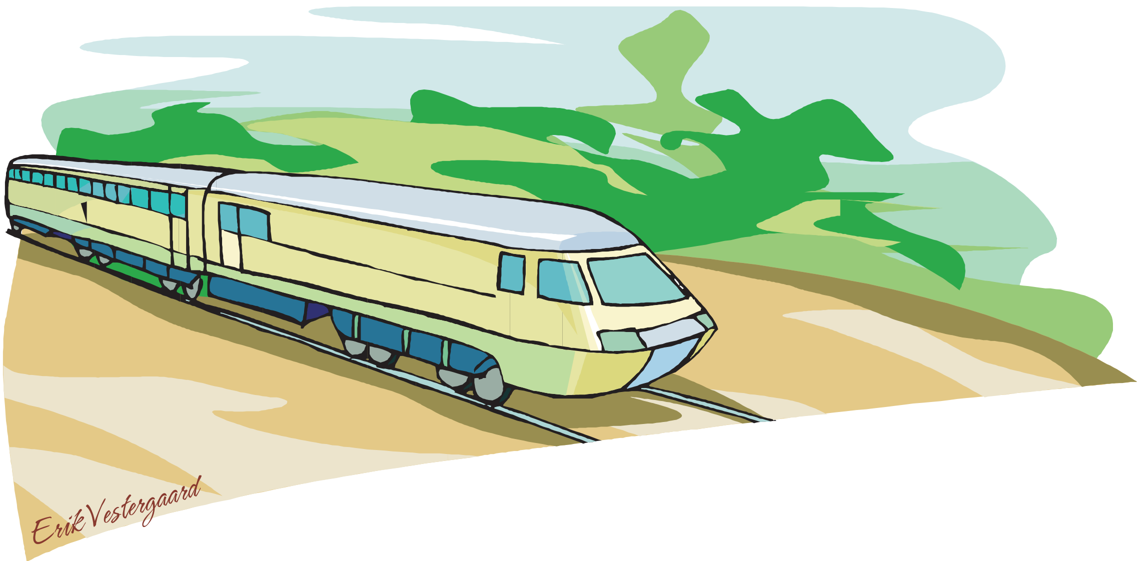
# Lineære funktioner



## Lineære funktioner

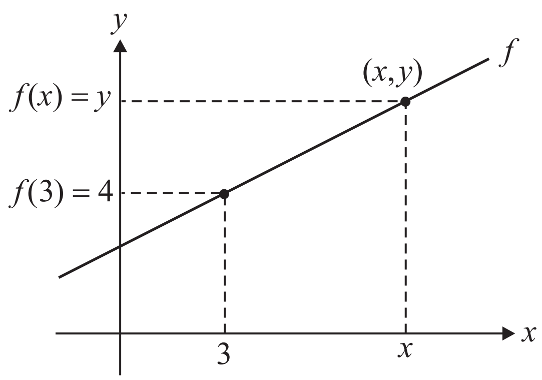
En vigtig type funktioner at studere er de såkaldte *lineære funktioner*. Vi skal udlede en række egenskaber for disse funktioner. Først en definition:

**Definition 1**

En *lineær funktion* er en funktion, hvis graf er en ret linje eller en del af en ret linje.

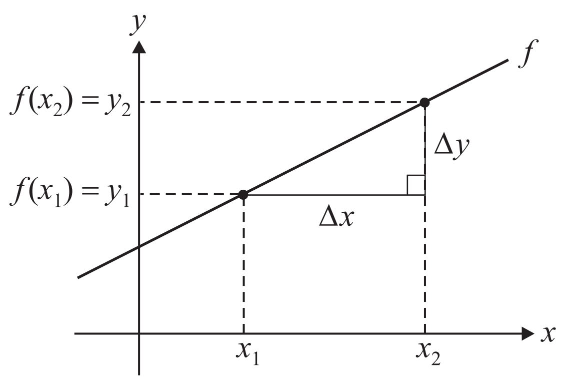
Til enhver $x$-værdi i definitionsmængden for funktionen $f$ svarer en bestemt *funktionsværdi* $f(x)$, også kaldet $y$-værdien. Er funktionen defineret ved en forskrift, fås $y$-værdien ved at indsætte $x$-værdien i forskriften for $f$. Punktet $(x,y)$ er et punkt på *grafen* for $f$. På figuren nedenfor er afbildet grafen for en funktion $f$, og vi ser, at *funktionsværdien i 3 er lig med 4*. Dette skriver vi $f(3)=4$.

*Figur 1*




Når vi ændrer en $x$-værdi, siger vi, at vi giver $x$-værdien en *tilvækst*, og den betegnes ofte med $\Delta x$. Hvis $x$ for eksempel ændres fra 30 til 35, så har $x$ fået en tilvækst på $\Delta x = 35-30=5$. Hvis $x$ ændres fra 8 til 5, så har $x$ fået en tilvækst på $\Delta x = 5-8=-3$, altså en negativ tilvækst. På nøjagtig samme måde kan vi tale om tilvækster $\Delta y$ for den variable $y$. På figur 2 nedenfor har vi givet $x_1$ en tilvækst på $\Delta x = x_2 - x_1$ og kan se, at det resulterer i en $y$-tilvækst på $\Delta y = y_2 - y_1$.

*Figur 2*

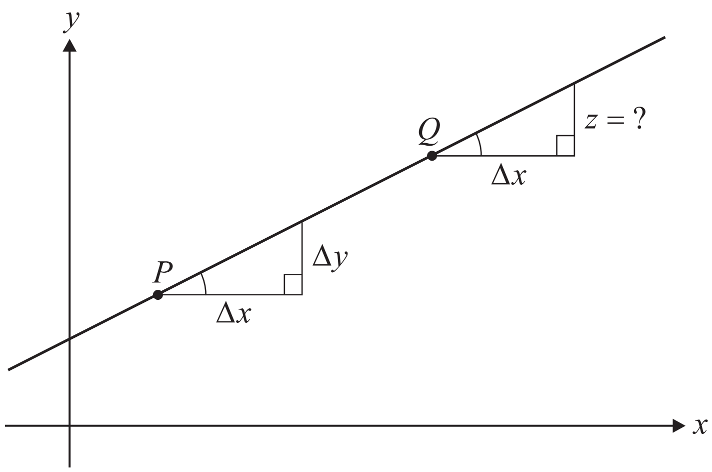


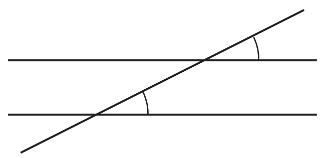
**Sætning 2**

For en lineær funktion svarer lige store tilvækster i $x$ til lige store tilvækster i $y$.

