Fra græsk matematik til
DET GYLDNE SNIT

| Erik Vestergaard

Billedliste

Side 3: ©iStock.com/Tupungato (Buste af Pythagoras)

Side 6: Attributed to Jacopo de' Barbari [Public domain], via Wikimedia Commons (Portræt af Luca Pacioli (1445-1517) med en student)

Side 7: ©iStock.com/Vaara (Leonardo da Vinci, Vitrivius-manden)

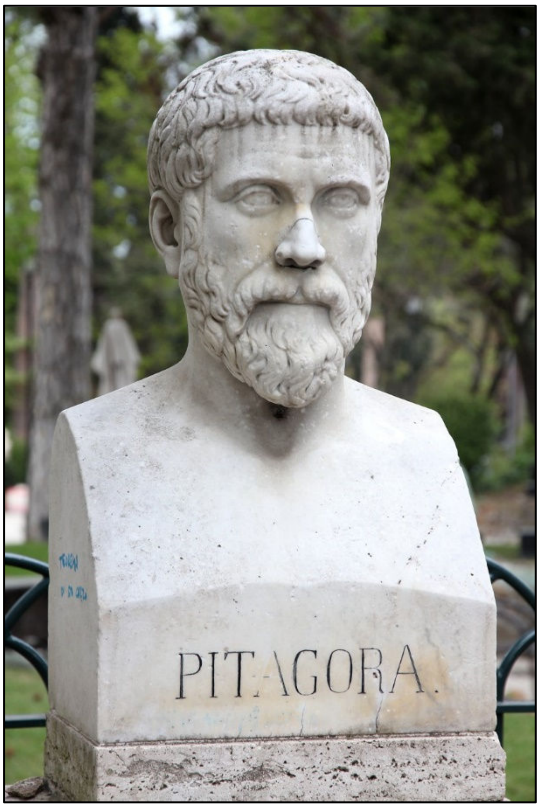
Side 8: ©iStock.com/PeterHermesFurian (Regulære polyedre)

Side 15: By Deep also it at it.wikipedia (Transferred from it.wikipedia) [Public domain], from Wikimedia Commons (Fibonacci)

Side 18: ©iStock.com/Maja Nuić (Solsikker)

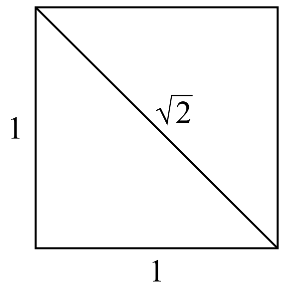
Side 20: ©iStock.com/AndreaAstes (Nautilus)

1. Grækerne



Buste af Pythagoras

Man kender matematik tilbage fra babylonerne og ægypterne, men det var først med grækerne, at vi ser, at det *matematiske bevis* tager form. Grækerne tænkte i *tal* og i *geometri*. Blandt de allerførste græske matematikere, som vi har kendskab til, er *Thales* (ca. 624-547 f.Kr.), og den i folkeskolen så velkendte *Pythagoras* (ca. 572-497 f.Kr.) menes at have lært matematik af Thales. I det hele taget er vores viden om Pythagoras meget dunkel og obskur, og det er usikkert, hvad han overhovedet bidrog med. Måske skyldes mange resultater hans disciple eller studenter? Faktisk ved man med sikkerhed, at *Pythagoras' læresætning* var kendt allerede over 1000 år tidligere af babylonerne. Pythagoras flyttede i ca. 530 f.Kr. fra sit fødested på den græske ø Samos til en græsk by i det nuværende Syditalien. Her grundlagde han en filosofisk skole. Den eksisterede i små 200 år, og dens medlemmer blev kaldt *pythagoræerne*. Der var tale om et slags broderskab, hvor man blandt andet studerede matematik i sammenhæng med en naturfilosofi, der i dag kan virke lidt underlig. Således betragtedes *tal* (positive hele tal) som værende substansen i alting. Hermed mente de, at tal er basis for alle fysiske fænomener. Det er derfor heller ikke underligt, at man i musiske strenginstrumenter tilstræbte harmoni ved at strenglængderne og dermed tonernes frekvenser skulle have passende heltallige forhold: *Oktaven* med forhold 2:1, *kvinten* med forhold 3:2, *kvarten* med forhold 4:3, etc. De kendte himmellegemer blev også koblet til musiske harmonier. Vi skal ikke gå dybere ind i datidens verdensbillede, men mere vende os mod matematikken. Pythagoræerne bidrog med en del teori om tal og geometri. Oprindeligt troede man, at man altid vil være i stand til at måle både diagonalen og siden i et kvadrat. Med "måle" mente man her finde et mål eller enhed, således at både siden i kvadratet og diagonalen er et multiplum heraf. Pythagoræerne fandt dog ud af, at det ikke er tilfældet, og man mener det skete omkring 430 f.Kr. Hermed havde man opdaget de *inkommensurable* (ikke målelige) størrelser. I dag vil vi sige, at det svarer til opdagelsen af de *irrationale* tal. Pythagoræerne kunne ikke regne med det tal, som svarer til fx $\sqrt{2}$, men tallet kunne geometrisk være præsenteret ved en længde. Det er nok årsagen til, at geometrien derefter blev sat i centrum i de matematiske studier. I øvrigt blev den i dag verdensberømte filosof *Platon* (ca. 428 f.Kr. til ca. 348 f.Kr.) selv meget inspireret af matematik, da den repræsenterer den ideelle og rene tanke. Man var interesseret i *eksakte*



resultater, ikke tilnærmelser. Praktiske ting overlod de til slaver. De græske matematikere var filosoffer, som ville trænge ind til tingenes inderste væsen. Platon udtrykker følgende i hans bog *Republikken*: "Studiet af matematik udvikler og aktiverer en mental organisme, der er mere værdifuld end tusind øjne, fordi sandhed alene erfares gennem dette studium".

Der kan nævnes mange betydningsfulde græske matematikere, men nu springer vi til *Euklid* (ca. 300 f.Kr.). Euklid leverede sandsynligvis ikke vigtige bidrag til matematikken selv, men han samlede en masse matematiske resultater, som andre var nået frem til, i et imponerende værk på 13 bind, kaldet *Euklids elementer*. Det fik enorm betydning og anvendt i århundreder. I værket anvendes den axiometisk, deduktive metode til at bevise sætninger. Axiomerne, danner en basis, hvorpå man kunne deducere, altså foretage logiske følgeslutninger. Euklid kom også med definitioner og postulater. På den måde var grækerne tæt på den stringente måde, hvorpå vi i dag opbygger teorier og beviser sætninger. Man kan læse nogle af Euklids bøger i dansk oversættelse ved Thyra Eibe i [2].

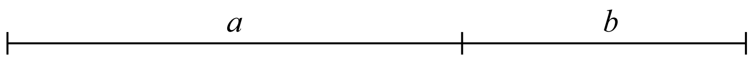
Øvelse 1

Se Opgave A side 22: Forsøg at forstå beviset for at $\sqrt{2}$ er irrational. Et bevis, som svarer til dette modstridsbevis, blev tilføjet Euklids Elementer, bog 10.

I Euklids Elementer kan man også finde beskrevet det *gyldne snit*, som er temaet i resten af dette appendiks. Det vil sige navnet "Det gyldne snit" dukker først op omkring 1830, men selve det matematiske indhold er det samme nu som dengang.

Definition 2 (Det gyldne snit)

Man siger, at et linjestykke deles i *det gyldne snits forhold*, hvis *hele linjestykket forholder sig til det lange stykke, som det lange stykke til det korte stykke*. På figuren nedenfor er det således a/b, som betegnes det *gyldne snits forhold*, og tallet betegnes ofte med det græske bogstav φ (phi).



