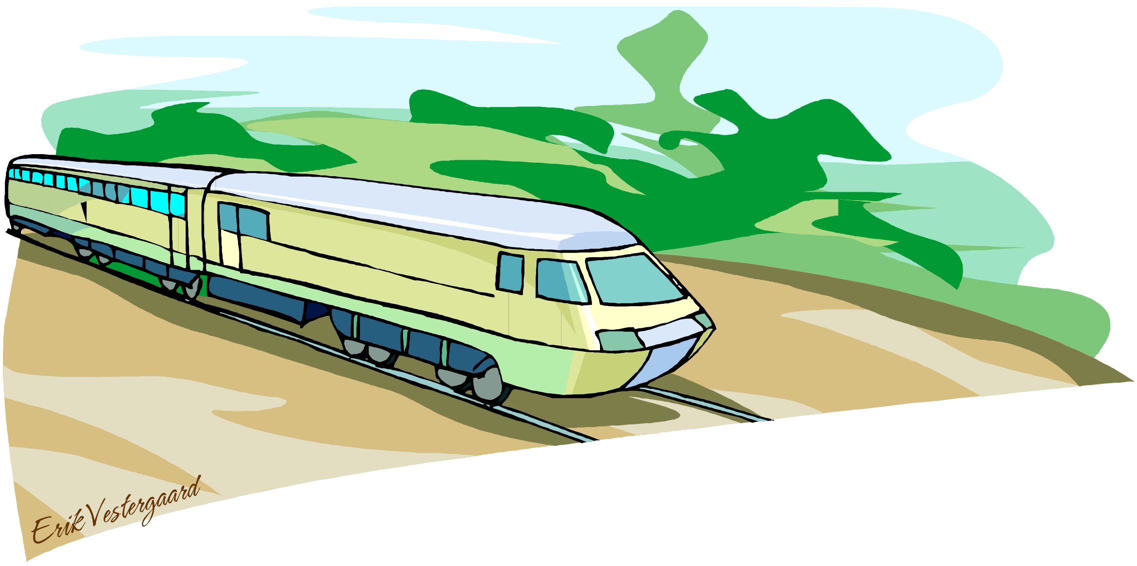
Lineære funktioner



Lineære funktioner

En vigtig type funktioner at studere er de såkaldte *lineære funktioner*. Vi skal udlede en række egenskaber for disse funktioner. Først en definition:

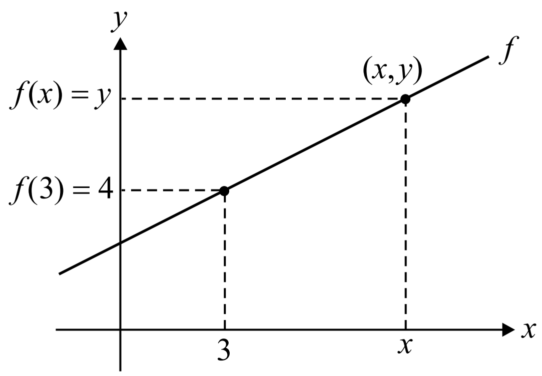
Definition 1

En *lineær funktion* er en funktion med forskriften $f(x) = ax + b$, hvor a og b er konstanter, dvs. faste tal. Undertiden vil vi også skrive $y = ax + b$.

Husk at der er underforstået et gangetegn imellem a og den variable x. a kaldes *hældningskoefficienten* og b kaldes *konstantleddet*. Hvis man tegner grafen for en lineær funktion, vil man se, at det giver en ret linje. Vi vil dog ikke bevise denne påstand her.

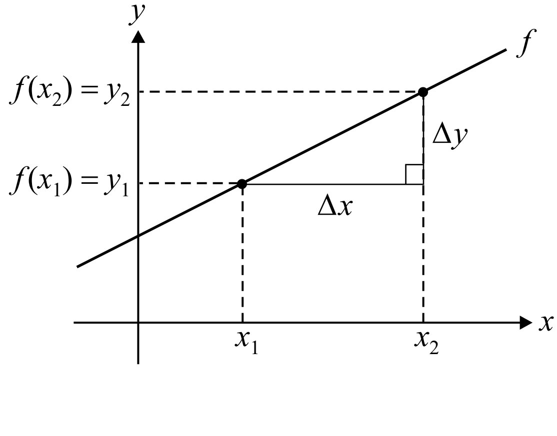
Til enhver x-værdi svarer en bestemt *funktionsværdi* $f(x)$, også kaldet y-værdien. Denne y-værdi fås ved at indsætte x-værdien i forskriften for f. Punktet (x, y) er et punkt på *grafen* for f. På figuren nedenfor er afbildet grafen for en funktion f, og vi ser, at funktionsværdien i 3 er lig med 4. Dette skriver vi $f(3) = 4$.

Figur 1



Når vi ændrer en x-værdi, siger vi, at vi giver x-værdien en *tilvækst*, og den betegnes ofte med Δx. Hvis x for eksempel ændres fra 30 til 35, så har x fået en tilvækst på $\Delta x = 35 - 30 = 5$. Hvis x ændres fra 8 til 5, så har x fået en tilvækst på $\Delta x = 5 - 8 = -3$, altså en negativ tilvækst. På nøjagtig samme måde kan vi tale om tilvækster Δy for den variable y. På figur 2 nedenfor har vi givet x_1 en tilvækst på $\Delta x = x_2 - x_1$ og kan se, at det resulterer i en y-tilvækst på $\Delta y = y_2 - y_1$.

Figur 2



Lad os udlede nogle egenskaber for lineære funktioner.

Sætning 2

Lad f være en lineær funktion.

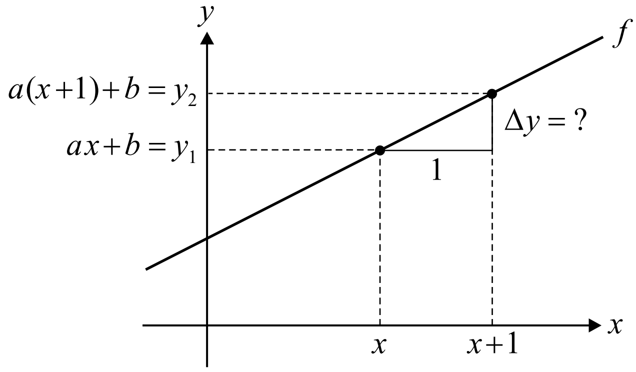
a) Grafen for den lineære funktion skærer y-aksen i b.
b) Hvis man øger x-værdien med 1, så øges y-værdien med a.

Bevis: a) Punkter på y-aksen er karakteriseret ved at x-koordinaten er 0 her, så vi indsætter simpelthen $x=0$ i forskriften: $y=a\cdot 0+b=0+b=b$, hvormed den første påstand er vist. b) Vi starter et vilkårligt sted x på førsteaksen. Den tilhørende y-værdi er naturligvis $y_1=ax+b$. Herefter øger vi x-værdien med 1, så vi får $x+1$. Indsættes denne værdi på x's plads i forskriften, fås den nye y-værdi: $y_2=a(x+1)+b=ax+a+b$, efter at have ganget ind i parentesen. Forskellen i y-værdi er:

(1) $$y_2-y_1 \;=\; (ax+a+b)-(ax+b)=ax+a+b-ax-b=a$$

så $\Delta y=y_2-y_1=a$ og det ønskede er vist.

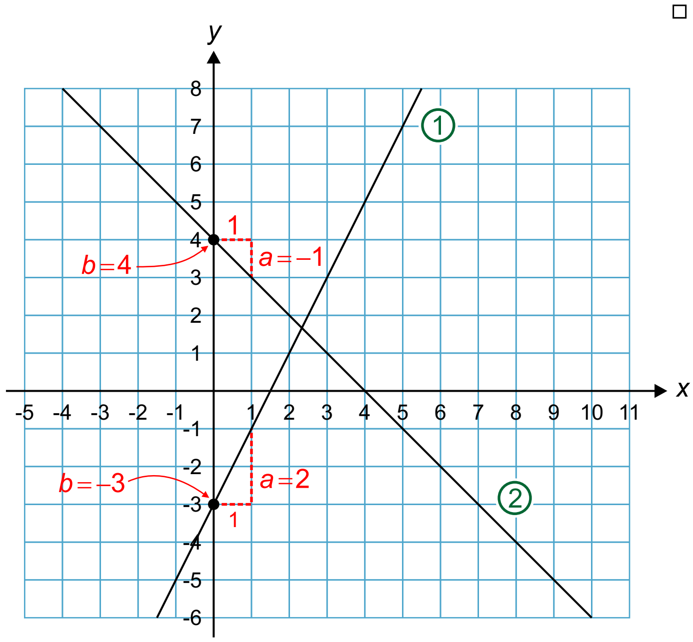
Figur 3



□

Eksempel 3

På figur 4 til højre ses graferne for to lineære funktioner. Graf 1 skærer y-aksen i -3 og når x øges med 1, så øges y med 2. Derfor er $y=2x-3$ den tilhørende forskrift, ifølge sætning 2. Tilsvarende fås at graf 2 er graf for den lineære funktion med forskrift $y=-x+4$. Der er tale om en negativ hældning på -1 i sidstnævnte tilfælde.



Nu til en sætning, der fortæller hvordan man kan finde hældningskoefficienten, når man kender to punkter på grafen for den lineære funktion.