*Bevis*: På figur 3 nedenfor har vi valgt et vilkårligt punkt $P$ på grafen og givet $x$ en tilvækst på $\Delta x$. Dette resulterer i en $y$-tilvækst på $\Delta y$. Nu vælges et andet vilkårligt punkt $Q$ på linjen. Spørgsmålet er, hvad en tilvækst på $\Delta x$ vil svare til i dette tilfælde? Vi betegner den ubekendte tilvækst med $z$. En sætning siger, at hvis to parallelle linjer skæres af en tredje, så vil ensliggende vinkler være lige store. Dette er skitseret på figur 4 til højre. Denne sætning kan umiddelbart bruges til at konkludere, at vinklerne i $P$ og $Q$ i de to trekanter på figur 3 er lige store. Trekanterne har desuden hver en ret vinkel. Da vinkelsummen i en trekant er 180°, så er de sidste to vinkler i trekanterne også ens. Altså er trekanterne *ensvinklede*. Forstørrelsesfaktoren fra den venstre til den højre trekant er her $k = \Delta x / \Delta x = 1$. Heraf fås $z = k \cdot \Delta y = 1 \cdot \Delta y = \Delta y$, så $y$-tilvæksten her er altså den samme. Da vi startede vilkårlige steder på linjen, er det ønskede hermed vist.

*Figur 3 og 4*



□

**Definition 3**

For en lineær funktion vil vi kalde den $y$-tilvækst, som svarer til en $x$-tilvækst på 1 for *hældningskoefficienten*. Den betegnes ofte med bogstavet $a$.

**Bemærkning 4**

Observer, at definition 3 ville have været meningsløs, hvis ikke sætning 2 var rigtig, for så ville $y$-tilvæksten afhænge af hvor på linjen, man "startede".

**Sætning 5**

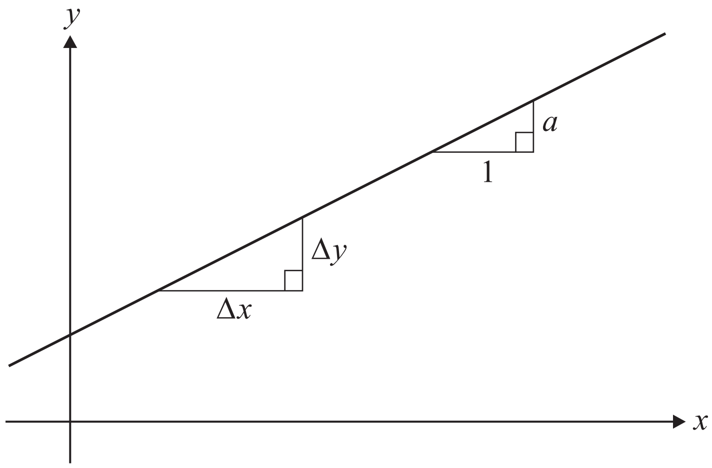
Givet to punkter $(x_1, y_1)$ og $(x_2, y_2)$ på grafen for en lineær funktion. Da kan hældningskoefficienten bestemmes ved hjælp af følgende formel:

(1) $$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

*Bevis*: Vi vil betragte en figur, som ligner den på figur 3. Da vi skal udtale os om hældningskoefficienten $a$ må vi bringe definition 3 i spil. Det gør vi ved på figur 3 at udskifte den højre trekant med en, hvor $x$-tilvæksten er 1. Ifølge definition 3 er $y$-tilvæksten her nemlig $a$. Som i beviset for sætning 2, kan vi hurtigt argumentere for, at de to trekanter er ensvinklede. Forstørrelsesfaktoren fra den venstre til den højre trekant er $k = 1/\Delta x$ . Heraf fås det ønskede af

(2) $$a = k \cdot \Delta y = \frac{1}{\Delta x} \cdot \Delta y = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

*Figur 5*




□

Vi mangler stadig at finde ud af, hvordan forskriften for en lineær funktion egentligt ser ud, dvs. hvordan ser formlen for $y$ ud, når man kender $x$? Her gælder følgende:

**Sætning 6**

Forskriften for en lineær funktion er på formen $f(x) = ax + b$, eller $y = ax + b$, som vi ofte vil skrive. Her er $a$ hældningskoefficienten, og $b$ er den lineære grafs skæring med $y$-aksen.

*Bevis*: Vi vil benytte formlen for hældningskoefficienten fra sætning 5. Dertil behøver vi to punkter på grafen. Som det ene punkt vælger vi meget smart linjens skæringspunkt med $y$-aksen, dvs. $(0,b)$. Da vi skal udtale os om sammenhængen mellem $x$ og $y$ i tilfældet med en lineær funktion, så er vi i beviset nødsaget til at inddrage et *variabelt* punkt $(x,y)$ på grafen. Punkterne $(x_1,y_1)=(0,b)$ og $(x_2,y_2)=(x,y)$ indsættes i formlen (1):

$$a = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{y-b}{x-0} = \frac{y-b}{x}$$

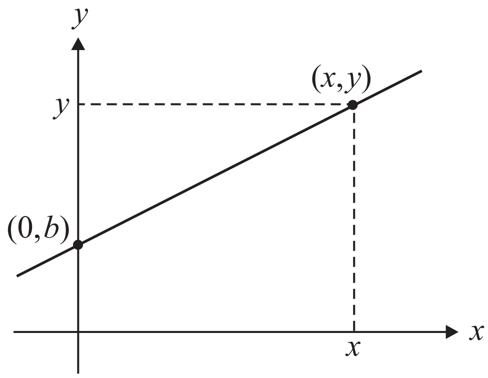
$$\Updownarrow$$

(3) $$ax = y-b$$

$$\Updownarrow$$

$$ax+b=y$$

*Figur 6*




□

**Eksempel 7** (Løsninger ved beregning)

Grafen for en lineær funktion $f$ går gennem $(x_1,y_1)=(-2,1)$ og $(x_2,y_2)=(4,4)$.

a) Bestem forskriften for den lineære funktion.
b) Bestem funktionsværdien i 3,5.
c) Løs ligningen $f(x)=0,5$.