Idet vi har kaldt længden af det lange stykke for a og længden af det korte stykke for b, kan vi udtrykke betingelsen i definitionen således:

(1) $$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$$

Øvelse 3

Lad $\varphi = a/b$ og brug derefter ligningen (1) til at vise, at φ tilfredsstiller andengradsligningen $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$. Vis dernæst ved at løse andengradsligningen, at det gyldne snits forhold er givet ved

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}61803...$$

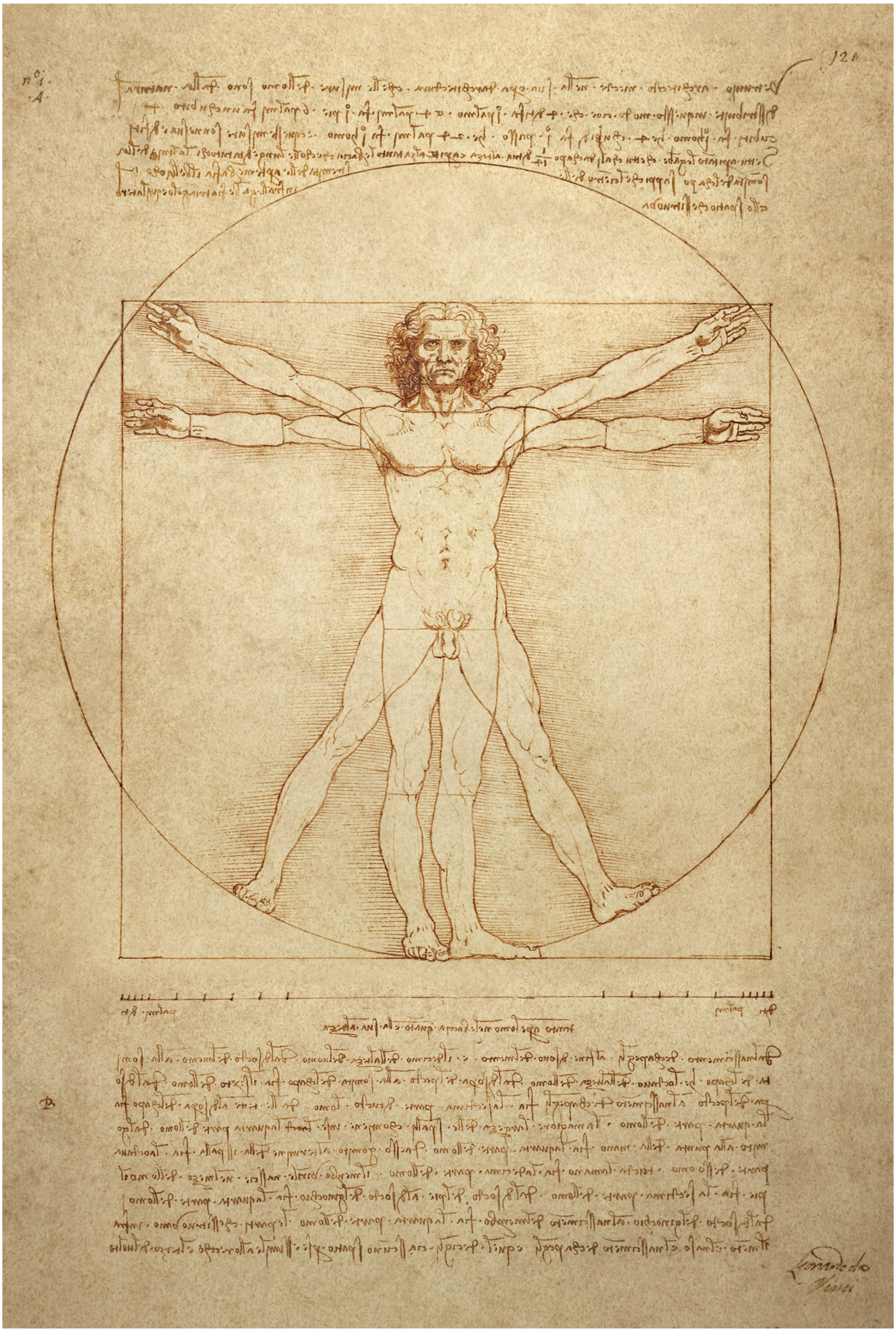
Hjælp: Benyt at $b/a = 1/\varphi$.

□

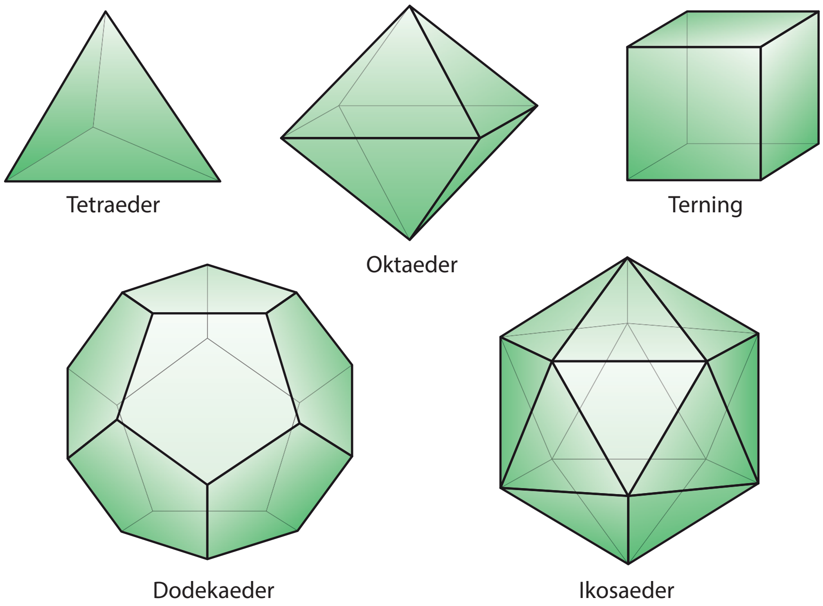
Euklid havde i øvrigt brug for dette forhold til at kunne konstruere en regulær femkant. Man kan så spørge om, hvorfor netop dette matematiske forhold fik den ophøjede status, som det har i dag? Her skal vi nok frem til 1509, hvor den italienske munk og matematiker, Luca Pacioli (1445-1517) udgav bogen *De Divina Proportione*. Bogen handler om matematiske forhold og deres anvendelser i geometri, perspektivet og kunst. Det faktum, at bogen desuden var illustreret af hans gode ven *Leonardo da Vinci* (1452-1519), har uden tvivl hjulpet med at få bogen til at blive kendt udover bare matematiker kredse. Men hvor kommer det gyldne snits forhold da ind? Jo, Pacioli var meget inspireret af Platon, og sidstnævnte havde i antikken koblet det sidste *regulære polyeder*, nemlig *dodekaederet* til det himmelske og guddommelige. De første fire regulære polyedre (der er fem i alt), var koblet til de fire elementer *jord*, *vand*, *luft* og *ild*. Men dodekaederet er netop sammensat af regulære femkanter, og så er vi tilbage til konstruktionen af en regulær femkant, som kræver, at man kan konstruere det gyldne snit. Derfor, konkluderede Pacioli, måtte det gyldne snit også være guddommeligt. En af Leonardo da Vincis illustrationer i *De Devina Proportione* er et dodekaeder. Tilsyneladende har Leonardo været begejstret for udtrykket "det guddommelige forhold", for han brugte det siden i et af sine egne værker til at karakterisere skønheden i formen, dog uden dermed at mene det gyldne snit. Og det er her, at de første tegn på misforståelser kan være opstået, som beskrevet i artiklen [3] med titlen "Ikke alle skæringer er gyldne". Leonardo var helt sikkert interesseret i forskellige forhold, som ikke nødvendigvis er gyldne. Vi kender hans illustration af *Vitrivius manden*, hvor han afbilder et menneske indskrevet i en cirkel og et kvadrat. Her er forholdet mellem afstanden fra fingerspids til fingerspids og mandens højde som 1:1. Ordet "Renæssance" kommer af det franske "genfødsel" og bruges om tiden, hvori Leonardo levede. Her genopdagede man den græsk-romerske politisk-kulturelle tradition. Derfor er det ikke underligt, når man i kunsten tog forhold mellem hele tal til sig, ligesom de gamle pythagorærere gjorde. Forhold og proportioner var med andre ord noget man tænkte meget over, sammen med symmetrier. Leonardos brug af betegnelsen "det guddommelige forhold" i sit eget værk kan muligvis have fået nogle til at tro, at han mente det samme med udtrykket som Pacioli, dvs. det gyldne snit. Det kan yderligere have ansporet nogle til at tro, at Leonardo mente, at det var tilrådeligt at anvende det gyldne snit i kunst og arkitektur. Det er uvist, hvor meget datidens kunstnere tænkte på at inddrage det gyldne snit i deres kunst. Når man har fundet forhold i et kunstværk, som omtrent forholder sig som det gyldne snit, kan det være svært at afgøre, om det er en bevidst handling eller en tilfældighed. Man har ikke fundet skriftlige kilder, der omtaler brugen af det gyldne snit i renæssance-kunsten. Det har ført til, at en del historikere har udtrykt skepsis over, hvorvidt det gyldne snit spillede en rolle i kunsten før ca. midten af 1800-tallet. Blandt de personer, som har fremmet myten om, at det gyldne snit bevidst skal have været brugt i kunsten i renæssancen eller endda helt tilbage til antikken er ifølge [3] den intellektuelle Adolf Zeising og matematikerne Hermann Hankel og Moritz Cantor. Nok om det her. Uanset hvad der er rigtigt, så er historien om det gyldne snit spændende, og det matematiske forhold har en masse interessante egenskaber. Efter Zeisings bog udkom i 1854 er mange blevet interesseret i det gyldne snit, og derefter har diverse kunstnere med sikkerhed anvendt det i deres kunst. Forfatteren Dan Brown har med sin internationale bestseller af en bog, *Da Vinci Mysteriet* (The Da Vinci Code) fra 2009, også givet liv til historien og mysteriet om det gyldne snit (*The Devine Proportion*).

Portræt af italieneren Luca Pacioli (1445-1517) med student

En ting der lige skal nævnes er, at de forhold mellem hele tal, som pythagoræerne tilstræbte, jo repræsenterer rationale tal, mens det gyldne snit er et irrationalt tal, som det fremgår af Øvelse 3.