Sætning 4

Antag givet to punkter (x_1, y_1) og (x_2, y_2) på grafen for en lineær funktion *f*. Da er hældningskoefficienten givet ved:

(2) $$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Bevis: Da (x_1, y_1) ligger på grafen for *f*, så passer det med, at hvis man indsætter x_1 på *x*'s plads i forskriften, så får man y_1. Tilsvarende med det andet punkt:

(3) $$\begin{aligned} y_1 &= ax_1 + b \\ y_2 &= ax_2 + b \end{aligned}$$

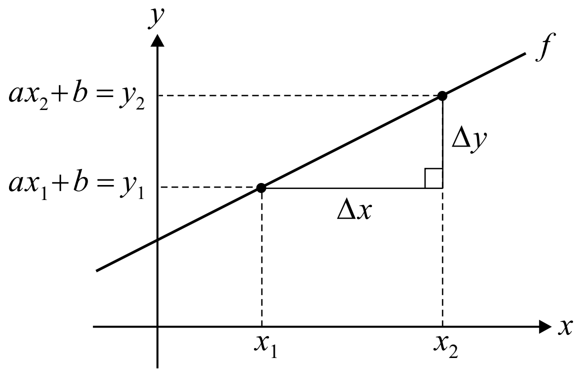
Man kunne da finde på at trække de to ligninger fra hinanden:

(4) $$y_2 - y_1 = (ax_2 + b) - (ax_1 + b) = ax_2 + b - ax_1 - b = ax_2 - ax_1 = a(x_2 - x_1)$$

Det gode er at den ubekendte *b* forsvinder, så der kun er én ubekendt *a*, som vi dermed kan bestemme. Det sker ved at dividere med $(x_2 - x_1)$ på begge sider af lighedstegnet:

(5) $$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Figur 5



□

Vi skal se et eksempel på en opgave, der både kan løses ved *beregning* og ved *aflæsning*. Sidstnævnte kaldes også *grafisk løsning*. Førstnævnte er som regel det mest præcise, da grafisk løsning beror på et skøn.

Eksempel 5

Grafen for en lineær funktion *f* går gennem $(x_1, y_1) = (-2,1)$ og $(x_2, y_2) = (4,4)$.

a) Bestem forskriften for den lineære funktion.

b) Bestem funktionsværdien i 3,5, altså bestem $f(3,5)$.

c) Løs ligningen $f(x) = 0,5$, dvs. find *x* når $y = 0,5$.

Løsning ved beregning:

a) Forskriften for en lineær funktion er $y = ax + b$. Vi starter med at bestemme hældningskoefficienten a via formel (2) i sætning 4:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4-1}{4-(-2)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Vi mangler at bestemme konstantleddet b. Derfor *isolerer* vi b i forskriften for den lineære funktion: $b = y - ax$ og indsætter derefter den netop beregnede værdi for a samt et *vilkårligt* af de to opgivne punkter. Vi vælger $(-2,1)$, dvs. –2 indsættes på x's plads og 1 på y's plads:

$$b = y - ax = 1 - \tfrac{1}{2}\cdot(-2) = 1+1 = 2$$

Værdierne $a = \frac{1}{2}$ og $b = 2$ indsættes nu i udtrykket for linjens forskrift og man får: $y = \frac{1}{2}x + 2$ eller $f(x) = \frac{1}{2}x + 2$, om man vil.

b) Da forskriften nu er fundet, kan funktionsværdien i 3,5 bestemmes ved indsættelse af 3,5 på x's plads: $f(3{,}5) = \frac{1}{2}\cdot 3{,}5 + 2 = 3{,}75$. Så y-værdien er altså 3,75.

c) Mens vi i spørgsmål b) kendte x og skulle finde y, så er det her omvendt: Vi ved, at $y = f(x) = 0{,}5$. Vi indsætter denne værdi på y's plads i forskriften og løser for x:

$$y = 0{,}5 \;\Leftrightarrow\; 0{,}5 = \tfrac{1}{2}x + 2 \;\Leftrightarrow\; 0{,}5 - 2 = \tfrac{1}{2}x \;\Leftrightarrow\; -1{,}5 = \tfrac{1}{2}x \;\Leftrightarrow\; -3 = x$$

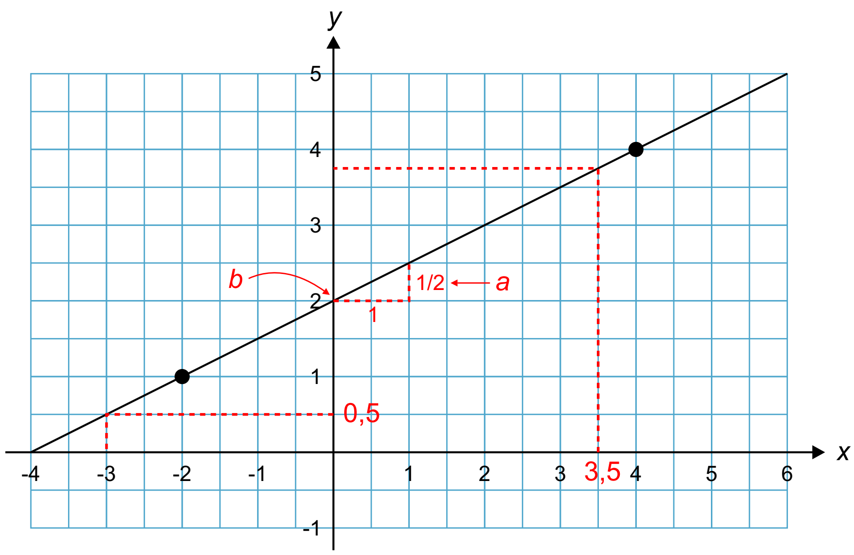
Så løsningen er altså $x = -3$.

□

Løsning ved aflæsning (*grafisk løsning*):

Hvis man blev bedt om at løse opgaverne *grafisk*, så kunne man gøre det på følgende måde: De to punkter $(-2,1)$ og $(4,4)$ indtegnes i et koordinatsystem og linjen igennem punkterne tegnes, som vist på figur 6.

Figur 6



Herefter:

a) Hældningskoefficienten a findes ved at undersøge, hvor meget en tilvækst på 1 på x-aksen giver i y-tilvækst. Det passer med at $a = \frac{1}{2}$, som vist på figuren. Konstantleddet b findes som skæringen med y-aksen, her 2. Derfor er forskriften, også kaldet x-y-sammenhængen, givet ved $y = \frac{1}{2}x + 2$.
b) Funktionsværdien i 3,5 fås ved at gå hen til 3,5 på x-aksen, op til grafen og hen til y-aksen. Det giver rimeligt nok $y = 3,75$. Man skriver: $f(3,5) = 3,75$.
c) Løsningen til ligningen $f(x) = 0,5$ eller $y = 0,5$ fås ved at gå op til 0,5 på y-aksen, vandret ud til grafen og lodret ned på x-aksen. Det givet $x = -3$. Vi skriver følgende: $f(x) = 0,5 \iff x = 3$.

Husk altid at markere aflæsninger på grafen, for eksempel med stiplede linjer!

□

Bemærkning 6

Idet $\Delta x = x_2 - x_1$ og $\Delta y = y_2 - y_1$ kan formel (2) i sætning 4 skrives:

(6) $$a = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

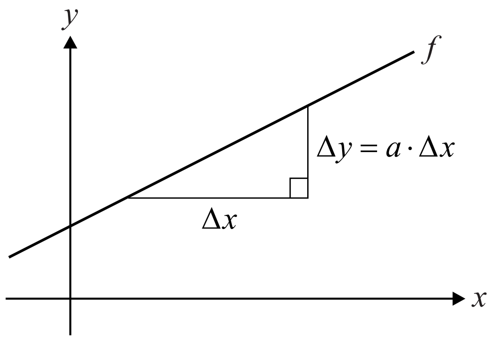
Hældningskoefficienten fås altså ved at dividere y-tilvæksten med x-tilvæksten!

Sætning 7

For en lineær funktion gælder, at hvis x gives en x-tilvækst på Δx, så får y en tilvækst på $\Delta y = a \cdot \Delta x$.

Bevis: Fremgår direkte af bemærkning 6 ved at gange med Δx på begge sider af (6).

