsagen til, at vi her også har beregnet $R - r$ er, at centrene for de indskrevne cirkler skal ligge på en cirkel med denne radius, tegnet med centrum i C . Oplysningen skal med andre ord bruges i konstruktionen på næste side. Man kan godt konstruere de tre indskrevne cirkler med kun passer og lineal, men det er lidt bøvet, så vi tillader os her at benytte de radier i kommatall, som fremgår ovenfor.



Konstruktion

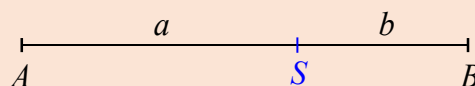
1. Udgangspunktet er en cirkel med et centrum C . Vi skal konstruere de tre indskrevne cirkler. Begynd med at tegne en lodret diameter til skæring med cirklen i A og B .
 2. Tegn en cirkelbue med centrum i B og med en radius svarende til længden af BC . Denne cirkelbue vil skære den oprindelige cirkel i punkterne D og E . Her vil punkterne A , D og E være hjørnerne i den indskrevne ligesidede trekant omtalt på forrige side.
 3. Tegn linjestykkerne DC og EC .
 4. Tegn en cirkel med centrum i C og radius lig med $0,535898384 \cdot R$. Det svarer til den stiplede cirkel på venstre del af figuren. Cirkelns skæringspunkter med DC , EC og AC betegnes henholdsvis F og G og repræsenterer centrene for de små indskrevne cirkler.
 5. Tegn med centrum i hvert af punkterne F , G og H en cirkel med radius $r = 0,464101616 \cdot R$. Dette er de tre ønskede indskrevne cirkler.
- h) Udfør konstruktionen beskrevet ovenfor enten med passer og lineal (med mål) eller ved hjælp af GeoGebra.

Opgave X11* (Det gyldne snit)

Det gyldne snit er et matematisk forhold, som blandt andet finder anvendelse i kunsten, men som også dukker op de mest overraskende steder i naturen, via de såkaldte *Fibonacci-tal*. Dette matematiske forhold omtales undertiden som *det guddommelige forhold* (*The Divine Proportion*). I denne opgave skal vi se, hvordan forholdet er defineret og kan konstrueres med passer og lineal. Opgaven kræver også kendskab til andengrads ligninger.

Definition

Et linjestykke AB , som er delt i stykkerne AS og SB , siges at være delt i *det gyldne snits forhold*, hvis *hele linjestykket* forholder sig til *det lange stykke*, som *det lange stykke* til *det korte stykke*.

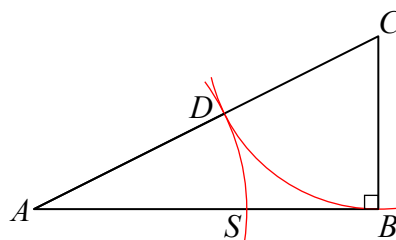


Matematisk kan det udtrykkes således:

$$(X2) \quad \frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$$

Det gyldne snits forhold er da $\varphi = a/b$ (det græske bogstav phi).

Påstanden er nu, at man kan dele et givet linjestykke AB i det gyldne snits forhold ved at anvende en passer og en lineal, som antydnet på figuren til højre. Konstruktionen foregår således:



Trin 1: Oprejs en normal til AB i endepunktet B .

Trin 2: Afsæt længden $|BC| = \frac{1}{2} \cdot |AB|$ op ad normalen (halver først AB).

Trin 3: Forbind A og C med et linjestykke.

Trin 4: En cirkel med centrum i C og radius lig med længden $|BC|$ tegnes til skæring med linjestykket AC i punktet D .

Trin 5: En cirkel med centrum i A og radius lig med længden $|AD|$ tegnes til skæring med linjestykket AB i punktet S . Da vil S dele linjestykket AB i det gyldne snits forhold.

- Vis at (X2) kan omskrives til ligningen $1 + 1/\varphi = \varphi$, og at φ dermed er løsning til følgende andengradsligning: $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$. *Hjælp:* Start med at sætte på hver sin brøkstreg i venstresiden i (X2) ...
- Vis at $\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ ved at løse andengradsligningen. NB! Den ene løsning kasseres.
- Udregn både φ og $1/\varphi$ i kommatall. Sammenlign decimalerne. Hvad ser du?
- Foretag konstruktionen beskrevet ovenfor, idet du starter med et linjestykke af en selvvalgt længde. Benyt enten passer og lineal, eller GeoGebra.
- Mål længderne $|AS|$ og $|SB|$ enten ved at måle med lineal eller få GeoGebra til at måle længderne. Divider derefter de to tal, altså udregn $|AS|/|SB|$ på en lommeregner. Giver det et tal tæt på φ ? Det skulle det gerne.
- Læseren opfordres til at hjælpe med at bevise, at konstruktionen holder *eksakt*! Da forholdet åbenlyst er uafhængig af en eventuel skalering af trekanten, kan vi uden videre antage, at $|AB| = 2$. Benyt herefter Pythagoras' sætning til at vise, at så gælder $|AS| = \sqrt{5} - 1$. Det giver herefter