Den berømte tegning af *Leonardo da Vinci* (1452-1519) forestillende *Vitrivius-manden*. Leonardo studerede forhold i den menneskelige krop. Her er det 1:1 og altså ikke det gyldne snit.



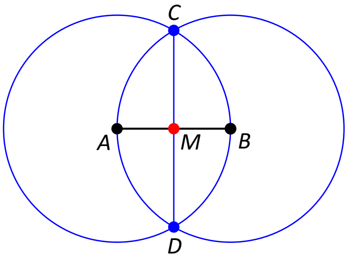
Man kan bevise matematisk, at der findes de fem konvekse regulære polyedre, som vist på figuren ovenfor, og at der *ikke* eksisterer andre. Kravet til, at et polyeder kan kaldes *regulært* er, at sidefladerne alle er ens og er *regulære polygoner*, hvis hjørner alle ligger på den samme omskrevne kugle. De fem regulære polyedre kendes også under navnet de fem *platoniske legemer*. En *regulær polygon* er en polygon, hvor alle siderne er lige lange og hvor alle hjørner ligger på den samme omskrevne cirkel.

2. Konstruktioner med passer og lineal

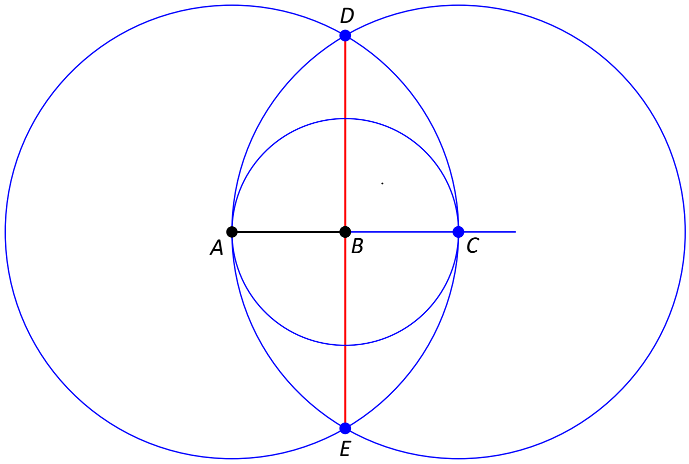
Vi skal prøve at foretage nogle konstruktioner i grækernes ånd. Konstruktion med passer og lineal dækker over følgende tilladte operationer:

1. Tegne den rette linje igennem to allerede fundne eller givne punkter. Eller at forlænge et linjestykke, så langt man ønsker.
2. Tegne en cirkel med et allerede fundet eller givet punkt som centrum og med en radius, som er lig med afstanden mellem to allerede fundne eller givne punkter.
3. Finde nye punkter som skæringspunkterne for allerede fundne eller givne rette linjer og cirkler.

De anførte regler kan synes noget begrænsende. Det er de på en måde også, for alt kan ikke konstrueres med passer og lineal. Der er dog overraskende meget, der kan. Det skal nævnes, at man fra start har to punkter til rådighed. Afstanden mellem disse kan man betegne med 1 (en *enhed*). To punkter er nødvendige for at kunne starte konstruktionen af nye linjer og punkter. Hvad der *ikke* er tilladt, er at måle afstande med en lineal og afsætte punkter ved opmåling! Man må heller ikke tegne vinkler, hvor vinklen er opmålt med en vinkelmåler. Blandt basiskonstruktionerne er at kunne konstruere *midtpunktet på en given linje* samt at *oprejse en normal til et linjestykke i dets endepunkt*.



Konstruere midtpunkt
på linjestykke



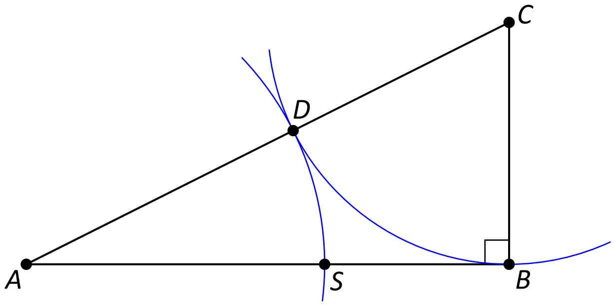
Oprejse normal til linjestykke
i dets ene endepunkt

Konstruktionen af midtpunktet på linjestykket AB kan beskrives således: Med AB i passeren og centrum i henholdsvis A og B tegnes to cirkler. Cirklernes skæringspunkter betegnes C og D. Linjen gennem C og D tegnes. Skæringspunktet M mellem linjestykket AB og linjestykket CD er det søgte midtpunkt.

Øvelse 4

Givet linjestykket AB. Giv en sproglig beskrivelse af konstruktionen af normalen i B antydet på den højre del af figuren ovenfor. Husk at en *normal* til et linjestykket er en linje, som står vinkelret på det oprindelige linjestykke.

Vi er nu klar til at beskrive, hvordan man kan dele et givet linjestykke AB i det gyldne snits forhold: Oprejs en normal til AB i punktet B. Afsæt punktet C op ad normalen, så $|BC| = \frac{1}{2} \cdot |AB|$. Sidstnævnte kan gøres ved først at konstruere midtpunktet M på linjestykket AB, tage BM i passeren og tegne en cirkel med centrum i B til skæring med normalen i C. Tegn linjestykket AC, så trekanten er fuldendt. Tag BC i passeren og tegn en cirkel med centrum i C til skæring med linjestykket AC i et punkt, der betegnes D. Tag endelig AD i passeren og tegn en cirkel med centrum i A. Skæringspunktet med linjestykket AB kaldes S. Punktet deler linjestykket i den gyldne snits forhold: $\varphi = |AB|/|AS| = |AS|/|BS|$.



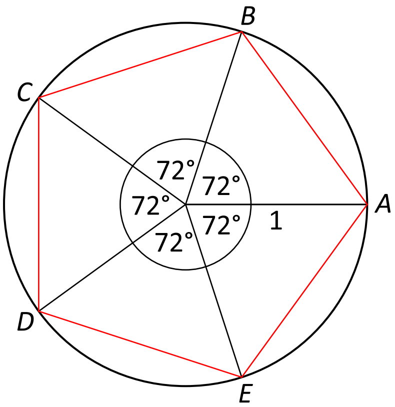
Konstruktion af det gyldne snit

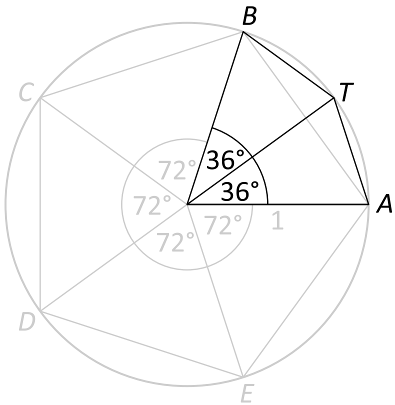
Øvelse 5

a) Gennemfør selv de tre konstruktioner beskrevet på forrige side. Du kan gøre det med en gammeldags passer og lineal, men vil du have en meget præcis konstruktion, kan du med fordel gøre det med softwareprogrammet GeoGebra.

b) Bevis at S virkelig deler linjestykket AB i det gyldne snits forhold. *Hjælp*: Lad linjestykket AB have længden 1. Hvor lang er BC så? Benyt herefter Pythagoras' sætning til at bestemme længden af AC. Du skal regne eksakt som grækerne, ikke i kommatal.

I det følgende er vores mål at konstruere en regulær femkant. Vi skal som tidligere anført indse, at det involverer det gyldne snit. For at kunne konstruere en regulær femkant, er det nødvendigt at kunne konstruere en vinkel på $360°/5 = 72°$. Kan vi konstruere en vinkel på 36°, kan vi også konstruere en vinkel på 72°. Har vi nemlig konstrueret stykket AT, er det indlysende nemt også at konstruere stykket AB.





Øvelse 6

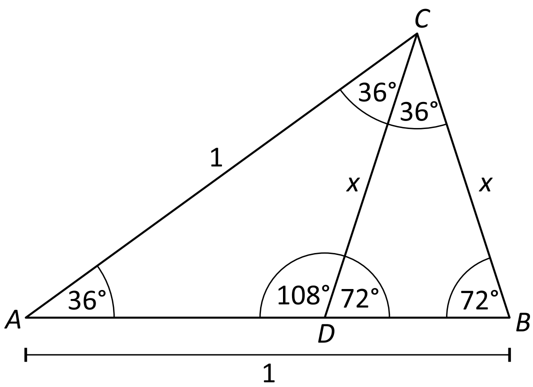
Nedenfor er ΔABC med vinkel 36° og to hosliggende sider med længderne 1 indtegnet. Et punkt D er afsat på siden AB, så ΔCDB er en ligebenet trekant. Sæt $|BC| = x$.

a) Redegør for, at de angivne vinkler er korrekte.