Figur 7

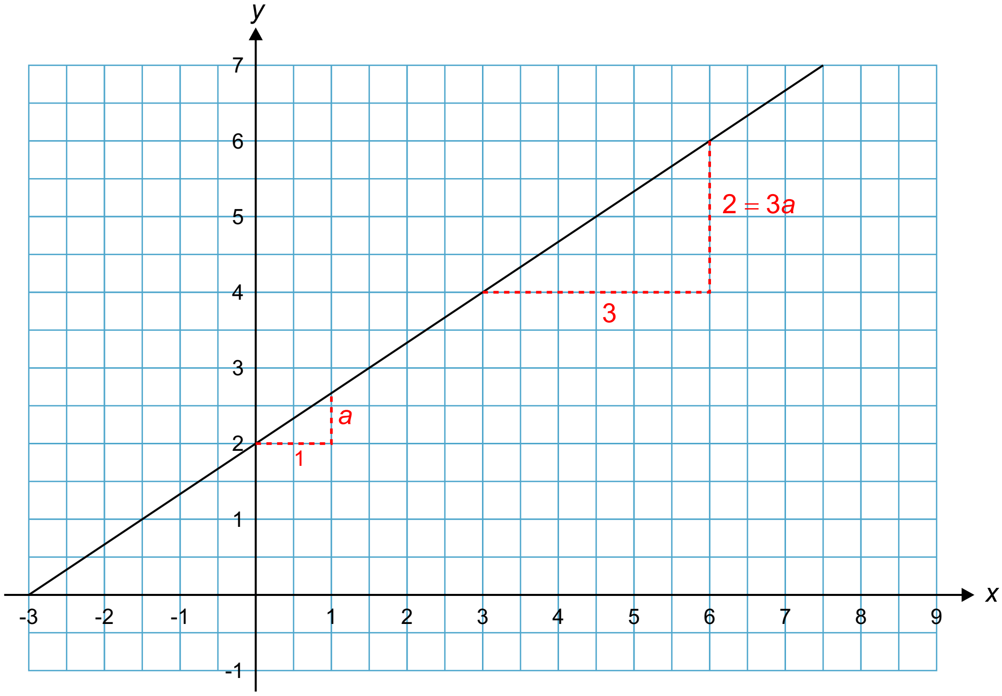


□

Eksempel 8

På figuren nedenfor ser vi, at det er svært at se præcist, hvor stor y-tilvæksten er, når x-tilvæksten er 1. Foretager man derimod en x-tilvækst på 3, så ses det, at det resulterer i en y-tilvækst på 2. Ifølge ovenstående betyder det, at hældningen er $a = \Delta y / \Delta x = 2/3$.

Figur 8



Ovenstående resultat kan i øvrigt også indses ved anvendelse af teorien for *ensvinklede trekanter* (Overvej). I eksemplet ovenfor er forstørrelsesfaktoren lig med 3.

Eksempel 9 (Om tilvækster)

Udover at se på tilvækster på en graf, så kan vi også gøre det i en støttepunktstabel. Tabellen nedenfor indeholder to funktionsværdier for en lineær funktion *f*. Vi skal bestemme de manglende funktionsværdier i skemaet.

x	−2	−1	0	2	5
y		3	5		

For det første observerer vi, at når x øges med 1, så øges y med 2. Ifølge sætning 7 vil en tilvækst på 2, som er det dobbelte af 1, derfor resultere i en dobbelt så stor y-tilvækst, dvs. 4. Efter lignende argumenter for resten af tabellen, fås:

− 1 + 1 + 2 + 3

x	−2	−1	0	2	5
y	1	3	5	9	15

− 2 + 2 + 4 + 6

Da en x-tilvækst på 1 giver en y-tilvækst på 2, har vi straks, at hældningen er $a = 2$, og endvidere har vi $b = f(0) = 5$, så forskriften er $y = 2x + 5$.

□

Eksempel 10 (Tegne grafen ud fra forskriften)

Lad os sige, at vi skal tegne grafen for $f(x)=1{,}5x+1$, altså $y=1{,}5x+1$. Vi skal se to måder at løse opgaven på:

Løsning 1: Man kan indsætte to *x*-værdier i forskriften for at få to punkter på grafen:

$$f(-1) \;=\; 1{,}5\cdot(-1)+1 \;=\; -1{,}5+1 \;=\; -0{,}5$$

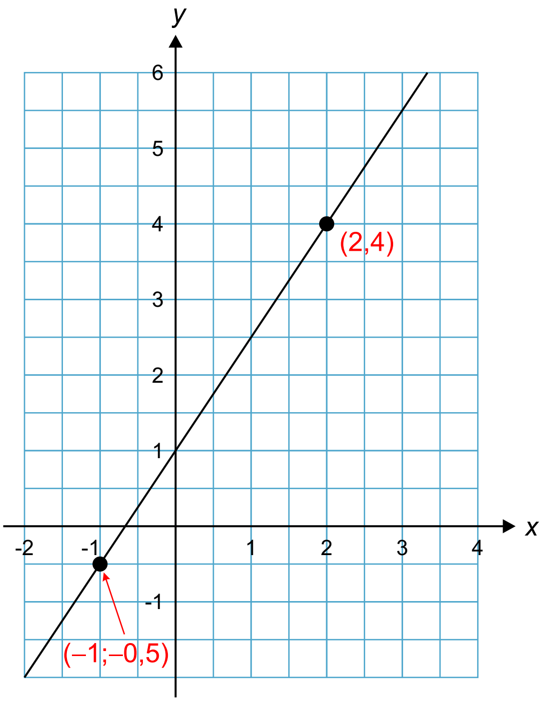
$$f(2) \;=\; 1{,}5\cdot 2+1 \;=\; 3+1 \;=\; 4$$

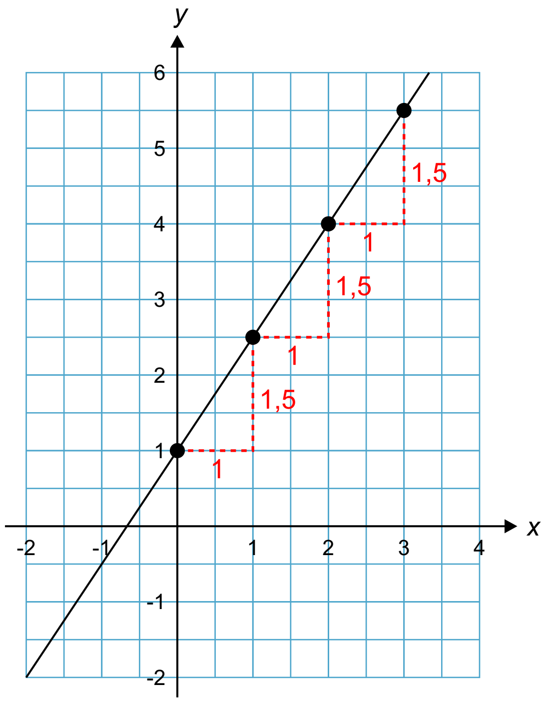
x	–1	2
y	–0,5	4

Da vi ved, at grafen er en ret linje, er der ingen grund til at udregne flere støttepunkter. Vi kan afsætte punkterne i et koordinatsystem og tegne linjen igennem dem. Resultatet ses på figur 9 nedenfor.

Løsning 2: Af forskriften $y=1{,}5x+1$ aflæser vi direkte, at linjen skærer *y*-aksen i $b=1$. Derfor har vi punktet $(0,1)$ at starte i. Da hældningskoefficienten for den lineære funktion er $a=1{,}5$, ved vi, at hver gang vi går 1 til højre, skal vi gå 1,5 opad. Det giver det andet punkt $(1;2{,}5)$. Egentligt er det nok med disse to punkter, men for at kunne tegne linjen mere nøjagtigt med linealen kan det være fornuftigt at finde flere punkter via ovenstående regel, at når man går 1 til højre, skal man gå 1,5 opad. Resultatet ses på figur 10.

Figur 9 og 10





Eksempel 11 (Proportionalitet)

Hvis b-leddet er 0, så siges den lineære funktion at være en *proportionalitet*, og man siger da, at *y er proportional med x*: $f(x) = ax$ eller $y = ax$. I dette tilfælde gælder den egenskab, at hvis x fordobles, so fordobles også y. Mere generelt gælder der, at hvis x bliver k gange så stor, så bliver y også k gange så stor.

Eksempel 12 (Ligningsløsning ved beregning)

Lad $f(x) = \frac{4}{3}x - 1$ og $g(x) = -\frac{1}{2}x + 2$. Løs ligningen $f(x) = g(x)$ ved beregning.

Løsning: Vi sætter funktionsudtrykkene lig med hinanden og løser for x. Udregningerne følger på næste side.

$$f(x) = g(x) \quad \Leftrightarrow \quad \tfrac{4}{3}x - 1 = -\tfrac{1}{2}x + 2 \quad \Leftrightarrow \quad \tfrac{4}{3}x + \tfrac{1}{2}x = 2 + 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \tfrac{8}{6}x + \tfrac{3}{6}x = 3 \quad \Leftrightarrow \quad \tfrac{11}{6}x = 3 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{3}{\frac{11}{6}} = 3 \cdot \tfrac{6}{11} = \tfrac{18}{11} = 1\tfrac{7}{11}$$

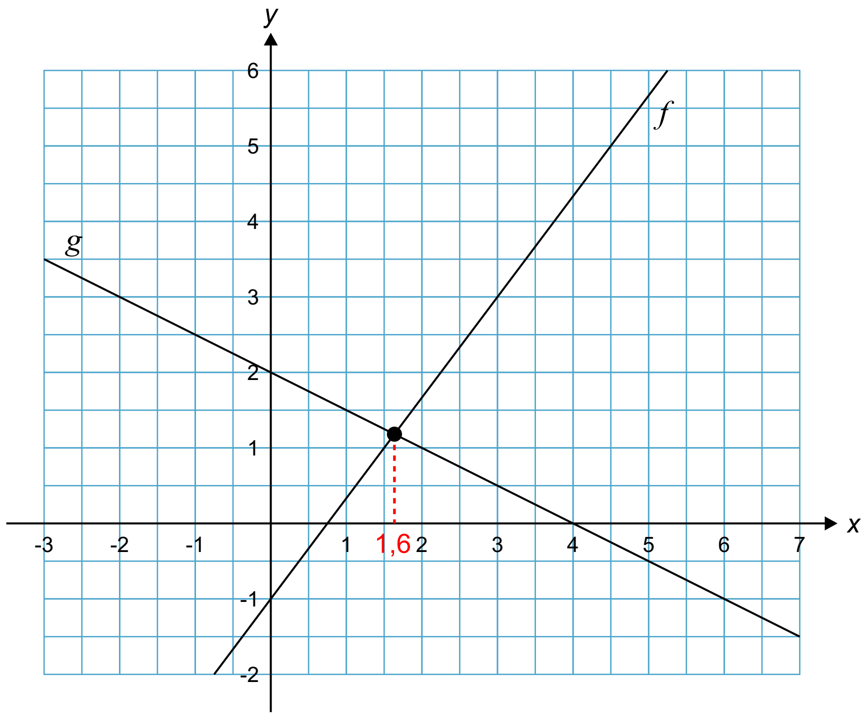
Så løsningen til ligningen er altså $x = 1\frac{7}{11}$.