*Løsning*:

a) Forskriften for en lineær funktion er ifølge sætning 6 lig med $y=ax+b$. Vi starter med at bestemme hældningskoefficienten $a$ via formel (1):

$$a = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{4-1}{4-(-2)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Indsættes dette tal i forskriften, fås: $y=\frac{1}{2}x+b$. Vi mangler at bestemme det andet tal, $b$, også kaldet *konstantleddet*. Dertil indsættes et vilkårligt af de to opgivne punkter. Vi vælger $(-2,1)$, dvs. –2 indsættes på $x$'s plads og 1 på $y$'s plads:

$$1=\tfrac{1}{2}\cdot(-2)+b \quad\Leftrightarrow\quad 1=-1+b \quad\Leftrightarrow\quad 2=b$$

Hermed haves linjens forskrift: $y=\frac{1}{2}x+2$, eller $f(x)=\frac{1}{2}x+2$, om man vil.

b) Da forskriften nu er fundet, kan funktionsværdien i 3,5 bestemmes ved indsættelse af 3,5 på $x$'s plads: $f(3,5)=\frac{1}{2}\cdot 3,5+2=3,75$.

c) Mens vi i spørgsmål b) kendte $x$ og skulle finde $y$, så er det her omvendt: Vi ved, at $y=f(x)=0,5$. Vi indsætter denne værdi på $y$'s plads i forskriften og løser for $x$:

$$y=0,5 \quad\Leftrightarrow\quad 0,5=\tfrac{1}{2}x+2 \quad\Leftrightarrow\quad 0,5-2=\tfrac{1}{2}x \quad\Leftrightarrow\quad -1,5=\tfrac{1}{2}x \quad\Leftrightarrow\quad -3=x$$

Så løsningen er altså $x=-3$.

□

**Eksempel 8** (Grafisk løsning)

Hvis man blev bedt om at løse opgaverne fra eksempel 7 *grafisk*, så kunne man gøre det på følgende måde: De to punkter $(-2,1)$ og $(4,4)$ indtegnes i et koordinatsystem og linjen igennem punkterne tegnes, som vist på figur 7 nedenfor. Herefter:

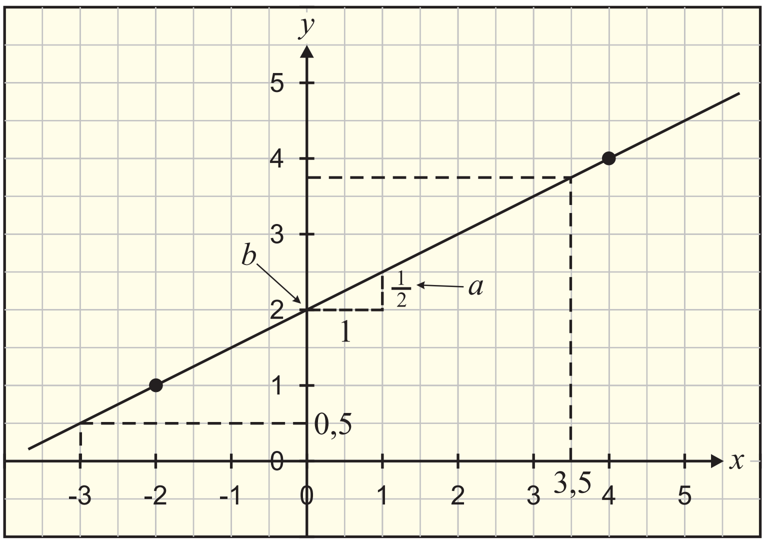
a) Hældningskoefficienten $a$ findes ved at undersøge, hvor meget en tilvækst på 1 på $x$-aksen giver i $y$-tilvækst. Det passer med at $a=\frac{1}{2}$, som vist på figuren. Konstantleddet $b$ findes som skæringen med $y$-aksen, her 2. Derfor er forskriften, også kaldet $x$-$y$-sammenhængen, givet ved $y=\frac{1}{2}x+2$.

b) Funktionsværdien i 3,5 fås ved at gå hen til 3,5 på $x$-aksen, op til grafen og hen til $y$-aksen. Det giver rimeligt nok $y=3,75$. Man skriver: $f(3,5)=3,75$.

c) Løsningen til ligningen $f(x)=0,5$ eller $y=0,5$ fås ved at gå op til 0,5 på $y$-aksen, vandret ud til grafen og lodret ned på $x$-aksen. Det givet $x=-3$. Vi skriver følgende: $f(x)=0,5 \;\Leftrightarrow\; x=3$.

Husk altid at markere aflæsninger på grafen, for eksempel med stiplede linjer!

*Figur 7*




□

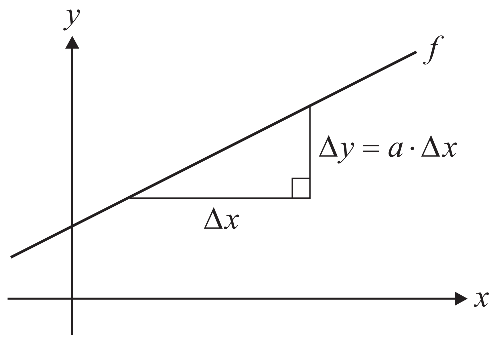
**Sætning 9**

For en lineær funktion gælder, at hvis $x$ gives en $x$-tilvækst på $\Delta x$, så får $y$ en tilvækst på $\Delta y = a \cdot \Delta x$.

*Bevis*: Fremgår direkte af (1) i sætning 5 ved at gange med $\Delta x$ på begge sider af (1).