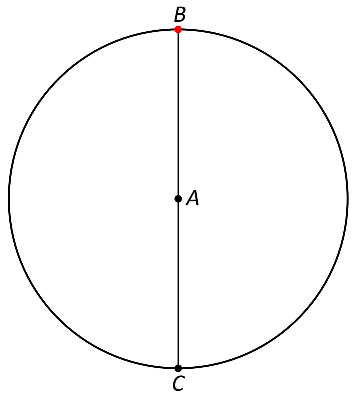
b) Forklar hvorfor $|AD| = x$ og $|DB| = 1 - x$.

c) Vis ved at udnytte, at ΔABC og ΔCDB er ensvinklede trekanter, at $x/(1-x) = 1/x$.

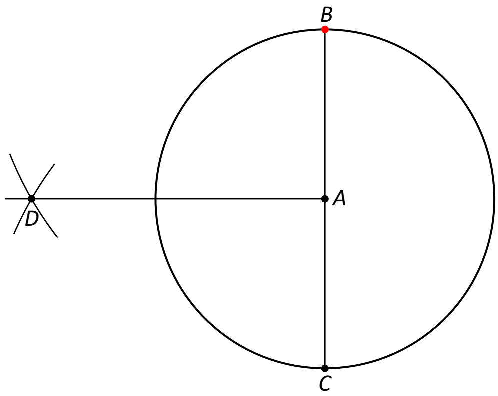
d) Vis at x opfylder $x^2 + x - 1 = 0$, og vis at den positive løsning er $\frac{1}{2} \cdot (\sqrt{5} - 1) = 1/\varphi$.



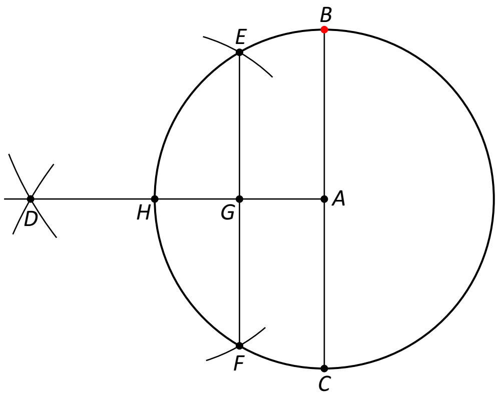
Vi er klar til at se en opskrift på, hvordan man kan konstruere en regulær femkant.



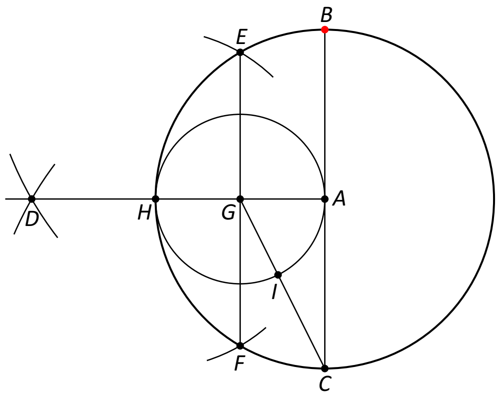
Start med linjestykket *AB*, som repræsenterer en enhed. Stykket behøver ikke være tegnet lodret. Tegn cirklen med stykket *AB* i passeren og centrum i *A*. Forlæng linjestykket *AB* til skæring med cirklen i *C*.



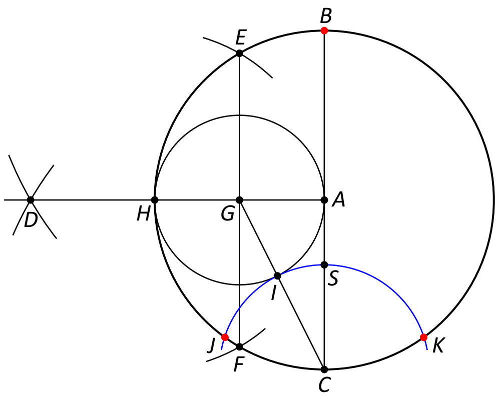
Tag stykket *BC* i passeren og tegn en cirkelbue med centrum i *B*. Det samme gøres med centrum i *C*. Skæringspunktet mellem cirkelbuerne kaldes *D*. Tegn en linje gennem *A* og *D* (er normal til *AB*).



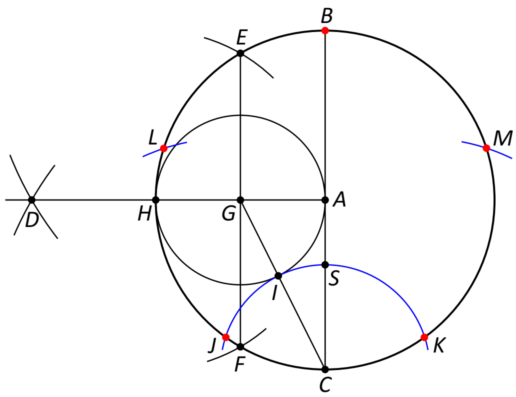
Skæringspunktet mellem *AD* og cirklen kaldes *H*. Tegn cirkelbuer med *AH* i passeren og centrum i *H*. Deres skæringer med cirklen kaldes *E* og *F*. Linjestykket *EF* er midtnormal til *AH*. Skæringspunktet kaldes *G*.



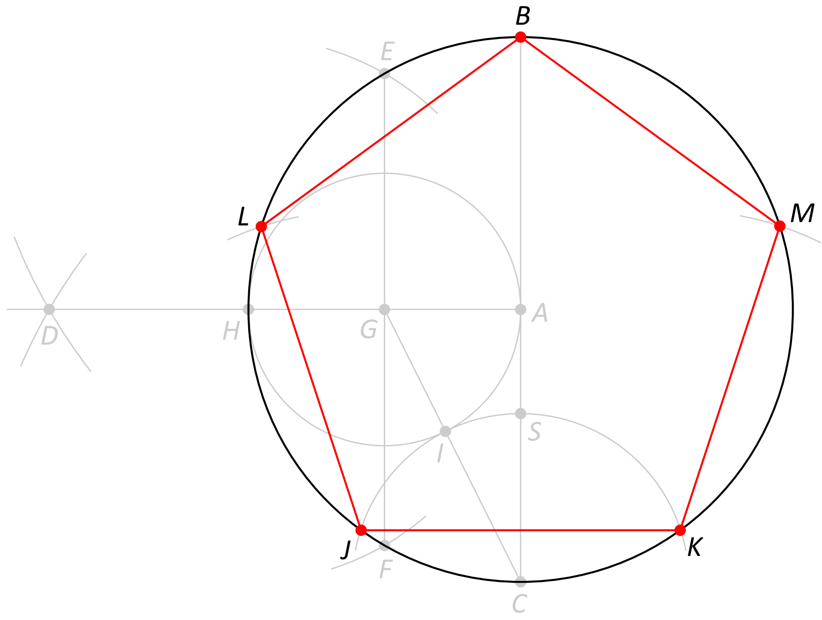
Tag stykket *GA* i passeren og tegn en lille cirkel med centrum i *G*. Tegn linjen gennem *G* og *C* til skæring med den lille cirkel i et punkt, vi betegner *I*.



Tag stykket *CI* i passeren og tegn en cirkel med centrum i *C*. Cirklens skæringspunkter med den oprindelige store cirkel betegnes *K* og *L*.



Tag stykket *JK* i passeren og tegn en cirkel med centrum i *J* til skæring med den store cirkel i punktet *L*. Tag stykket *JK* i passeren og tegn en cirkel med centrum i *K* til skæring med den store cirkel i punktet *M*.



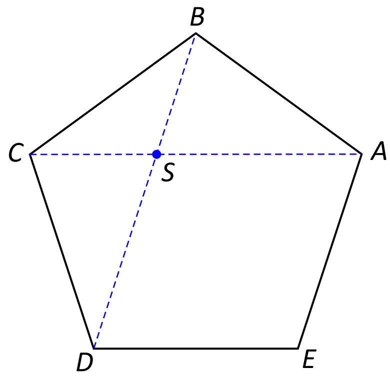
På figuren ovenfor har vi forbundet punkterne J, L, B, M og K med linjestykker. Påstanden er, at punkterne er hjørner i en regulær femkant.

Øvelse 7

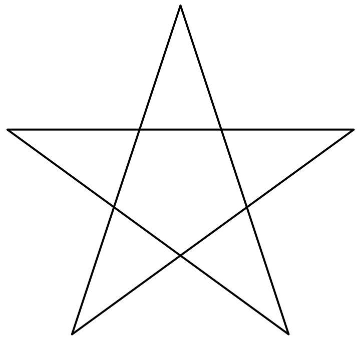
Gennemfør ovenstående konstruktionsproces i praksis, gerne med GeoGebra.

Bevis for at ovenstående konstruktionsproces virkelig giver en regulær femkant: Betragt ΔCAG på figuren ovenfor. Ifølge konstruktionen af det gyldne snit omtalt på side 10, er $|CS| = 1/\varphi$. Dermed er også $|CJ| = 1/\varphi$. ΔCAJ har altså siderne 1, 1 og $1/\varphi$. Det er netop den trekant, vi har studeret i Øvelse 6. Vi konkluderer, at $\angle CAJ = 36°$ og heraf endelig, at $\angle KAJ = 72°$. Herefter kan man bare tage stykket JK i passeren og tegne en cirkel med centrum i punktet J til skæring med den oprindelige store cirkel i L. Samme afstand i passeren og centrum i punktet K vil give punktet M. Dermed har man konstrueret den regulære femkant.