□

Eksempel 13 (Grafisk ligningsløsning)

En anden mulighed end beregning er af løse ligningen fra eksempel 12 *grafisk*. Her tegner man graferne for de to lineære funktioner i samme koordinatsystem og finder skæringspunktet mellem dem. x-koordinaten til dette skæringspunkt er løsningen. På figur 11 er løsningen $x = 1{,}6$ markeret ved en stiplet linje. Bemærk, at man ikke altid kan forvente, at en grafisk løsning er en *eksakt* løsning. Vi fik $x = 1{,}6$, mens den eksakte løsning er $x = 1\frac{7}{11} \approx 1{,}636$. Små afvigelser accepteres ved grafisk løsning!

Figur 11



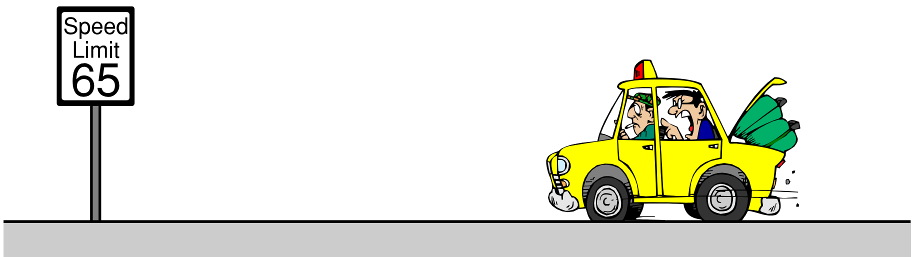
Lineære modeller

Ikke så sjældent kan lineære funktioner benyttes til at beskrive og forudsige forhold i den praktiske verden. Vi skal i det følgende betragte to eksempler. Det første er en taxiregning og det andet er et fysikforsøg, hvor man måler på trykket i en gasflaske, når den opvarmes.

Eksempel 14 (Taxi-regning)

En taxi-chauffør tager 30 kr. i starttakst og 11 kr. pr. kørt km. På grundlag af denne oplysning kan vi uden videre opstille et udtryk for taxi-regningen som funktion af antal kørt km. Den bliver $y = 11x + 30$, hvor x er antal kørte km og y betegner taxi-regningen i kr. Begrundelse for udtrykket: Skæringen med y-aksen skal være 30, fordi dette svarer til, at $x = 0$, altså prisen før der overhovedet er kørt. Hældningskoefficienten skal være 11, fordi hældningskoefficienten jo netop svarer til y-tilvæksten svarende til en x-tilvækst på 1, hvilket jo her er den ekstra pris der skal betales, når der køres 1 ekstra km! Modellen kan benyttes til at besvare nogle spørgsmål:

a) Hvor stor er taxi-regningen, når der køres 8 km?
b) Hvor langt kan man køre for 100 kr?



Løsning:

a) Vi sætter 8 ind på x's plads i forskriften: $y = 11x + 30 = 11 \cdot 8 + 30 = 118$, dvs. prisen er 118 kr.

b) Her kender vi prisen, dvs. $y = 100$. Det giver anledning til ligningen:

$$100 = 11x + 30 \Leftrightarrow 100 - 30 = 11x \Leftrightarrow 70 = 11x \Leftrightarrow \frac{70}{11} = x \Leftrightarrow 6{,}4 \approx x$$

så svaret er altså, at man kan køre ca. 6,4 km for 100 kr.

Bemærk, at mange modeller ikke tager højde for alle forhold. Heller ikke denne model: Taxameteret tæller nemlig også, mens taxien holder stille i lyskryds. Det vil føre for vidt at forsøge at tage hensyn til dette forhold i denne note.

I modellen i eksempel 14 kunne vi opstille en forskrift for den lineære funktion ud fra nogle få oplysninger. I andre tilfælde skal man forsøge at opstille en lineær model, som tilnærmer resultaterne af en serie målinger. Sidstnævnte skal vi se et eksempel på.

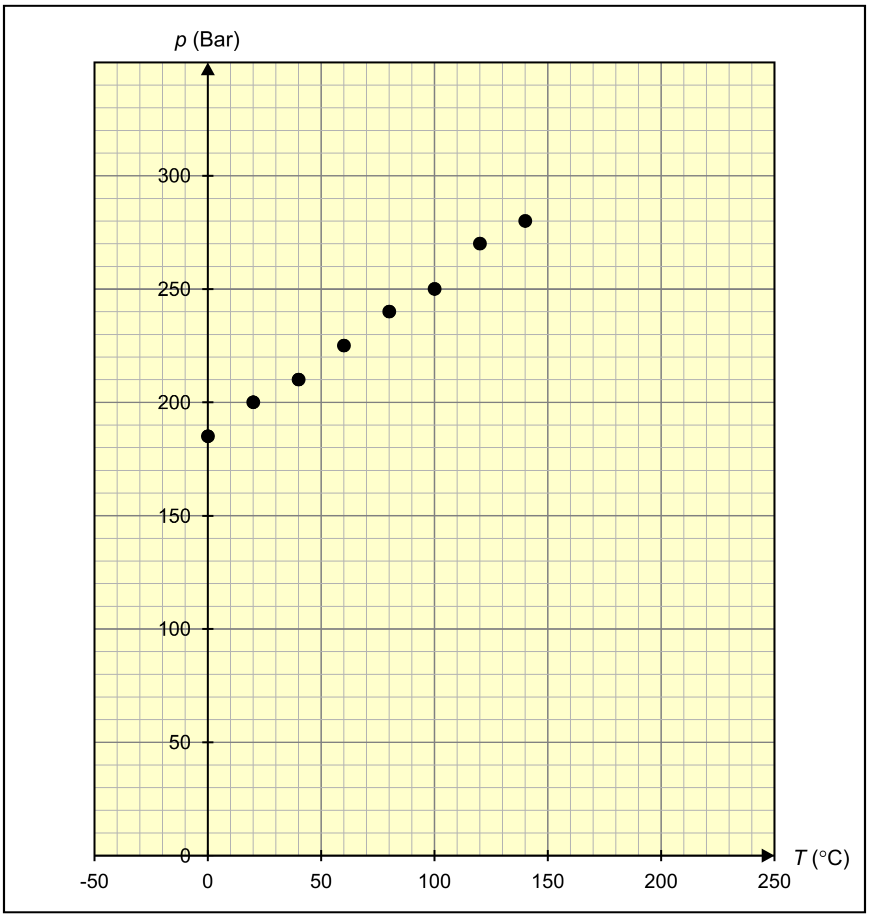
Eksempel 15 (Lineær regression)

Når man opvarmer en gasflaske indeholdende en gas, så stiger gassens tryk. En tekniker målte sammenhørende værdier mellem temperaturen T i °C og trykket p i Bar for en bestemt gasflaske med oxygen:

T (°C)	0	20	40	60	80	100	120	140
p (Bar)	185	200	210	225	240	250	270	280

Punkterne blev afsat i et koordinatsystem med temperaturen T hen ad x-aksen og trykket p opad y-aksen for at se, om der var et system i dataene:

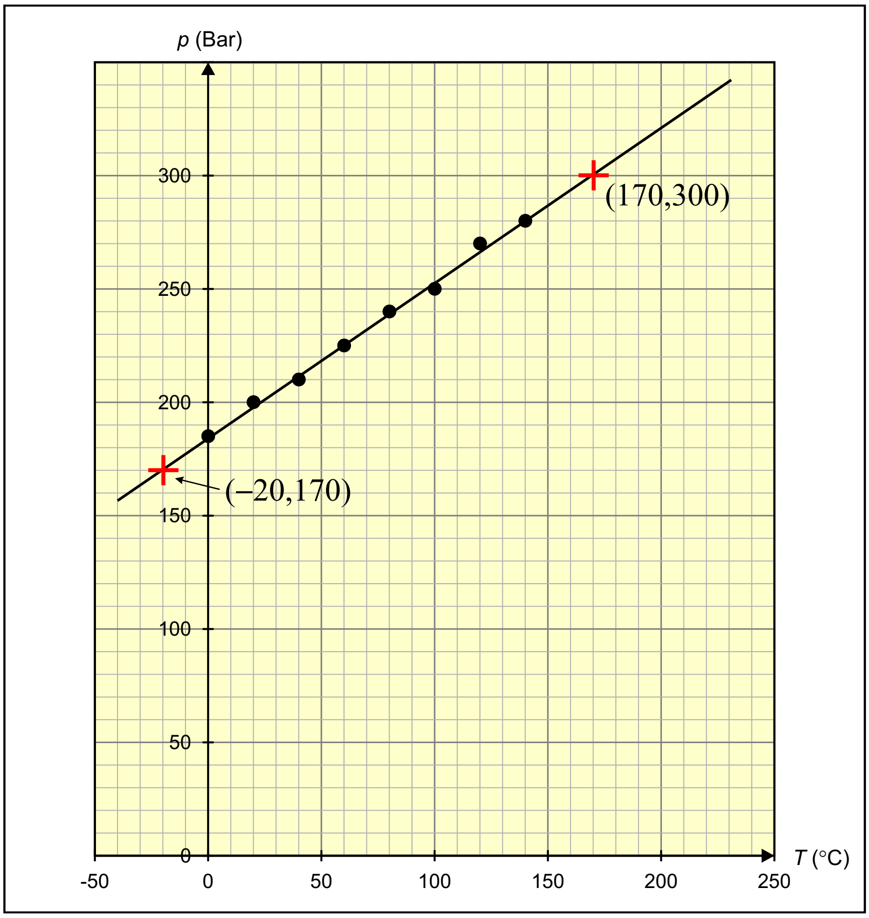
Figur 12



Man ser tydeligt, at der er tale om en *lineær sammenhæng*. Derfor lægger vi den linje ind, som tilnærmer punkterne bedst muligt. Denne linje kaldes med et fint ord for en *regressionslinje* og processen kaldes for *lineær regression*. Linjen kan ikke komme til at gå igennem alle datapunkterne, da de ikke ligger helt på linje. Det er normalt, at fysiske målinger har unøjagtigheder, men vi slutter alligevel, at der er tale om en lineær sammenhæng. Regressionslinjen kan benyttes til at forudsige, hvad trykket vil være for andre temperaturer, end dem, som figurerer i datalisten. Man skal dog være opmærksom på, at fordi x-y-sammenhængen i et vist interval ser ud til at være lineær, så behøver den ikke være det udenfor dette interval. Der kan være forhold, som taler for, at noget ændrer sig. I dette tilfælde vurderes det dog, at tendensen fra målingerne fortsætter. Det betyder, at vi for eksempel kan opstille *prognoser* ud fra regressionslinjen.

a) Bestem en forskrift for regressionslinjen.
b) Benyt regressionslinjen til at forudsige trykket, når temperaturen er 110°C.
c) Gasflasken er garanteret at kunne modstå et tryk på 320 Bar. Hvor meget må temperaturen højst være, for at gasflasken ikke er i fare for at eksplodere?
d) Hvad fortæller regressionslinjens hældningskoefficient og konstantled noget om?
e) Hvor meget vokser trykket med, når temperaturen vokser med 10 grader?

Figur 13



Løsninger:

Man kan få lommeregneren til at udregne regressionslinjen, men her vil vi blot lægge regressionslinjen ind pr. øjemål, så der både ligger punkter over og under linjen, og så linjen tilnærmer punkterne pænt. Dette er gjort på figur 13.

a) For at finde forskriften vælges to punkter, som ligger *præcist* på linjen. Bemærk, at man *ikke* bør vælge punkter fra datalisten, for hvis disse to punkter ikke ligger præcist på regressionslinjen, så er det jo en forkert linje, man regner på! På figur 13 er valgt to punkter – markeret med røde kors – som ligger et stykke fra hinanden, for at minimere usikkerheden: $(-20,170)$ og $(170,300)$, underforstået med de rigtige enheder. Som hældning fås:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{300 - 170}{170 - (-20)} = 0,6842$$

Vi kan indsætte denne værdi for a i linjens udtryk: $y = ax + b$, så vi indtil videre har, at $y = 0,6842x + b$. Det ukendte b-led findes som sædvanligt ved indsættelse af et vilkårligt af de to punkter, fx (170,300):

$$b = y - a \cdot x = 300 - 0,6842 \cdot 170 = 183,7$$

således, at den ønskede forskrift er $y = 0,6842x + 183,7$.

b) Temperaturen er 110°C, dvs. $x = 110$. Denne værdi indsættes i forskriften:

$$y = 0,6842x + 183,7 = 0,6842 \cdot 110 + 183,7 = 259,0$$

Så trykket ved 110°C er altså 259,0 Bar.

c) Trykket er 320 Bar, dvs. $y = 320$. Denne værdi indsættes i forskriften og x findes:

$$y = 0,6842x + 183,7 \quad \Leftrightarrow \quad 320 = 0,6842x + 183,7 \quad \Leftrightarrow \quad 320 - 183,7 = 0,6842x$$

$$\Leftrightarrow \quad 136,3 = 0,6842x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{136,3}{0,6842} = x \quad \Leftrightarrow \quad 199,2 = x$$

så svaret er altså, at gasflasken har et tryk på 320 Bar, når temperaturen er 199,2°C, som altså er den temperatur, som man skal holde sig under af sikkerhedsmæssige grunde.

d) Hældningskoefficienten a er jo pr. definition det stykke, regnet med fortegn, som y øges med, når x øges med 1. I dette tilfælde bliver det altså det, som trykket vokser med, når temperaturen vokser med 1 grad! Vi har altså, at trykket stiger med 0,6842 Bar, hver gang temperaturen vokser med 1°C. b-leddet er skæringen med y-aksen, altså y-værdien svarende til $x = 0$. Derfor er b-leddet her trykket ved frysepunktet, altså 0°C.

e) Her udnytter vi sætning 7:

$$\Delta y = a \cdot \Delta x = 0,6842 \cdot 10 = 6,842$$

så trykket stiger altså med 6,842 Bar, hver gang temperaturen vokser med 10°C.

□

Opgaver

Hvis en opgave er mærket med en * vurderes den til at være lidt sværere.

Opgave 1

Hver af delfigurerne (a) til (f) på figur 14 indeholder grafen for en lineær funktion *f*.

a) Aflæs forskriften for *f* i hvert af de seks tilfælde.
b) På delfigur (a): Bestem funktionsværdierne i –1 og 3.
c) På delfigur (b): Aflæs $f(0)$ og $f(2,5)$.
d) På delfigur (c): Aflæs $f(3)$ og $f(0,5)$.
e) På delfigur (d): Løs ligningerne $f(x)=1$ og $f(x)=2$ grafisk.
f) På delfigur (e): Løs ligningen $f(x)=1$ grafisk.
g) På delfigur (f): Løs ligningerne $f(x)=1$ og $f(x)=1,75$ grafisk.

Opgave 2

Hver af delfigurerne (a) til (f) på figur 15 indeholder grafen for en lineær funktion *f*.

a) Aflæs forskriften for *f* i hvert af de seks tilfælde.
b) Bestem funktionsværdien $f(1)$ i hvert af de seks tilfælde.
c) Løs ligningen $f(x)=-1$ i hvert af de seks tilfælde.

Opgave 3

Vi har følgende *x*-*y*-sammenhæng: $y=2x+1$.

a) Beregn *y*, når $x=2$
b) Beregn *y*, når $x=-1,5$
c) Beregn *x*, når $y=13$

Opgave 4

En lineær funktion er givet ved $f(x)=-2x+6$

a) Beregn funktionsværdierne $f(0)$, $f(1)$ og $f(-3)$.
b) Løs ligningerne $f(x)=10$, $f(x)=0$ og $f(x)=17$ ved beregning.
c) Hvor stor er *y*-tilvæksten, når *x*-tilvæksten er 2?

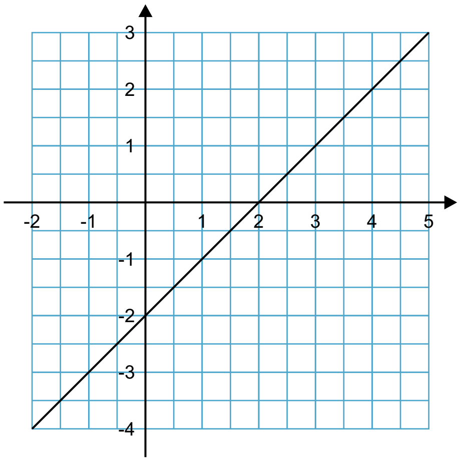
Opgave 5

Tegn graferne for nedenstående lineære sammenhænge:

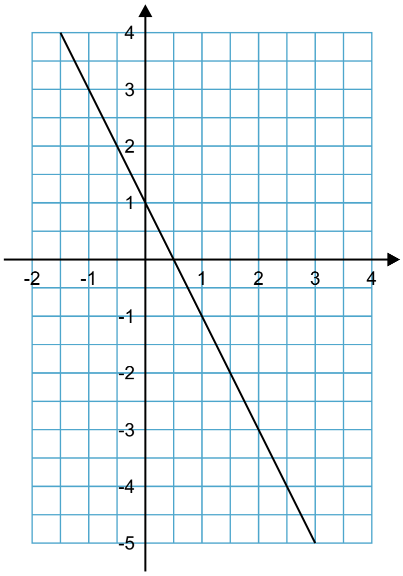
a)	$y=2x-4$	d)	$f(x)=-1,5x+5$
b)	$y=\frac{1}{2}x+1$	e)	$y=0,38x+3,63$
c)	$y=\frac{1}{3}x$	f)	$f(x)=34x-56$