□

*Figur 8*

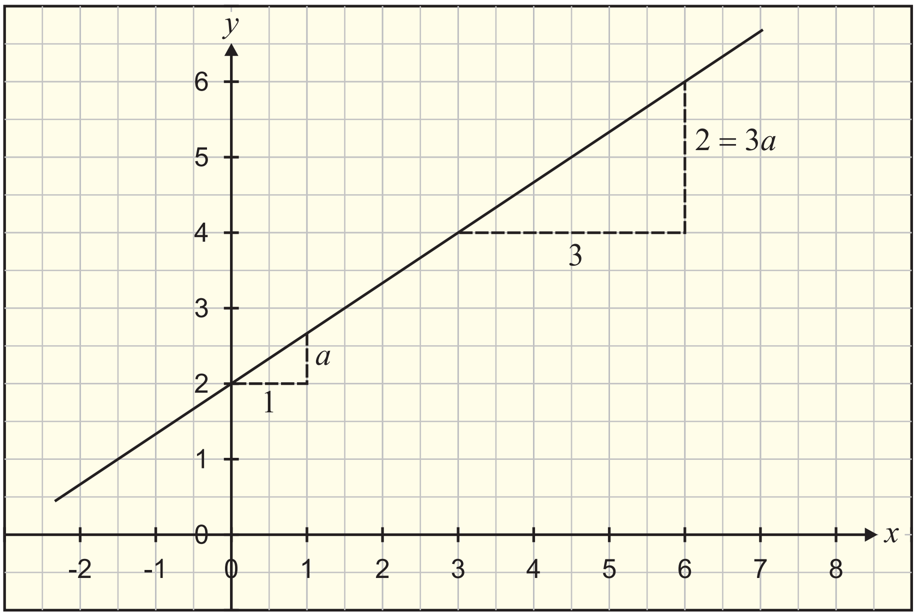



Formel (1) siger også, at *forholdet* mellem $y$-tilvæksten og $x$-tilvæksten altid giver det samme tal, nemlig $a$. Hvis man derfor ganger $x$-tilvæksten med et tal $c$, så bliver $y$-tilvæksten også $c$ gange så stor!

**Eksempel 10**

På figuren nedenfor ser vi, at det er svært at se præcist, hvor stor $y$-tilvæksten er, når $x$-tilvæksten er 1. Foretager man derimod en $x$-tilvækst på 3, så ses det, at det resulterer i en $y$-tilvækst på 2. Ifølge ovenstående betyder det, at hældningen er $a = \Delta y / \Delta x = 2/3$.

*Figur 9*



**Eksempel 11** (Om tilvækster)

Udover at se på tilvækster på en graf, så kan vi også gøre det i en støttepunktstabel. Tabellen nedenfor indeholder to funktionsværdier for en lineær funktion *f*. Vi skal bestemme de manglende funktionsværdier i skemaet.

| ***x*** | –2 | –1 | 0 | 2 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| ***y*** | | 3 | 5 | | |

For det første observerer vi, at når *x* øges med 1, så øges *y* med 2. Ifølge ovenstående vil en tilvækst på 2, som er det dobbelte af 1, derfor resultere i en dobbelt så stor *y*-tilvækst, dvs. 4. Efter lignende argumenter for resten af tabellen, fås:

$-1 \quad +1 \quad +2 \quad +3$

| ***x*** | –2 | –1 | 0 | 2 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| ***y*** | 1 | 3 | 5 | 9 | 15 |

$-2 \quad +2 \quad +4 \quad +6$

Da en *x*-tilvækst på 1 giver en *y*-tilvækst på 2, har vi straks, at hældningen er $a = 2$, og endvidere har vi $b = f(0) = 5$, så forskriften er $y = 2x + 5$.

□

**Eksempel 12** (Tegne grafen udfra forskriften)

Lad os sige, at vi skal tegne grafen for $f(x) = 1,5x + 1$, altså $y = 1,5x + 1$. Vi skal se to måder at løse opgaven på:

*Løsning 1*: Man kan indsætte to *x*-værdier i forskriften for at få to punkter på grafen:

$$f(-1) \;=\; 1,5 \cdot (-1) + 1 \;=\; -1,5 + 1 \;=\; -0,5$$

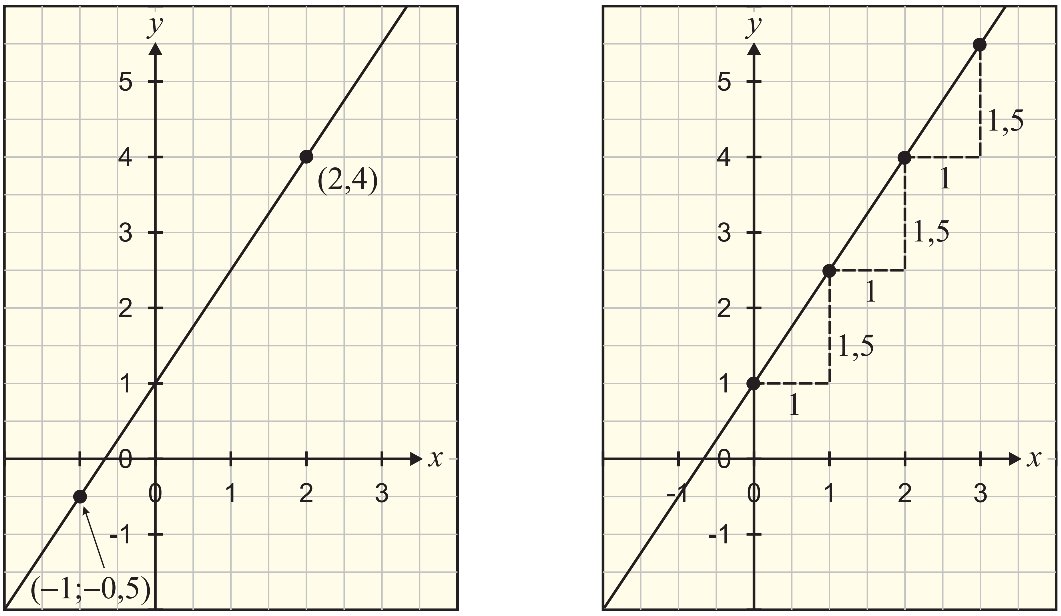
$$f(2) \;=\; 1,5 \cdot 2 + 1 \;=\; 3 + 1 \;=\; 4$$

| ***x*** | –1 | 2 |
|---|---|---|
| ***y*** | –0,5 | 4 |

Da vi ved, at grafen er en ret linje, er der ingen grund til at udregne flere støttepunkter. Vi kan afsætte punkterne i et koordinatsystem og tegne linjen igennem dem. Resultatet ses på figur 10 på næste side.

*Løsning 2*: Af forskriften $y = 1,5x + 1$ aflæser vi direkte, at linjen skærer *y*-aksen i $b = 1$. Derfor har vi punktet $(0,1)$ at starte i. Da hældningskoefficienten for den lineære funktion er $a = 1,5$, ved vi, at hver gang vi går 1 til højre, skal vi gå 1,5 opad. Det giver det andet punkt $(1; 2,5)$. Egentligt er det nok med disse to punkter, men for at kunne tegne linjen mere nøjagtigt med linealen kan det være fornuftigt at finde flere punkter via ovenstående regel, at når man går 1 til højre, skal man gå 1,5 opad. Resultatet ses på figur 11.