Den regulære polygon eller *pentagonen*, som den også kaldes, har en række smukke egenskaber. Det gyldne snit kan genfindes i den geometriske form på forskellig vis. Vi angiver uden bevis, at to diagonaler, der ikke mødes i et endepunkt, skærer hinanden i det gyldne snits forhold. På venstre figur på næste side gælder således $|AS|/|CS| = \varphi$. Forholdet mellem en diagonal og en side er også det gyldne snit: $|CA|/|DE| = \varphi$. Pentagonen spillede en stor rolle for pythagoræerne. Hvis man forlænger siderne på den regulære femkant, får man dannet en fem-takket stjerne kaldet et *pentagram*. Pythagoræerne brugte pentagrammet som deres hemmelige logo for at ønske hinanden sundhed og lykke. Andre kulturer har tillagt pentagrammet guddommelige og magiske kræfter. Pentagrammet kan ses på højre del af figuren på næste side.



Regulær femkant (Pentagon)



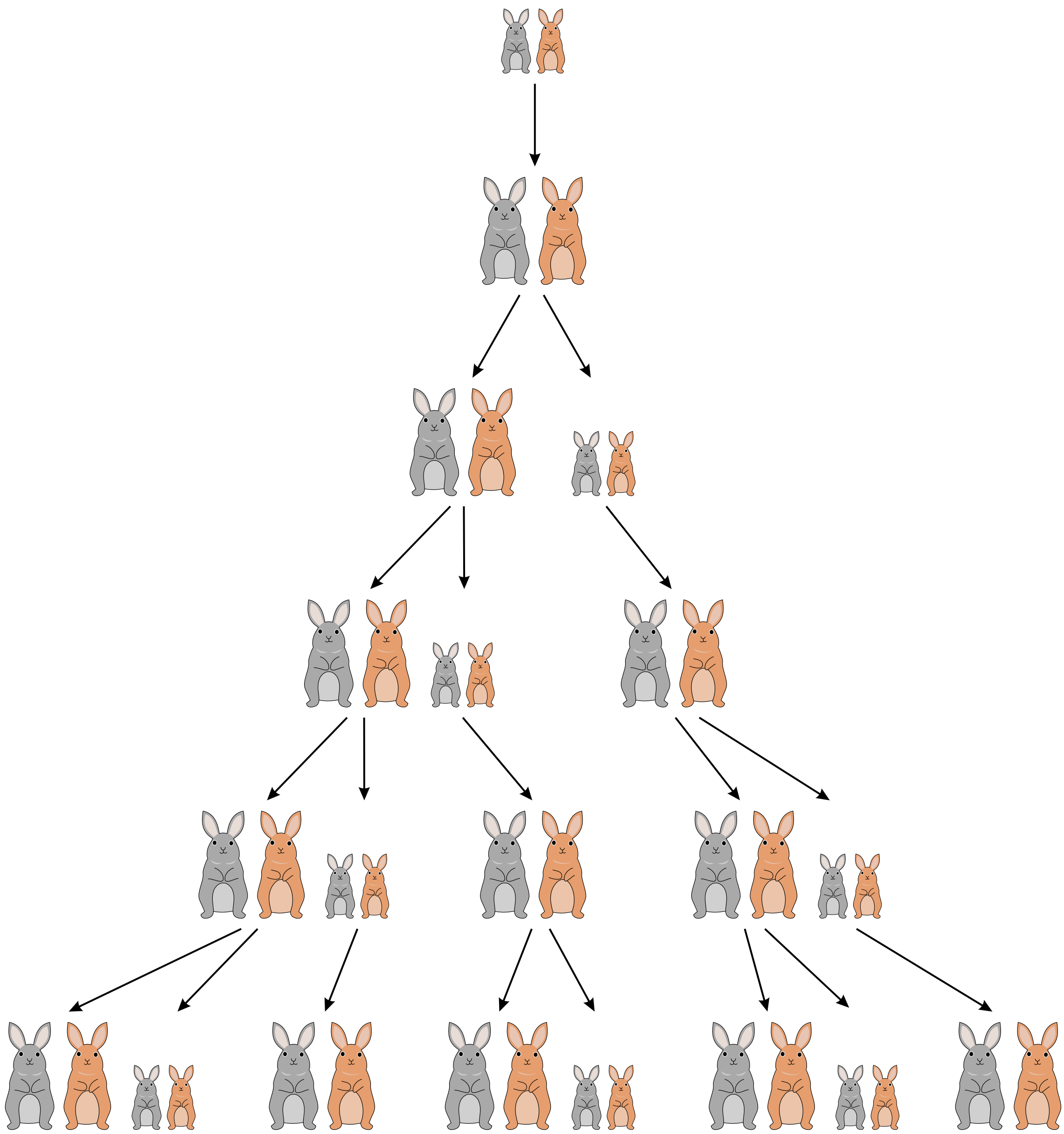
Pentagram

Konstruktioner med passer og lineal er i det hele taget en fascinerende disciplin. Man kan halvere en vinkel med passer og lineal, men ikke *tredele en vinkel*. Grækerne prøvede forgæves at finde metoder hertil. Først i 1800-tallet blev det endelig bevist, at det ikke kan lade sig gøre. Man kan heller ikke *kvadrere cirklen* eller *fordoble kuben*, som er to andre klassiske problemer. Vi skal ikke komme nærmere ind på dette her. Interesserede kan eventuelt konsultere [1]. Angående kunsten at konstruere regulære polygoner, så var det længe uklart, hvilke man kunne konstruere med passer og lineal. En af historiens største matematikere, *Carl Friedrich Gauss* (1777-1855) angav i en alder af 19 år en metode til at konstruere den regulære 17-kant! Gauss kom i øvrigt med en fuldstændig løsning på spørgsmålet om konstruerbare regulære polygoner, og det blev publiceret i hans berømte værk *Disquisitiones arithmeticae* fra 1801. Nok om det her.

3. Fibonacci tallene

Vi foretager igen et spring i tid. Denne gang er vi i Norditalien i begyndelsen af 1200-tallet. *Leonardo af Pisa* (ca. 1170-ca. 1250), eller som han også blev kaldt, *Fibonacci*, var søn af en forretningsmand og embedsmand. Pisa var dengang en livlig handelsby, hvor man blandt andet handlede med krydderier fra Fjernøsten. Den megen handel krævede bogføring af lagre og priser. At regne med romertal er langt fra effektivt. At lægge sammen og trække fra går lige an. At gange tal sammen er håbløst. Det hjalp dog lidt, at man kunne regne på kuglerammer, men det uhensigtsmæssige talsystem var en stor hæmsko. Leonardo hjalp i en periode sin far som handelsmand og toldfunktionær i Bugia i det nuværende Algeriet, og rejste senere til flere andre Middelhavslande. Her stiftede han bekendtskab med det hindu-arabiske talsystem, som han erfarede var alle andre talsystemer overlegent. Efter at have fået udvidet sin matematiske horisont, gik han i gang med at skrive en bog, hvori han beskrev, hvordan man kan anvende det hindu-arabiske talsystem i praksis. Bogen indeholder et væld af eksempler, som spænder lige fra hestekøbsopgaver til tømning og fyldning af cisterner. Leonardos bog med navnet *Liber Abaci* udkom i år 1202. Han høstede stor anerkendelse for værket. Den var et kærkomment bidrag til matematikken i Vesteuropa, som på den tid var meget tilbagestående, ikke mindst som en følge af kirkens store dominans. Men tilbage til Liber Abaci. Grunden til, at bogen omtales her er, at der er en helt særlig opgave fra kapitel XII: udviklingen af antal kaniner i en kanin-population. Som man måske kan gætte, har den forbindelse til det gyldne snit!

Et par kaniner (en han og en hun) føder et nyt par kaniner hver måned. Nyfødte kaniner bliver dog først kønsmodne efter 2 måneder. Vi starter med ét par nyfødte kaniner. Efter 1 måned er de blevet større, men stadig ikke kønsmodne. Derfor er der stadig kun ét par. Efter 2 måneder er parret kønsmodent og får et nyt par som afkom. Sammen med det oprindelige par er der dermed to par. Efter 3 måneder føder det oprindelige par igen et nyt par, mens det andet par ikke er fødedygtigt endnu. Sådan fortsættes måned efter måned. Skematisk kan det stilles således op:



....

Øvelse 8

Nævn flere antagelser, der ligger til grund for ovenstående udvikling i kaninbestanden. Er de realistiske i en praktisk sammenhæng?