Figur 14

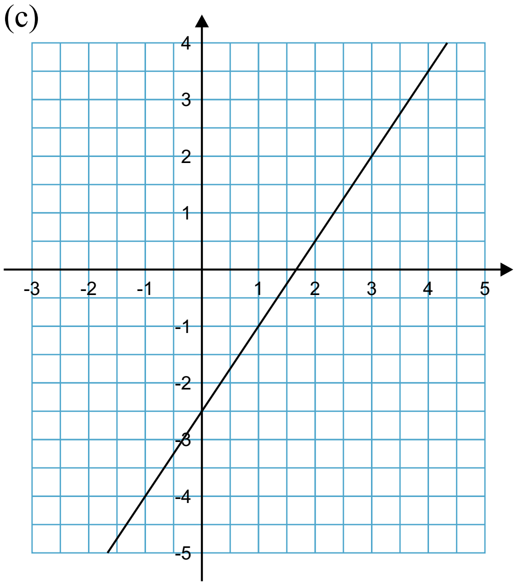
(a)



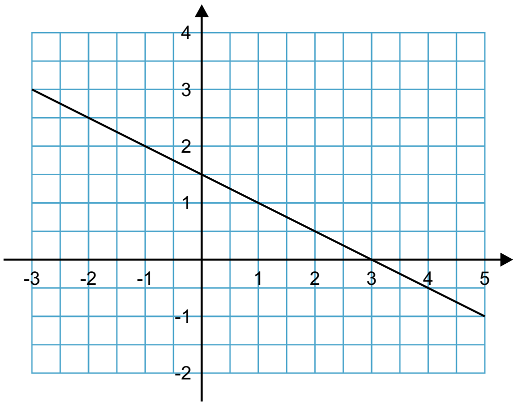
(b)



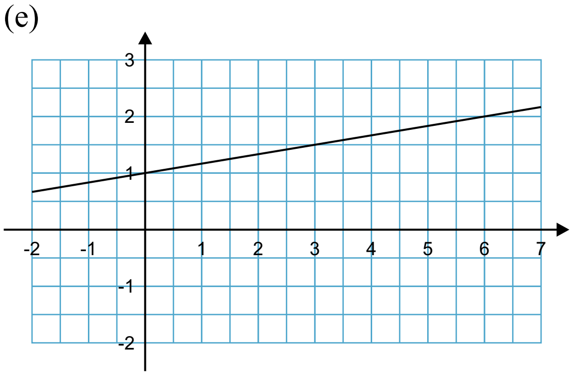
(c)



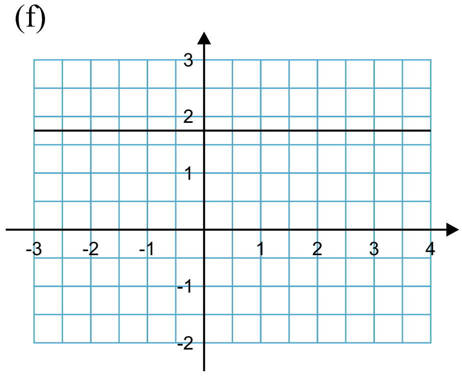
(d)



(e)

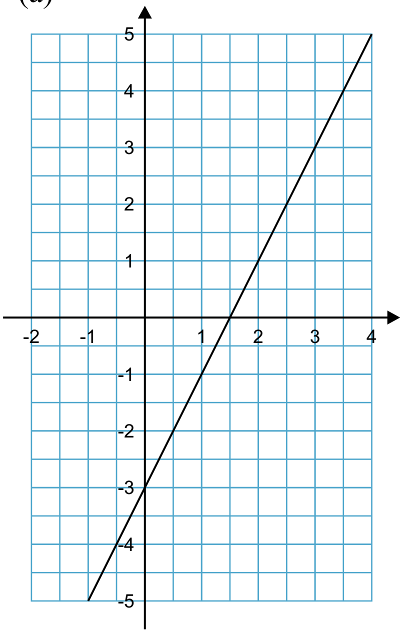


(f)

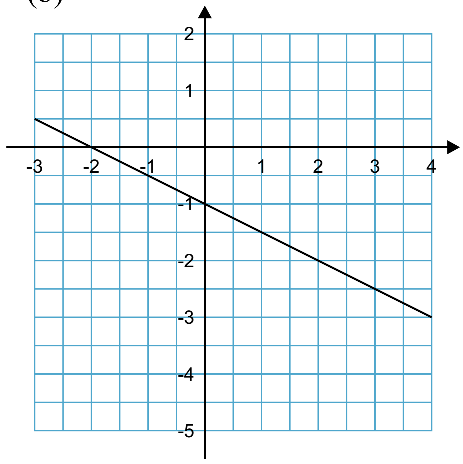


Figur 15

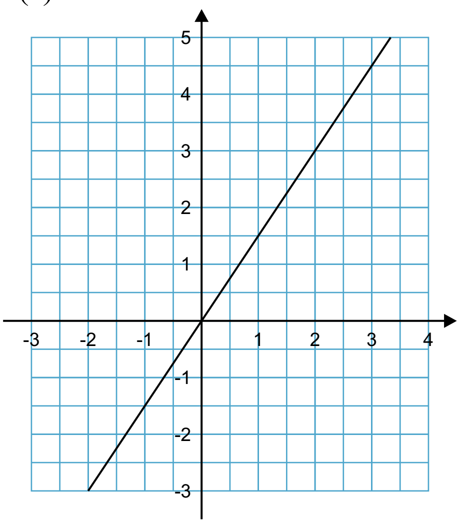
(a)



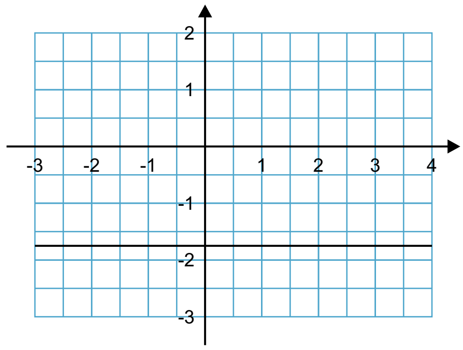
(b)



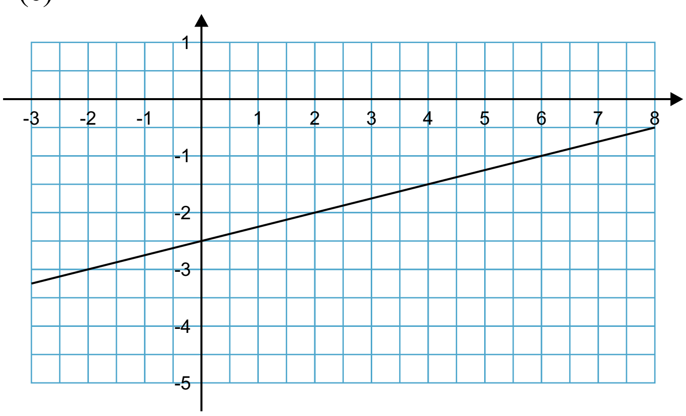
(c)



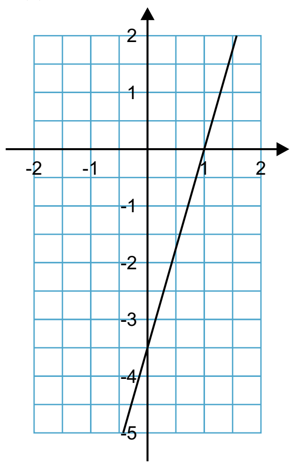
(d)



(e)



(f)



Opgave 6

Tegn graferne for nedenstående lineære sammenhænge:

a)	$y = -2x + 8$	d)	$y = -x - 3$
b)	$y = 2$	e)	$f(x) = 2x$
c)	$y = \frac{3}{5}x + 3$	f)	$f(x) = 4 - x$

Opgave 7

Tegn graferne for den lineære funktion $f(x) = 0,54x + 1,25$; $x \in [-4,6[$.

Hjælp: Husk, at funktionen kun er defineret i intervallet $[-4,6[$. Det er da oplagt at beregne to støttepunkter ved at indsætte intervallets endepunkter!

Opgave 8

Tegn grafen for den lineære funktion $f(x) = -1,3x + 2,7$; $x \in [-2,8[$.

Opgave 9

Bestem i hvert af de seks tilfælde nedenfor forskrifterne for de lineære funktioner, hvis graf går gennem punkterne:

a) $(2,3)$ og $(3,6)$
b) $(-2,3)$ og $(6,7)$
c) $(\frac{1}{2},-3)$ og $(3,1)$
d) $(-3,-5)$ og $(6,13)$
e) $(1,23;5,76)$ og $(3,01;14,62)$
f) $(-4,6;5,2)$ og $(6,2;-5,8)$

Opgave 10

Bestem i hvert af de tre tilfælde nedenfor forskrifterne for de lineære funktioner, hvis graf går gennem punkterne:

a) $(0,2)$ og $(4,6)$
b) $(1,-4)$ og $(7,0)$
c) $(30,5;8,2)$ og $(72,1;17,9)$

Opgave 11

Bestem forskriften for den lineære funktion *f*, hvis hældning er 3 og hvor $f(2) = 10$.

Opgave 12

En lineær funktion *f* har forskriften $y = 1,5x - 4$. En anden lineær funktion *g* har en graf, som er parallel med grafen for *f*, og som passerer igennem punktet $(3,6)$. Bestem forskriften for *g*.