*Figur 10 og 11*




**Eksempel 13** (Proportionalitet)

Hvis *b*-leddet er 0, så siges den lineære funktion at være en *proportionalitet*, og man siger da, at *y er proportional med x*: $f(x) = ax$ eller $y = ax$. I dette tilfælde gælder den egenskab, at hvis *x* fordobles, so fordobles også *y*. Mere generelt gælder der, at hvis *x* bliver *k* gange så stor, så bliver *y* også *k* gange så stor.

**Eksempel 14** (Ligningsløsning ved beregning)

Lad $f(x) = \frac{4}{3}x - 1$ og $g(x) = -\frac{1}{2}x + 2$. Løs ligningen $f(x) = g(x)$ ved beregning.

*Løsning*: Vi sætter funktionsudtrykkene lig med hinanden og løser for *x*. Udregningerne følger på næste side.

$$f(x) = g(x)$$

$\Updownarrow$

$$\tfrac{4}{3}x - 1 \ = \ -\tfrac{1}{2}x + 2$$

$\Updownarrow$

$$\tfrac{4}{3}x + \tfrac{1}{2}x \ = \ 2 + 1$$

$\Updownarrow$

$$\tfrac{8}{6}x + \tfrac{3}{6}x \ = \ 3$$

$\Updownarrow$

$$\tfrac{11}{6}x \ = \ 3$$

$\Updownarrow$

$$x \ = \ \frac{3}{\frac{11}{6}} \ = \ 3 \cdot \tfrac{6}{11} \ = \ \tfrac{18}{11} \ = \ 1\tfrac{7}{11}$$

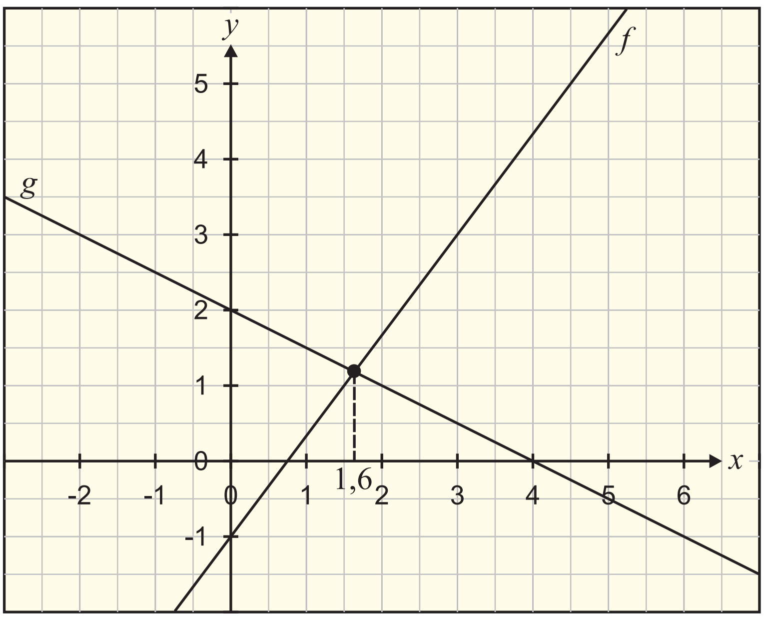
Så løsningen til ligningen er altså $x = 1\tfrac{7}{11}$.

□

**Eksempel 15** (Grafisk ligningsløsning)

En anden mulighed end beregning er af løse ligningen fra eksempel 14 *grafisk*. Her tegner man graferne for de to lineære funktioner i samme koordinatsystem og finder skæringspunktet mellem dem. $x$-koordinaten til dette skæringspunkt er løsningen. På figur 12 er løsningen $x = 1,6$ markeret ved en stiplet linje. Bemærk, at man ikke altid kan forvente, at en grafisk løsning er en *eksakt* løsning. Vi fik $x = 1,6$, mens den eksakte løsning er $x = 1\tfrac{7}{11} \approx 1,636$. Små afvigelser accepteres ved grafisk løsning!

*Figur 12*



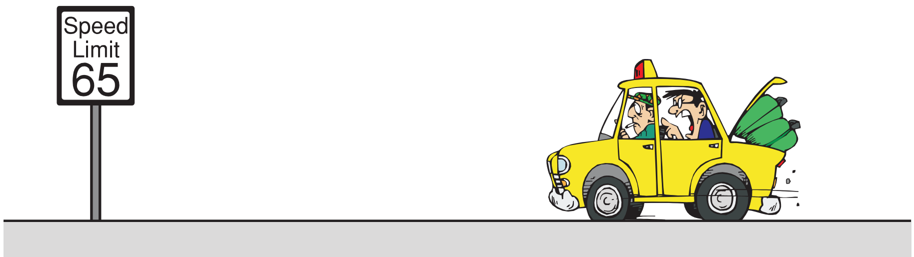
## Lineære modeller

Ikke så sjældent kan lineære funktioner benyttes til at beskrive og forudsige forhold i den praktiske verden. Vi skal i det følgende betragte to eksempler. Det første er en taxi-regning og det andet er et fysikforsøg, hvor man måler på trykket i en gasflaske, når den opvarmes.

**Eksempel 16** (Taxi-regning)

En taxi-chauffør tager 30 kr. i starttakst og 11 kr. pr. kørt km. På grundlag af denne oplysning kan vi uden videre opstille et udtryk for taxi-regningen som funktion af antal kørt km. Den bliver $y = 11x + 30$, hvor $x$ er antal kørte km og $y$ betegner taxi-regningen i kr. Begrundelse for udtrykket: Skæringen med $y$-aksen skal være 30, fordi dette svarer til, at $x = 0$, altså prisen før der overhovedet er kørt. Hældningskoefficienten skal være 11, fordi hældningskoefficienten jo netop svarer til $y$-tilvæksten svarende til en $x$-tilvækst på 1, hvilket jo her er den ekstra pris der skal betales, når der køres 1 ekstra km! Modellen kan benyttes til at besvare nogle spørgsmål:

a) Hvor stor er taxi-regningen, når der køres 8 km?
b) Hvor langt kan man køre for 100 kr?




*Løsning*:

a) Vi sætter 8 ind på $x$'s plads i forskriften: $y = 11x + 30 = 11 \cdot 8 + 30 = 118$, dvs. prisen er 118 kr.

b) Her kender vi prisen, dvs. $y = 100$. Det giver anledning til ligningen:

$$100 = 11x + 30 \;\Leftrightarrow\; 100 - 30 = 11x \;\Leftrightarrow\; 80 = 11x \;\Leftrightarrow\; \frac{80}{11} = x \;\Leftrightarrow\; 7{,}3 \approx x$$

så svaret er altså, at man kan køre ca. 7,3 km for 100 kr.