Selv om opgaven er meget urealistisk, fik den alligevel stor opmærksomhed, eftersom den har teoretisk interesse. Udviklingen måned efter måned i kaninbestanden kan nemlig beskrives ved en *rekursiv talfølge*. Hermed menes en talfølge, hvor man kan bestemme det nye tal i talfølgen ud fra kendskab til de forrige. Lad i det følgende V_n, B_n og F_n betegne henholdsvis antal voksne kaninpar, antal børnekaninpar og det samlede antal kaninpar efter $n-1$ måneder. Da haves: $V_n = F_{n-1}$ og $B_{n-1} = V_{n-2}$ og heraf: $F_n = V_n + B_n = F_{n-1} + V_{n-1} = F_{n-1} + F_{n-2}$. Det samlede antal kaninpar en given måned er altså lig med summen af de samlede antal kaninpar de to forrige måneder. Vi kan skrive det således:

(2)
$$\begin{aligned} &F_1 = 1, F_2 = 1. \\ &F_n = F_{n-1} + F_{n-2}\ ,\ \ n \geq 3 \end{aligned}$$

Vi har her tilføjet de to første værdier i talfølgen. Med dem og den angivne regel, kan vi finde alle efterfølgende værdier i talfølgen. Nedenfor er udregnet de første tal i talfølgen, hvilket ses at stemme overens med vores figur med kaniner på forrige side.

$$\begin{aligned} F_3 &= F_2 + F_1 = 1+1 = 2 \\ F_4 &= F_3 + F_2 = 2+1 = 3 \\ F_5 &= F_4 + F_3 = 3+2 = 5 \\ F_6 &= F_5 + F_4 = 5+3 = 8 \\ F_7 &= F_6 + F_5 = 8+5 = 13 \\ &\ \ \vdots \end{aligned}$$

Øvelse 9

Prøv selv at generere en liste over de første 50 Fibonacci-tal. Det kan være en fordel at bruge et regneark såsom Excel hertil.

Det viser sig, at forholdet mellem to på hinanden følgende Fibonacci-tal nærmer sig til det gyldne snit, når *n* går mod uendelig. Egenskaben blev i 1611 opdaget af den berømte tyske astronom *Johannes Kepler* (1571-1630). Den blev først bevist langt senere.

$$\begin{aligned} 1/1 &= 1.000000 \\ 2/1 &= 2.000000 \\ 3/2 &= 1.500000 \\ 5/3 &= 1.666666 \\ 8/5 &= 1.600000 \\ 13/8 &= 1.625000 \\ 21/13 &= 1.615385 \\ 34/21 &= 1.619048 \\ 55/34 &= 1.617647 \\ 89/55 &= 1.618182 \\ 144/89 &= 1.617978 \\ &\ldots \end{aligned}$$

Fibonacci (ca. 1170-ca. 1250)

I det følgende ønsker vi at give et bevis for påstanden på forrige side, altså af forholdet mellem to på hinanden følgende Fibonacci-tal konvergerer mod det gyldne snit. Hertil får vi først brug for at bevise en egenskab for Fibonacci-tallene.

Sætning 10

Lad $\{F_n\}$ være Fibonacci-talfølgen givet ved (2). Da gælder:

(3) $$F_{n+1}^2 - F_{n+1} \cdot F_n - F_n^2 = (-1)^n$$

Bevis: For at bevise formlens rigtighed skal vi bruge en teknik, som kaldes *induktion*. Metoden går ud på at vise formlens rigtighed for den eller de første værdier af n og derefter vise, at *hvis* formlen gælder for n, så gælder den også for $n+1$. Kan vi vise det, kan vi konkludere, at formlen gælder for alle værdier af $n \in N$. Er formlen rigtig for $n=1$, så er den det nemlig også for $n=2$. Når den er rigtig for $n=2$, så er den det også for $n=3$, etc. Først indsætter vi $n=1$ i (3):

Basisskridt: $F_2^2 - F_2 \cdot F_1 - F_1^2 = (-1)^1 \;\Leftrightarrow\; 1^2 - 1 \cdot 1 - 1^2 = -1$ stemmer!

Induktionsskridt:

$$\begin{aligned}
& F_{n+1}^2 - F_{n+1} \cdot F_n - F_n^2 = (-1)^n \\
& \Updownarrow \\
& \left(F_n + F_{n-1}\right)^2 - \left(F_n + F_{n-1}\right) \cdot F_n - F_n^2 = (-1)^n \\
& \Updownarrow \\
& F_n^2 + 2F_n \cdot F_{n-1} + F_{n-1}^2 - F_n^2 - F_n \cdot F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n \\
& \Updownarrow \\
& -F_n^2 + F_n \cdot F_{n-1} + F_{n-1}^2 = (-1)^n \\
& \Updownarrow \\
& F_n^2 - F_n \cdot F_{n-1} - F_{n-1}^2 = (-1)^{n-1}
\end{aligned}$$

hvor i det første ensbetydende tegn har udnyttet, at F_{n+1} er summen af de to forrige, altså F_n og F_{n-1}. I sidste ensbetydende tegn har vi gange med –1 på begge sider af lighedstegnet. Den sidste linje er netop (3), hvor n er udskiftet med $n-1$. Vi har dermed bevist (3) for alle $n \in N$.

□

I stil med (3) findes der utallige andre smukke egenskaber for Fibonacci-tallene. Det er alt sammen meget fascinerende. Faktisk så meget, så der er skabt et helt tidsskrift *Fibonacci Quarterly*, som tager sig af disse egenskaber. Vi skal ikke gå dybere ind i det her, blot bruge sætning 10 til at bevise sætningen vedrørende det gyldne snit.

Sætning 11

Talfølgen bestående af forholdet mellem to på hinanden følgende Fibonacci-tal konvergerer mod det gyldne snit:

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} \to \varphi \quad \text{for} \quad n \to \infty$$

Bevis: Lad os dividere med F_n^2 på begge sider af lighedstegnet i (3):

$$\text{(4)} \qquad \frac{F_{n+1}^2 - F_{n+1} \cdot F_n - F_n^2}{F_n^2} = \frac{(-1)^n}{F_n^2} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{F_{n+1}}{F_n}\right)^2 - \left(\frac{F_{n+1}}{F_n}\right) - 1 = \frac{(-1)^n}{F_n^2}$$

Vi sætter $K_n = F_{n+1}/F_n$, hvorefter vi ser, at K_n tilfredsstiller følgende andengradsligning:

$$\text{(5)} \qquad x^2 - x - \left(1 + \frac{(-1)^n}{F_n}\right) = 0$$

med løsningerne:

$$\text{(6)} \qquad x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot \left(1 + (-1)^n/F_n\right)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5 + 4 \cdot (-1)^n/F_n}}{2}$$

For alle n har vi, at $F_{n+1} \geq F_n$, hvoraf vi slutter, at $K_n \geq 1$. Derfor må K_n være løsningen, der kommer fra plusset i (6). Eftersom der klart gælder, at $F_n \to \infty$ for $n \to \infty$, får vi:

$$\text{(7)} \qquad K_n = \frac{1 + \sqrt{5 + 4 \cdot (-1)^n/F_n}}{2} \to \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \varphi \quad \text{for} \quad n \to \infty$$

Vi har dermed bevist sætningen.

□

Som sædvanligt stillede matematikerne sig en masse ekstra spørgsmål for at udvide forståelsen af Fibonacci-tallene. Et af dem var, om det virkelig er nødvendigt for eksempel at udregne de første 999 Fibonacci-tal for at kunne udregne Fibonacci-tal nummer 1000? Svaret er, at det behøver man ikke. I det 19. århundrede viste franskmanden *Jacques Philippe Marie Binet* (1786-1856), at der findes en formel til bestemmelse af det n'te Fibonacci-tal. Formlen, som tilsyneladende allerede var kendt i det 18. århundrede af *Leonhard Euler* (1707-1783) og *Abraham de Moivre* (1667-1754), angives her uden bevis:

Sætning 12 (Binets formel)

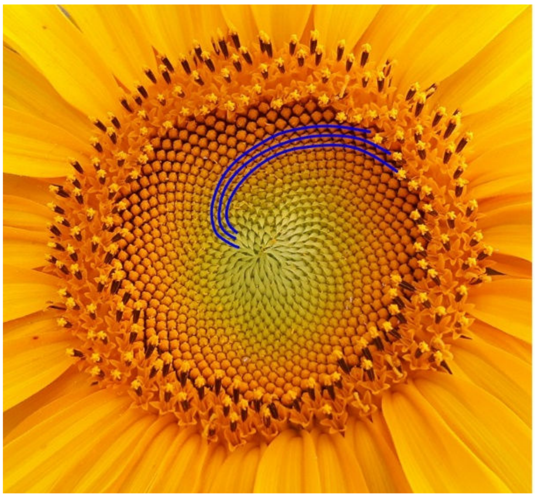
Det n'te Fibonacci-tal kan bestemmes af følgende formel:

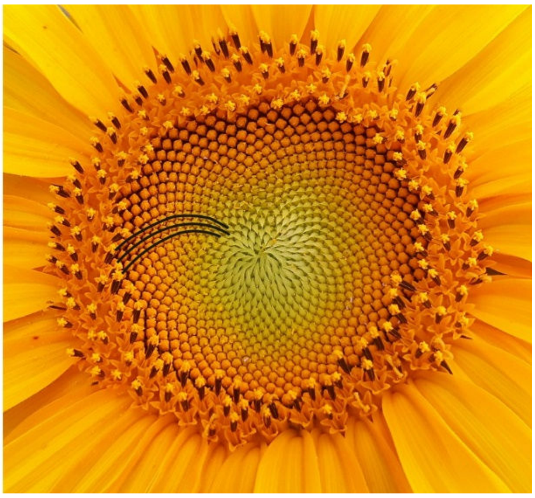
$$\text{(8)} \qquad F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \right)$$

Det kan synes overraskende, at en formel, som giver et helt tal for alle værdier af n, faktisk indeholder kvadratrødder. I øvrigt kan Binets formel alternativt skrives således:

(9) $$F_n = \frac{\varphi^n - \psi^n}{\sqrt{5}}$$

hvor $\psi = -1/\varphi$ er den anden løsning til andengradsligningen $x^2 - x - 1 = 0$, udover φ selv. Ved i udviklingen af en kaninpopulation at indføre, at kaniner først kan få unger efter to måneder, skabte Fibonacci altså en højst interessant talfølge. Hvis kaninerne kunne formere sig straks efter første måned, ville der blot være tale om en lidt "kedelig" eksponentiel vækst! En anden årsag til, at Fibonacci-tallene er blevet så berømte er, at de dukker op i så mange uvante situationer. Stamtræet fra en *drone* (hanbi) udvikler sig således efter en Fibonacci talfølge. Et andet eksempel er energitilstandene i en elektron (se [8]). Ikke nok med det: Fibonacci-tal genfindes i planter! Når blade gror på en kvist eller grene gror på en stamme, så gør de det på en måde, så der opnås optimal adgang til lys, regn og luft. Det ville for eksempel være uhensigtsmæssigt for grene at placere sig over hinanden. Typisk spiralerer de op langs stammen. At naturen således automatisk optimerer sine egne betingelser er fascinerende. Emnet hedder *fyllotaksi* eller *Phyllotaxis* på engelsk. Hos en solsikke består blomsterkurven af gule randblomster og i midten en mængde små mørke skiveblomster. Sidstnævnte danner et kompliceret spiralmønster, både mod højre og mod venstre, som indikeret med tre eksempler på figurerne nedenfor. Den spændende egenskab er, at antallet af højredrejede spiraler og venstredrejede spiraler altid er Fibonacci-tal! I dette tilfælde kan man tælle 55 venstredrejede spiraler og 34 højredrejede spiraler!





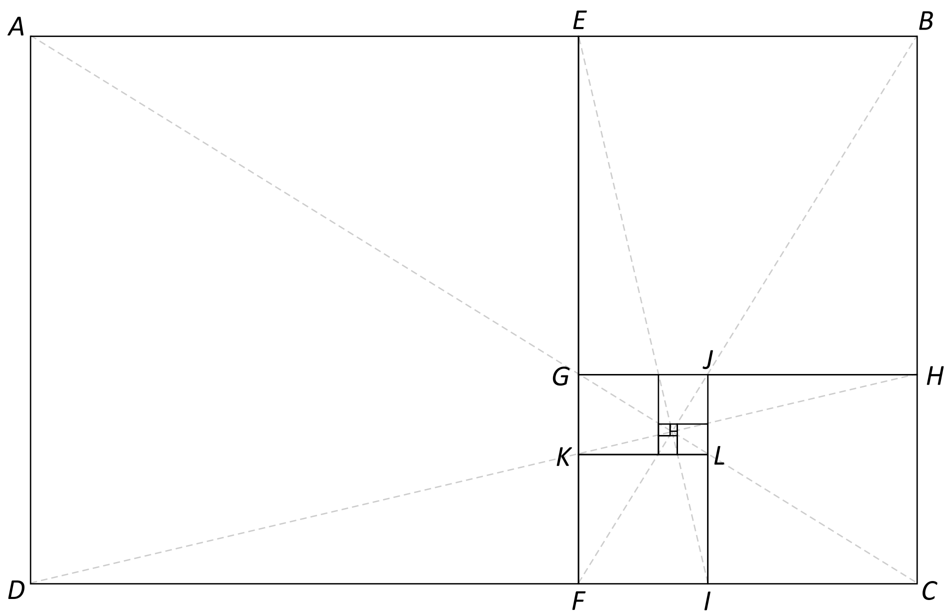
Øvelse 13

Søg efter billeder af solsikker på Internettet og tæl antallet af højredrejede og venstredrejede spiraler. Får du Fibonacci-tal?

Også hos ananas kan man se et lignende fænomen. Her er hvert af de hexagonale skæl på frugtens overflade faktisk en del af hele tre forskellige spiraler! Igen er antallet altid Fibonacci-tal! Vi skal ikke gå mere i detaljer med det her.

4. Det gyldne rektangel og den gyldne spiral

Et rektangel kaldes for et *gyldent rektangel*, hvis forholdet mellem dets sider er som $1:\varphi$. Det interessante er, at hvis man fjerner et kvadrat fra rektanglet, så er resten også et gyldent rektangel. Figuren viser det gyldne rektangel *ABCD*. Når kvadratet *AEFD* fjernes, er det tilbageværende rektangel *EBCF* altså også gyldent.

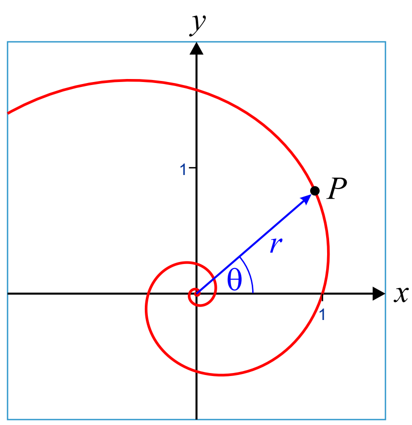


Vi kan fortsætte processen: Når kvadratet *EBHG* fjernes, er der et gyldent rektangel tilbage, nemlig *GHCF*, etc. Det viser sig, at diagonalerne, tegnet med svage grå stiplede linjer ovenfor, møder hinanden i samme punkt. De "fjernede kvadrater" vil nærme sig til dette punkt, når processen fortsættes i det uendelige.

Øvelse 14

Vis at når man fjerner et kvadrat fra et gyldent rektangel, så er der et gyldent rektangel tilbage. *Hjælp*: Kald den korte side for a. Så er den lange side $a\cdot\varphi$. Udnyt derefter egenskaben $\varphi = 1/(\varphi-1)$ for det gyldne snit.

Men der er også noget, som hedder den *gyldne spiral*. Spiralens ligning er nemmest at angive i *polære koordinater*, hvor den ser således ud:



(10) $$r = \varphi^{\frac{2\theta}{\pi}} \;,\quad \text{hvor } \varphi = 1,61803...$$

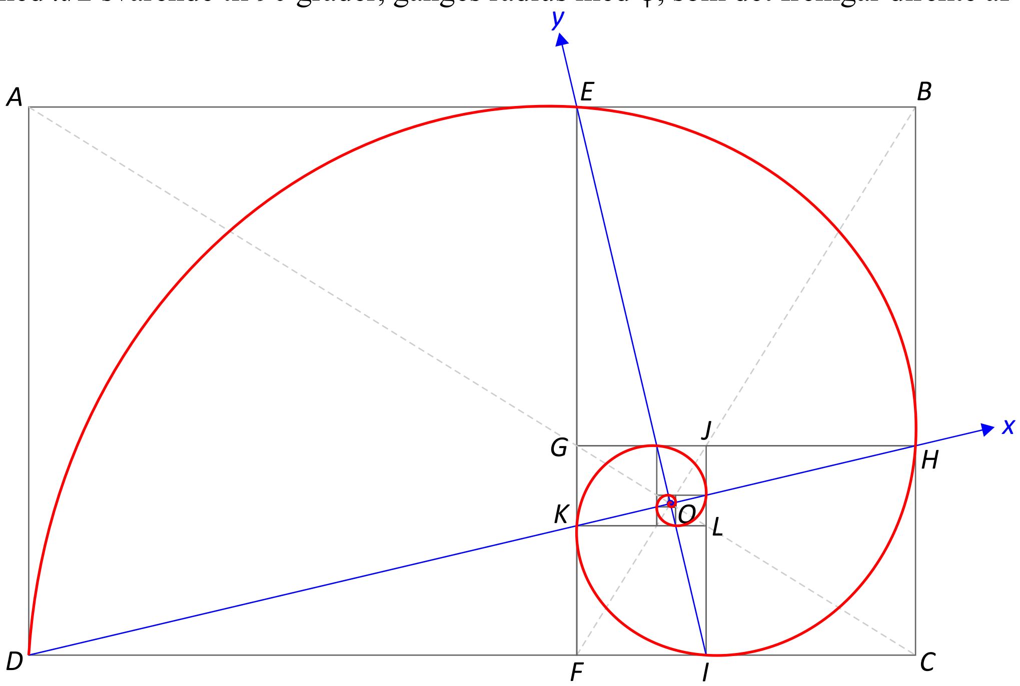
eller i almindelige rektangulære koordinater:

(11) $$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cdot\cos(\theta) \\ r\cdot\sin(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi^{2\theta/\pi}\cdot\cos(\theta) \\ \varphi^{2\theta/\pi}\cdot\sin(\theta) \end{pmatrix}$$

Øvelse 15

Brug et CAS-værktøj til at tegne banekurven for vektorfunktionen givet ved (11). Tegn kurven i området $-6\pi \leq \theta \leq 6\pi$. Du bør sikre dig, at der er samme skalering på begge akser, for at det ser realistisk ud.