Opgave 13

a) Givet den lineære funktion $f(x) = \frac{2}{3}x + 2$. Beregn grafens skæring med x-aksen.

b) Givet den lineære funktion $f(x) = 2,5x - 2$. Bestem grafens skæring med x-aksen både grafisk og ved beregning.

Opgave 14

Løs ligningen $f(x) = g(x)$ grafisk i følgende tilfælde:

a) $f(x) = 2x + 5$, $g(x) = -x + 10$.

b) $f(x) = \frac{1}{2}x + 3$, $g(x) = -\frac{3}{2}x - 4$.

c) $f(x) = -2x + 2$, $g(x) = \frac{1}{4}x + 5$.

Opgave 15

Løs opgave 14 ved beregning også.

Opgave 16

Lad $f(x) = 2x - 5$ og $g(x) = x - 3$.

a) Løs ligningen $f(x) = 2$ både grafisk og ved beregning.

b) Løs ligningen $g(x) = -2,5$ både grafisk og ved beregning.

Opgave 17

Lad $f(x) = 2,6x - 5,1$.

a) Bestem y-tilvæksten, når x-tilvæksten er 3.

b) Hvilken x-tilvækst giver en y-tilvækst på 6?

Opgave 18

Nedenfor en delvist udfyldt støttepunktstabel for en lineær funktion. Udfyld selv resten!

x	–2	–1	0	1	2
y		2	5		

Opgave 19

Nedenfor en delvist udfyldt støttepunktstabel for en lineær funktion. Udfyld selv resten! Angiv desuden en forskrift for den lineære funktion.

x	2	3	5	6
y		1	4	

Opgave 20

Et taxi-firma A tager 20 kr. i startgebyr og 12 kr. pr. kørt km.

a) Opskriv en forskrift for den lineære funktion, som beskriver taxiregningen y i kroner for antal kørte kilometer x.

b) Benyt forskriften fra a) til at finde prisen for at køre 12,5 km.

c) Hvor langt kan man køre for 200 kr.?

Et andet taxi-firma B tager 30 kr. i startgebyr, men kun 10 kr. pr. kørt km.

d) Hvor langt skal man køre, før taxi-firma B bliver billigst?

Opgave 21

I USA benytter man ofte Fahrenheit-skalaen som temperaturskala, mens man i Europa plejer at bruge Celsius-skalaen. Sammenhængen mellem temperaturen T_F i Fahrenheit og temperaturen T_C i graders Celsius er givet ved: $T_F = 1{,}8 \cdot T_C + 32$. Eller hvis vi vedtager at lade x være temperaturen i °C og y temperaturen i Fahrenheit: $y = 1{,}8x + 32$.

a) I Danmark i april er det 12°C. Hvad svarer det til i Fahrenheit?

b) En sommerdag på Hawaii er det 100°F. Hvad svarer det til i °C?

c) Hvis temperaturen stiger med 10°C, hvor mange grader stiger så temperaturen, når der regnes i Fahrenheit?

d) Hvad er frysepunktet, regnet i Fahrenheit?

e) Lav en formel, som giver temperaturen i °C, når man har temperaturen i graders Fahrenheit.

Opgave 22

Når radius i en cirkel vokser, så vokser cirklens omkreds som bekendt også.

a) Argumenter for at cirklens *omkreds* vokser *proportionalt* med radius.

b) Hvor meget vokser omkredsen med, hvis radius vokser med 1 meter?

c) Vokser cirklens *areal* også lineært med radius?

Opgave 23

Det oplyses, at x og y er *proportionale*. Udfyld de resterende felter i tabellen:

x	-1	0	2	5
y			3	

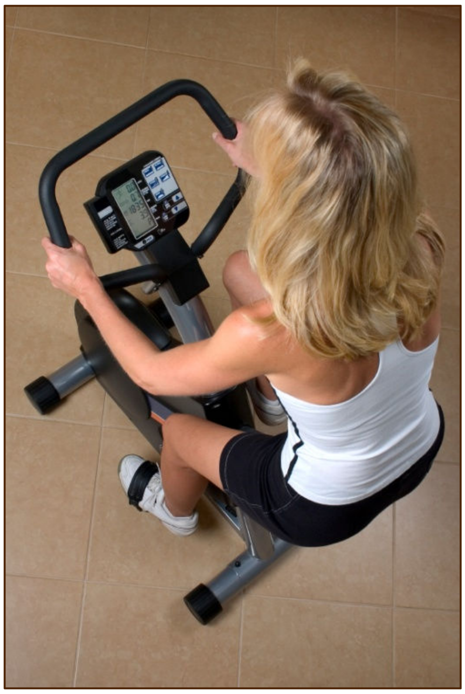
Opgave 24

Benny er en gammel professionel cykelrytter. Han holder sig stadig i form sammen med vennerne i den lokale cykelklub. Da han skal deltage i et landevejsløb en uge senere, har han besluttet sig for at teste sig selv på en enkeltstart på lige vej. I det følgende antager vi, at Benny holder en *konstant fart* på hele turen. Desværre glemte Benny at nulstille sit stopur hjemmefra. Derfor viste stopuret ikke 0, da han startede ud på ruten.

Undervejs kommer Benny forbi to steder på ruten, som han ved ligger henholdsvis 15,2 km og 26,6 km fra udgangspunktet. Det sker når stopuret viser henholdsvis 36 min. og 54 min. I det følgende skal vi betragte den tilbagelagte strækning som funktion af stopurets visning, dvs. den tilbagelagte strækning skal udgøre y-værdien og stopurets visning skal udgøre x-værdien. Da farten er konstant, bliver sammenhængen lineær.

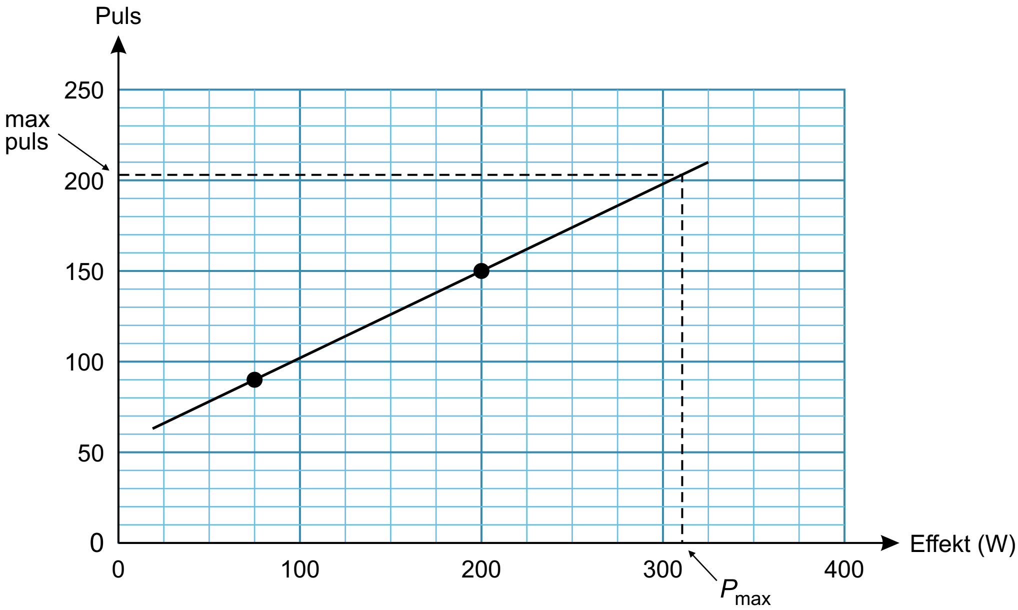
a) Du skal regne tiderne om til timer, så vi fremover regner strækning i km og tid i timer. Opskriv koordinaterne for de to punkter, der ligger på den lineære graf. Det er en god idé at lave en hurtig skitse af situationen. Den kan bruges til at skabe overblik og til at få gode idéer til de efterfølgende spørgsmål.
b) Bestem en forskrift for den lineære funktion ved hjælp af blandt andet formel (2) i sætning 4. Giv desuden en sproglig fortolkning af hældningskoefficienten og konstantleddet. Altså hvad angiver de sagt med ord i det konkrete tilfælde?
c) Benyt forskriften fra spørgsmål b) til at vurdere hvor langt Benny vil være kommet, når stopuret viser 1 time og 10 min.
d) Hvad viste stopuret ved løbets start?
e) (Frivillig) Prøv at argumentere for, hvorfor en konstant fart medfører en lineær graf. Hvordan ville grafen have set ud, hvis Benny øgede farten løbende undervejs?

Opgave 25



Sarah er vild med fitness. Hun vil gerne kende den maksimale *effekt*, P_{max}, som hun kan præstere. Når hun cykler hurtigere og hun dermed øger sin effekt, så øges hendes puls naturligvis også. Effekt er det samme som energi pr. tid og regnes i Watt (W). Det har vist sig, at et menneskes puls vokser omtrent lineært med den leverede effekt. Der er imidlertid en grænse for, hvor høj en puls (antal hjerteslag pr. minut) et menneske kan opnå, og en håndregel siger, at den er 220 minus udøverens alder. Da Sarah er 17 år, kan vi altså regne med, at hendes maksimale puls er $220-17=203$. I det følgende skal vi benytte den lineære model til at "regne baglæns" til en værdi for Sarahs maksimale effekt.