Bemærk, at mange modeller tager ikke højde for alle forhold. Heller ikke denne model: Taxameteret tæller nemlig også, mens taxien holder stille i lyskryds. Det vil føre for vidt at forsøge at tage hensyn til dette forhold i denne note.

I modellen i eksempel 16 kunne vi opstille en forskrift for den lineære funktion udfra nogle få oplysninger. I andre tilfælde skal man forsøge at opstille en lineær model, som tilnærmer resultaterne af en serie målinger. Sidstnævnte skal vi se et eksempel på.

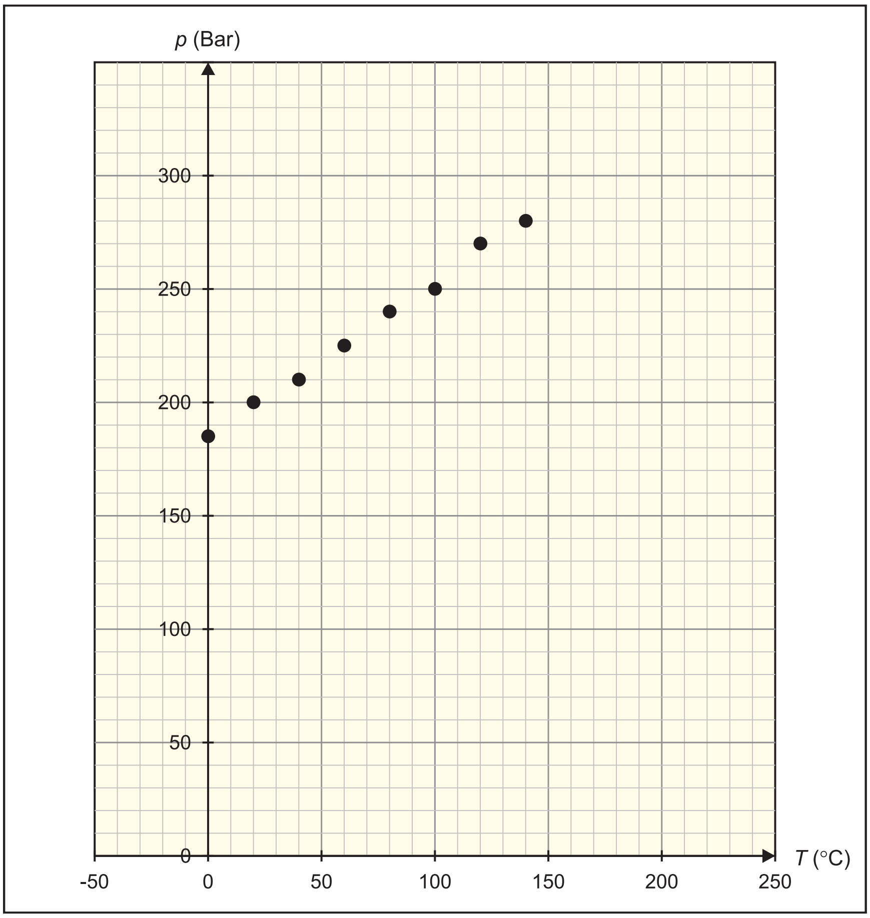
**Eksempel 17** (Lineær regression)

Når man opvarmer en gasflaske indeholdende en gas, så stiger gassens tryk. En tekniker målte sammenhørende værdier mellem temperaturen $T$ i °C og trykket $p$ i Bar for en bestemt gasflaske med oxygen:

| ***T* (°C)** | 0 | 20 | 40 | 60 | 80 | 100 | 120 | 140 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ***p* (Bar)** | 185 | 200 | 210 | 225 | 240 | 250 | 270 | 280 |

Punkterne blev afsat i et koordinatsystem med temperaturen $T$ hen ad $x$-aksen og trykket $p$ opad $y$-aksen for at se, om der var et system i dataene:

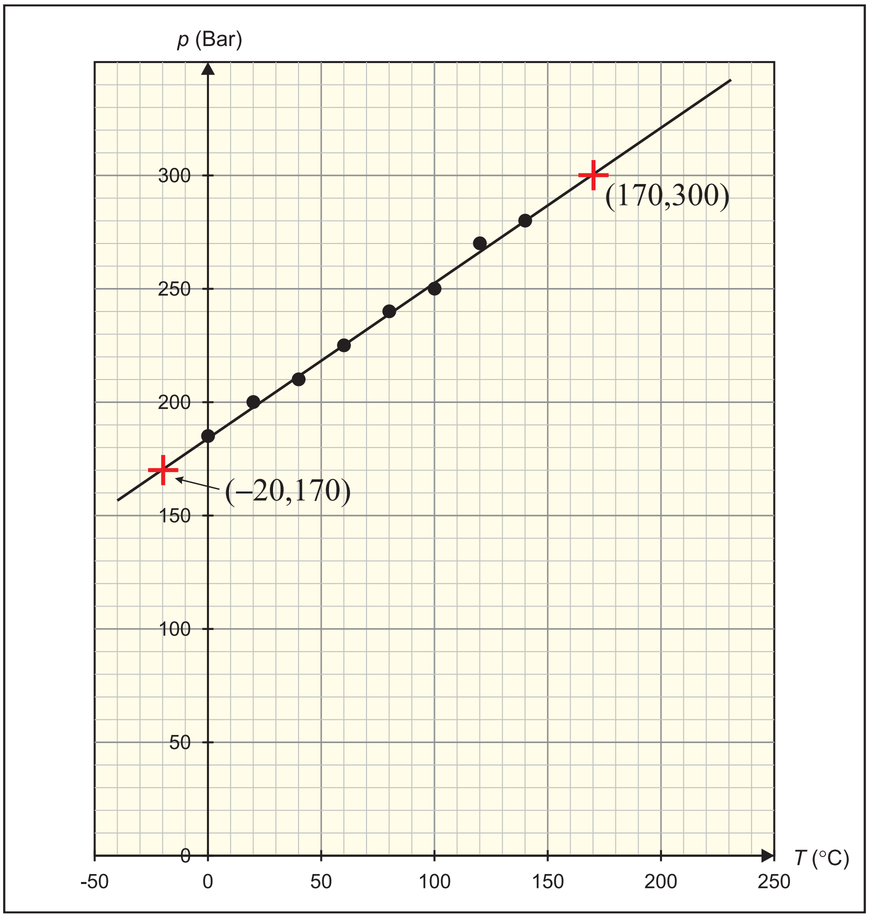
*Figur 13*




Man ser tydeligt, at der er tale om en *lineær sammenhæng*. Derfor lægger vi den linje ind, som tilnærmer punkterne bedst muligt. Denne linje kaldes med et fint ord for en *regressionslinje* og processen kaldes for *lineær regression*. Linjen kan ikke komme til at gå igennem alle datapunkterne, da de ikke ligger helt på linje. Det er normalt, at fysiske målinger har unøjagtigheder, men vi slutter alligevel, at der er tale om en lineær sammenhæng. Regressionslinjen kan benyttes til at forudsige, hvad trykket vil være for andre temperaturer, end dem, som figurerer i datalisten. Man skal dog være opmærksom på, at fordi $x$-$y$-sammenhængen i et vist interval ser ud til at være lineær, så behøver den ikke være det udenfor dette interval. Der kan være forhold, som taler for, at noget ændrer sig. I dette tilfælde vurderes det dog, at tendensen fra målingerne fortsætter. Det betyder, at vi for eksempel kan opstille *prognoser* udfra regressionslinjen.

a) Bestem en forskrift for regressionslinjen.
b) Benyt regressionslinjen til at forudsige trykket, når temperaturen er 110°C.
c) Gasflasken er garanteret at kunne modstå et tryk på 320 Bar. Hvor meget må temperaturen højst være, for at gasflasken ikke er i fare for at eksplodere?
d) Hvad fortæller regressionslinjens hældningskoefficient og konstantled noget om?
e) Hvor meget vokser trykket med, når temperaturen vokser med 10 grader?

*Figur 14*




*Løsninger*:

Man kan få lommeregneren til at udregne regressionslinjen, men her vil vi blot lægge regressionslinjen ind pr. øjemål, så der både ligger punkter over og under linjen, og så linjen tilnærmer punkterne pænt. Dette er gjort på figur 14.

a) For at finde forskriften vælges to punkter, som ligger *præcist* på linjen. Bemærk, at man *ikke* bør vælge punkter fra datalisten, for hvis disse to punkter ikke ligger præcist på regressionslinjen, så er det jo en forkert linje, man regner på! På figur 14 er valgt to punkter – markeret med røde kors – som ligger et stykke fra hinanden, for at minimere usikkerheden: $(-20,170)$ og $(170,300)$, underforstået med de rigtige enheder. Som hældning fås:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{300-170}{170-(-20)} = 0,6842$$

Vi kan indsætte denne værdi for $a$ i linjens udtryk: $y = ax+b$, så vi indtil videre har, at $y = 0,6842x + b$. Det ukendte $b$-led findes som sædvanligt ved indsættelse af et vilkårligt af de to punkter, fx (170,300):

$$300 = 0,6842 \cdot 170 + b \quad \Leftrightarrow \quad 300 = 116,3 + b \quad \Leftrightarrow \quad 183,7 = b$$

således, at den ønskede forskrift er $y = 0,6842x + 183,7$.

b) Temperaturen er 110°C, dvs. $x = 110$. Denne værdi indsættes i forskriften:

$$y = 0,6842x + 183,7 = 0,6842 \cdot 110 + 183,7 = 259,0$$

Så trykket ved 110°C er altså 259,0 Bar.

c) Trykket er 320 Bar, dvs. $y = 320$. Denne værdi indsættes i forskriften og $x$ findes:

$$y = 0,6842x + 183,7 \quad \Leftrightarrow \quad 320 = 0,6842x + 183,7 \quad \Leftrightarrow \quad 320 - 183,7 = 0,6842x$$
$$\Leftrightarrow \quad 136,3 = 0,6842x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{136,3}{0,6842} = x \quad \Leftrightarrow \quad 199,2 = x$$

så svaret er altså, at gasflasken har et tryk på 320 Bar, når temperaturen er 199,2°C, som altså er den temperatur, som man skal holde sig under af sikkerhedsmæssige grunde.

d) Hældningskoefficienten $a$ er jo pr. definition det stykke, regnet med fortegn, som $y$ øges med, når $x$ øges med 1. I dette tilfælde bliver det altså det, som trykket vokser med, når temperaturen vokser med 1 grad! Vi har altså, at trykket stiger med 0,6842 Bar, hver gang temperaturen vokser med 1°C. $b$-leddet er skæringen med $y$-aksen, altså $y$-værdien svarende til $x = 0$. Derfor er $b$-leddet her trykket ved frysepunktet, altså 0°C.

e) Her udnytter vi sætning 9:

$$\Delta y = a \cdot \Delta x = 0,6842 \cdot 10 = 6,842$$

så trykket stiger altså med 6,842 Bar, hver gang temperaturen vokser med 10°C.

□

## Stykvis lineære funktioner

Undertiden har man brug for at kunne beskrive funktioner, hvis grafer består af flere linjestykker. En sådan funktion betegnes en *stykvis lineær funktion*. Lad os betragte et eksempel.