$$\frac{\text{Hele stykket}}{\text{Det lange stykke}} = \frac{|AB|}{|AS|} = \frac{2}{\sqrt{5} - 1} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} = \varphi$$

som ønsket. For at få 3. lighedstegn er der forlænget med $\sqrt{5} + 1$ i tæller og nævner, anvendt en kvadratsætning og reduceret.

Meget mere om det gyldne snit kan studeres i [L3].

Links

- [L1] <https://matematiksider.dk/klassisk.html> (Geometriske konstruktioner)
- [L2] <https://matematiksider.dk/tredele.html> (Om vinkeltredeling).
- [L3] https://matematiksider.dk/det_gyldne_snit.html (Det gyldne snit)
- [L4] <https://www.youtube.com/watch?v=pg1NpMmPv48&t=50s>
(En fremragende video af Eric Broug: *The complex geometry of Islamic design*)

Litteratur

- [1] Erik Vestergaard. *Klassiske konstruktioner med passer og lineal*. Note fra min egen hjemmeside matematiksider.dk: <https://matematiksider.dk/klassisk/passer.pdf>
- [2] Erik Vestergaard. *Vinkeltredeling – Et bevis for umuligheden af at tredele en generel vinkel med passer og lineal*. Note fra min egen hjemmeside matematiksider.dk: <https://matematiksider.dk/tredel/tredele2.pdf>
- [3] Thyra Eibe (oversætter). *Euklids Elementer I-IV*. Forlaget TRIP, 1994.
- [4] Claus Glunk, Hanne E. Strand, Chr. Marinus Taisbak, Chr. Gorm Tortzen. *Q.E.D. – Platon & Euklid tegner og fortæller*. Gyldendal 2006.
- [5] Claus Glunk, Hanne E. Strand, Chr. Marinus Taisbak, Chr. Gorm Tortzen (oversættere). *Euklid Elementer I-VI – Plangeometri*. Gyldendal (uden årstal).
- [6] Claus Glunk, Hanne E. Strand, Chr. Marinus Taisbak, Chr. Gorm Tortzen (oversættere). *Euklid Elementer VI-IX – Naturlige tal*. Gyldendal. 1. udgave, 1. oplag 2023.
- [7] Jesper Lützen. *Cirklens kvadratur, Vinklens tredeling, Terningens fordobling. Fra oldtidens geometri til moderne algebra*. Systime, 1985.
- [8] Mario Livio. *Det gyldne snit*. Nyt Teknisk Forlag, 2004.
- [9] David S. Richeson. *Tales of Impossibility – The 2000-Year Quest to Solve the Mathematical Problems of Antiquity*. Princeton University Press, 2019.
- [10] J.L. Heilbron. *Geometry Civilized – History, Culture and Technique*. Oxford University Press, 2000. Opr. 1998.
- [11] Keld Nielsen. *Hvordan Danmarkskortet kom til at ligne Danmark*. Steno Museets Venner, 2. udgave 2017. Opr. 1982.

- [12] Erik Vestergaard. *Matematik og landmåling*. Note fra min hjemmeside matematikfysik.dk: https://www.matematikfysik.dk/mat/noter_tillaeg/landmaaling.pdf
- [13] Thomas Bugge. *Beskrivelse over den Opmaalings Maade som er brugt ved de danske geographiske Karter; Med tilføiet trigonometriske Karte over Sieland og de der henhørende Triangler, beregnede Longituder og Latituder; samt astronomiske Observationer*. Gyldendals Forlag, Kiøbenhavn 1779.
- [14] Erik Vestergaard. *Fra græsk matematik til det gyldne snit*. Note fra min hjemmeside matematiksider.dk: https://matematiksider.dk/gyldne/det_gyldne_snit.pdf
- [15] Allessandra Carlini, Paola Magrone. *Ellipses and Ovals in the Physical Space of St. Peter's Square in Rome*. Slovak University of Technology in Bratislava. Faculty of Mechanical Engineering. 16th Conference on Applied Mathematics APPLIMAT 2017 Proceedings.
- [16] Günter Aumann. *Kreisgeometrie – Eine elementare Einführung*. Springer Spektrum. Springerverlag 2015.