For at finde den lineære sammenhæng mellem Sarahs effekt og hendes puls, er det nødvendigt at hun foretager to tests under forskellige belastninger. Resultatet af disse er indføjet som to punkter på nedenstående graf, som viser *sammenhørende værdier* mellem effekten og pulsen.



a) Du skal nu beregne forskriften for den lineære sammenhæng, idet du lader x svare til effekten og y til pulsen. Start med at aflæse koordinaterne for de to punkter og benyt formel 2 i sætning 4 til at bestemme hældningen, etc.

b) Hvad fik du hældningskoefficienten og konstantleddet til? Forklar med ord, hvad disse ord fortæller om Sarah.

c) Hvad vil Sarahs puls være ved en belastning på 235 W? Beregn det via forskriften.

d) Man kan aflæse Sarahs maksimale effekt nogenlunde på grafen, men du skal prøve at beregne den ved hjælp af forskriften.

Opgave 26

Fra Danmarks Statistik kan man finde følgende data for trafikken på Køge Bugt Motorvejen ved Ølby i perioden fra 1990 til 2007:

År	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998
Antal/døgn	42500	44000	46000	47700	50400	53500	55000	59000	66500
År	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
Antal/døgn	70500	74200	75200	72629	80484	83590	86471	89726	91829

Til følgende analyse anbefales det at anvende regnearket Excel. Man kan med fordel gå direkte ind på Danmarks Statistiks hjemmeside på www.dst.dk, vælge *Statistikbanken* oppe i venstre hjørne. Her vælges *Transport >Motorkøretøjer pr. døgn efter vejstrækning*. Her kan man få data direkte ud i Excel, og analysere data videre derfra.

a) Redegør for, at udviklingen i trafikken er vokset omtrent lineær i den omtalte periode fra 1990 til 2007, ved at indtegne antal køretøjer pr. døgn som funktion af antal år *efter* 1990 (Dvs. år 1990 svarer til 0 på x-aksen!). Bestem derefter den bedste rette linje igennem punkterne.
b) Hvor stor er hældningskoefficienten a og konstantleddet b? Giv en sproglig fortolkning af disse størrelser. Hvad fortæller de?
c) Hvis udviklingen fortsætter, hvor mange køretøjer vil der så være pr. døgn i 2014?
d) Hvornår vil der være 100.000 køretøjer pr. døgn, hvis udviklingen fortsætter?
e) Hvor meget vil antallet af køretøjer pr. døgn vokse med over en periode på 5 år?
f) Nævn nogle faktorer som kan betyde at prognosen ikke kommer til at holde stik.

Opgave 27

Som bekendt falder luftens temperatur, når man stiger op igennem atmosfæren. Udenfor flyveren i 10 km's højde er der således frosttemperaturer. Spørgsmålet er, hvordan lufttemperaturen $T(h)$ falder med højden h over jordoverfladen. En model, som holder nogenlunde i en del tilfælde er, at temperaturen falder *lineært*: $T(h) = a \cdot h + T_0$. hvor temperaturen T_0 er temperaturen ved jordoverfladen, og a er en konstant. Lad os i det følgende sige, at vi har en situation, hvor temperaturen ved jordoverfladen er lig med 15°C og hvor temperaturen falder med 0,7 grader pr. 100 meters opstigen.

a) Lad os i det følgende vedtage, at vi kalder højden for x (regnet i meter) og temperaturen for y (regnet i °C). Argumenter for, at der så gælder følgende lineære sammenhæng mellem x og y: $y = 0,007 \cdot x + 15$.
b) Hvad er temperaturen i højden 1 km?
c) Hvor højt skal man op, før temperaturen er faldet til frysepunktet?

I en anden model, som gælder i en anden vejrmæssig situation er $y = 0,01 \cdot x + 10$.

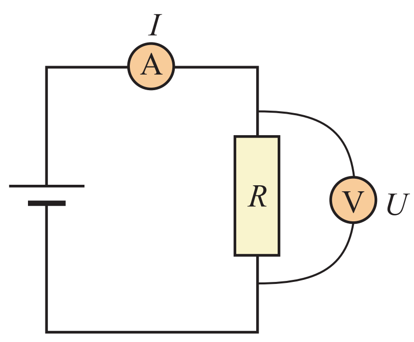
d) Hvad er temperaturen ved jordoverfladen?
e) Hvor meget falder temperaturen pr. 100 meter i dette tilfælde?

Opgave 28

I fysik gælder *Ohms lov*: $U = R \cdot I$, hvor U er *spændingen*, I er *strømstyrken* og R er *modstanden*. Spændingen kan måles med et voltmeter og strømstyrken kan måles med et amperemeter, som vist på figuren herunder. Hvis vi afsætter U opad y-aksen og I hen ad x-aksen, så skal vi altså teoretisk få en ret linje gennem (0,0).

a) Afsæt punkterne fra tabellen nedenfor i et koordinatsystem, som angivet ovenfor.
b) Konstater, at der er tale om en *proportionalitet* mellem I og U og tegn den bedste rette linje, der tilnærmer datapunkterne, idet du tvinger linjen igennem (0,0).
c) Bestem en forskrift for den lineære sammenhæng. Hvad siger hældningskoefficienten noget om?

I (A)	0	0,10	0,25	0,35	0,50	0,60	0,75	0,85
U (V)	0	0,72	1,70	2,63	3,60	4,47	5,45	6,20



Opgave 29

Ifølge hjemmesiden for *Syd Energi* er der for private (september 2009) en årlig abonnementsudgift på 20 kr. og derudover en kWh pris på 0,3140 kr. Angiv et udtryk for den totale pris y som funktion af antallet x af kilowatt timer.

Opgave 30*

Teleselskabet *telenor* har flere tilbud til mobilkunder pr. 18. september 2009:

XS (for *extra small*)
0,79 kr. pr. minut.

S (for *small*)
Månedlig abonnement: 49 kr., 120 min. gratis taletid og derefter 0,69 kr. pr. minut.

M (for *medium*)
Månedlig abonnement: 99 kr., 240 min. gratis taletid og derefter 0,59 kr. pr. minut.

L (for *large*)
Månedlig abonnement: 199 kr., 480 min. gratis taletid og derefter 0,49 kr. pr. minut.

Der er også en XL mulighed, men vi udelader den, da der er forbehold for længden af de enkelte samtaler, hvilket gør sammenligningen besværlig. Endvidere skal det nævnes, at der er en opkaldsafgift på 0,35 kr. Den vurderes dog ikke til at være væsentlig i sammenligningen mellem abonnementerne.

I det følgende skal vi analysere hvornår det er fordelagtigt at benytte det ene abonnement frem for det andet. Lad i det følgende y angive totalprisen i kr. og x angive antal talte minutter.

a) Vis at prisen for XS kan angives ved den lineære funktion $y = 0.79x$.

I de andre abonnementsmuligheder er man nødt til at dele op i intervaller alt efter om der tales i flere eller færre antal minutter end det antal, der er gratis. Det giver anledning til en såkaldt *stykvis lineær funktion*, hvor grafen består af flere linjestykker.

b) Argumenter for at der for abonnementet S gælder $y = 0{,}69(x-120)+49$, når der tales i *over* 120 minutter, dvs. $x > 120$. Reducer udtrykket og vis, at der er tale om en lineær sammenhæng. Argumenter for, at vi alt i alt har følgende:

$$y = \begin{cases} 49 & \text{for } x \le 120 \\ 0{,}69(x-120)+49 & \text{for } x > 120 \end{cases}$$

c) Tegn grafen for den stykvist lineære funktion i spørgsmål b) og tegn i samme koordinatsystem grafen for $y = 0.79x$. Hvor meget skal man tale i mobil før S bliver mest fordelagtig? Prøv at beregne det nøjagtige antal taleminutter.

d) Prøv at sammenligne nogle af de øvrige abonnementsmuligheder. Hvor mange minutter skal man tale pr. måned for at L er mere fordelagtig end S?

e) (Svær) I denne opgave skal du prøve at tage hensyn til *opkaldsafgiften* på de 0,35 kr., som vi hidtil har set bort fra. En mulighed er at antage en bestemt gennemsnitlig samtalelængde ...

Opgave 31

En elektronikkæde har haft et tilbud med et billigt fladskærms TV i deres tilbudsavis. Nedenstående tabel indeholder oplysning om kædens lagerbeholdning af det pågældende TV forskellige dage efter lanceringen. I det konkrete tilfælde viser det sig, at der er tale om en omtrent lineær sammenhæng mellem lagerbeholdningen og antal dage efter lancering.

Dag	2	4	6	7	9	12
Lagerbeholdning	1501	1340	1138	1050	890	640

a) Afbild i et koordinatsystem lagerbeholdningen som funktion af antal dage efter lanceringen – dvs. antal dage på x-aksen og lagerbeholdningen på y-aksen. Gennemfør lineær regression og bestem herunder en forskrift for den lineære sammenhæng.

b) Giv en fortolkning af hældningskoefficienten a og konstantleddet b. Hvad fortæller de om salget?

c) Hvis den lineære udvikling fortsætter, hvornår vil lageret så være tomt?

d) Det er faktisk ret atypisk, at en udvikling på et lager udvikler sig lineært. Prøv at give en forklaring på dette?