Hvis man indtegner den gyldne spiral oveni figuren med gyldne rektangler på forrige side, på en måde, så de blå akser udgør det drejede koordinatsystem, så vil den gyldne spiral passere igennem hjørnerne i kvadraterne: … K, I, H, E, D, … Hver gang vinklen θ ændrer sig med $\pi/2$ svarende til 90 grader, ganges radius med φ, som det fremgår direkte af (10).



Den gyldne spiral *tangerer* imidlertid *ikke* de gyldne rektangler i de angivne punkter, som det ellers kunne se ud til. Den gyldne spiral er i øvrigt et specialtilfælde af en såkaldt *logaritmisk spiral*, som i polære koordinater har ligningen $r = a \cdot a^{b \cdot \theta}$. En logaritmisk spiral er *selvsimilær*, hvilket vil sige, at hvis man zoomer ind i spiralen, vil det se ud som en nøjagtig kopi af helheden. Tværsnittet af et *Nautilus*' sneglehus er approksimativt en logaritmisk spiral. Dog ikke en gylden spiral, som det undertiden fejlagtigt anføres.

5. Kunst

Le Corbusier er kunstnernavnet for den schweiziskfødte arkitekt, møbeldesigner, byplanlægger, forfatter, skulptør og kunstmaler Charles-Édouard Jeanneret-Gris (1887-1965). Han studerede det gyldne snit og brugte det i sine produktioner. Blandt andet har han skabt proportionssystemet *Modulor*, som han brugte som skala i mange af sine bygninger. The Modulor er et forsøg på at opdage størrelsesforhold i den menneskelige krop, inspireret af Leonardo da Vincis *Vitruvius* mand samt andre italienske renæssance kunstnere, herunder Leon Battista Alberti.

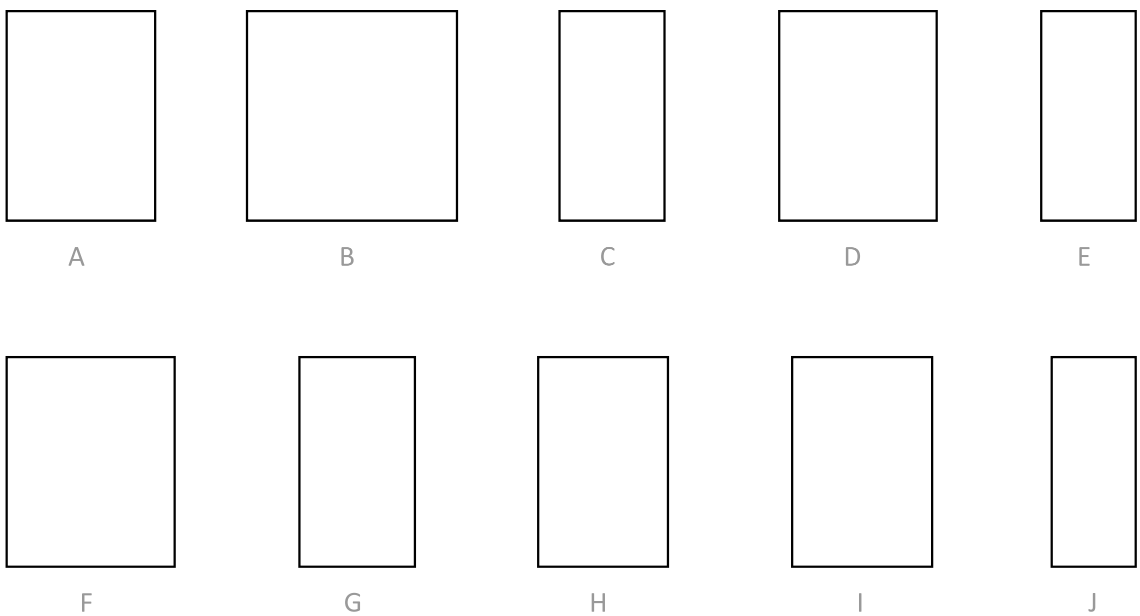
Øvelse 16

Søg på Internettet for information om Le Corbusier og hans Modulor Man. Hvor dukker Fibonacci-tallene og det gyldne snit op?

Øvelse 17

Den tyske æstetiker *Adolph Zeising* (1810-1876) udgav en række publikationer, hvori han påstod at meget i naturen, i velklingende musik og i de smukkeste arkitektoniske værker har proportioner efter det gyldne snit. En af grundlæggerne af den moderne psykologi, *Gustav Theodor Fechner* (1801-1887), gik i gang med at forsøge at verificere Zeisings påstande gennem spørgeundersøgelser, statistik og eksperimenter. Nogle gange faldt resultatet ud til fordel for teorien om, at det gyldne snit er det mest æstetiske. Andre gange var resultaterne tågede. Utallige forsøg har siden været udført, og der er ingen konklusion. Ofte bliver undersøgelserne kritiseret for ikke at ligestille alle udfald.

Nedenfor har denne artikels forfatter lavet sin egen lille test: Læseren opfordres til at vælge det rektangel, som forekommer at have de mest æstetiske proportioner. Om det så er det med det gyldne snits forhold kan ses på den allerbagerste side.



Opgave A (Forstå beviset for irrationaliteten af kvadratroden af 2)

Nedenfor gives et kortfattet bevis for, at $\sqrt{2}$ er et irrationalt tal. Der er tale om et såkaldt *modstridsbevis*. Forsøg at forstå hvert trin i argumentationen. Genfortæl for sidekammeraten eller en anden person, der måtte være tilstede.

Antag modsætningsvist, at $\sqrt{2}$ er et rationalt tal. Så kan tallet skrives som en brøk mellem hele tal a/b. Vi kan antage, at brøken er *uforkortelig* – ellers kan vi jo bare forkorte den i bund. Vi har da: $(a/b)^2 = a^2/b^2 = 2$ og dermed $a^2 = 2b^2$. Højresiden er et lige tal. Derfor må a også selv være et lige tal. Vi kan dermed skrive a på formen $a = 2c$, hvor c er et helt tal. Dermed haves $4c^2 = 2b^2$, hvilket er det samme som $2c^2 = b^2$. Analogt til det tidligere argument, er b derfor også nødt til at være et lige tal. Når både a og b er lige tal, kan brøken mellem dem forkortes med 2. Det er i modstrid med hvad vi antog fra starten, nemlig at brøken er uforkortelig.

□

Litteratur

[1] Jesper Lützen. *Cirklens kvadratur, Vinklens tredeling, Terningens fordobling. Fra oldtidens geometri til moderne algebra*. Systime, 1985.

[2] Jonny Schultz, Hans Sloth (redaktører). *Euklid: Elementer I-IV*. Forlaget TRIP, 1994 (Oversættelser af Euklids Elementer ved Thyra Eibe).

[3] Kirsti Andersen, Mikkel Vestergaard Laursen. *Ikke alle skæringer er gyldne*. En artikel i LMFK-bladet 4, 2011.

[4] Olaf Pedersen. *Matematik og Naturbeskrivelse i Oldtiden*. Akademisk forlag, 1980 (oprindeligt 1975).

[5] Asger Aaboe. *Episoder fra matematikkens historie*. 2. udgave. Borgens forlag, 1986.

[6] Victor J. Katz. *A History of Mathematics – An Introduction*. 3rd Edition, Addison-Wesley, 2009.

[7] A. Beutelspacher, B. Petri. *Der Goldene Schnitt*. 2. Auflage. Wissenschaftsverlag, 1995.

[8] Mario Livio. *The Golden Ratio – The Story of Phi, the World's Most Astonishing Number*. Broadway Books, 2002.

[9] Gary B. Meisner. *The Golden Ratio: The Divine Beauty of Mathematics*. Race Point Publishing, 2018.

[10] Scott Olsen. *The Golden Section: Nature's Greatest Secret*. Bloomsbury, 2006.

[11] Claus Glunk, Hanne E. Strand, Chr. Marinus Taisbak, Chr. Gorm Tortzen. *Q.E.D. Platon og Euklid tegner og fortæller*. Gyldendal 2006.

Øvelse 17 ovenfor: Forholdene mellem højde og bredde for rektanglerne: A) $\sqrt{2}:1$ (A4-format) B) 1:1 C) 2:1 D) 4:3 E) 20:9 F) 5:4 G) 20:11 H) φ:1 (Gyldne snit) I) 3:2 J) 5:2