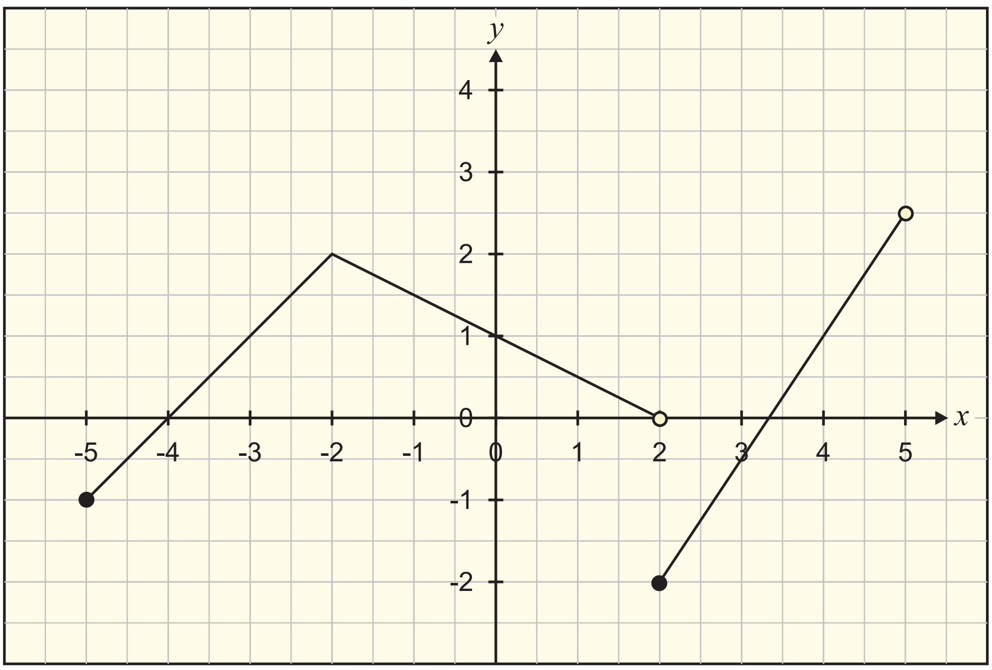
**Eksempel 18**

På figur 15 er vist grafen for en stykvis lineær funktion. Vi skal finde forskriften for funktionen. Det gælder her om at finde udtrykket for hvert af de tre linjestykker og så anføre i hvilke områder, de er defineret. Lad os starte med linjestykket yderst til højre. Endepunkterne (2;–2) og (5;2,5) kan bruges til at finde hældningen:

$$a = \frac{2,5-(-2)}{5-2} = \frac{4,5}{3} = 1,5$$

så vi foreløbigt har $y = 1,5x + b$. Konstantleddet $b$ finder vi som sædvanligt ved at indsætte et af punkterne, fx (2;–2): $-2 = 1,5 \cdot 2 + b \Leftrightarrow -2 = 3 + b \Leftrightarrow -5 = b$. Dermed har vi udtrykket $y = 1,5x - 5$. Denne forskrift gælder dog kun for $x \in [2,5[$. Bemærk, at en *åben* (ikke udfyldt) cirkel i enden af et linjestykke indikerer, at punktet ikke er med, mens en *lukket* (udfyldt) cirkel indikerer, at punktet er med. På samme måde, eller eventuelt ved aflæsning, findes udtryk for de andre to linjestykker. Her får vi $y = -0,5x + 1$ for $x \in [-2,2[$ og $y = x + 4$ for $x \in [-5,-2[$. Bemærk, at grafen har et *knæk* i $x = -2$. Hvorvidt man tæller –2 med til det ene eller det andet interval er ligegyldigt, eftersom man får det samme ved indsættelse af –2 i udtrykkene for de to relevante linjestykker.

*Figur 15*



Man samler normalt alle disse udtryk i en såkaldt *gaffelforskrift*:

$$f(x) = \begin{cases} x+4 & \text{for } x \in [-5,-2[ \\ -0,5x+1 & \text{for } x \in [-2,2[ \\ 1,5x-5 & \text{for } x \in [2,5[ \end{cases}$$

For anvendelser af stykvis lineære funktioner, se opgave 28.

# Opgaver

**Opgave 1**

Hver af delfigurerne (a) til (f) på figur 16 indeholder grafen for en lineær funktion *f*.

a) Aflæs forskriften for *f* i hvert af de seks tilfælde.

b) På delfigur (a): Bestem funktionsværdierne i –1 og 3.

c) På delfigur (b): Aflæs $f(0)$ og $f(2{,}5)$.

d) På delfigur (c): Aflæs $f(3)$ og $f(0{,}5)$.

e) På delfigur (d): Løs ligningerne $f(x)=1$ og $f(x)=2$ grafisk.

f) På delfigur (e): Løs ligningen $f(x)=1$ grafisk.

g) På delfigur (f): Løs ligningerne $f(x)=1$ og $f(x)=1{,}75$ grafisk.

**Opgave 2**

Hver af delfigurerne (a) til (f) på figur 17 indeholder grafen for en lineær funktion *f*.

a) Aflæs forskriften for *f* i hvert af de seks tilfælde.

b) Bestem funktionsværdien $f(1)$ i hvert af de seks tilfælde.

c) Løs ligningen $f(x)=-1$ i hvert af de seks tilfælde.

**Opgave 3**

Vi har følgende *x*-*y*-sammenhæng: $y=2x+1$.

a) Beregn *y*, når $x=2$

b) Beregn *y*, når $x=-1{,}5$

c) Beregn *x*, når $y=13$

**Opgave 4**

En lineær funktion er givet ved $f(x)=-2x+6$

a) Beregn $f(0)$, $f(1)$ og $f(-3)$.

b) Løs ligningerne $f(x)=10$, $f(x)=0$ og $f(x)=17$ ved beregning.

c) Hvor stor er *y*-tilvæksten, når *x*-tilvæksten er 2?

**Opgave 5**

Tegn graferne for nedenstående lineære sammenhænge:

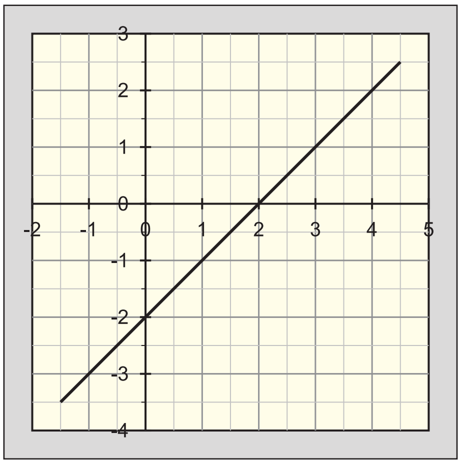
a) $y=2x-4$

b) $y=\frac{1}{2}x+1$

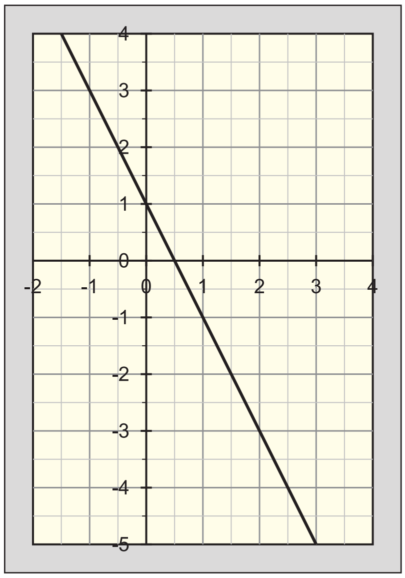
c) $y=\frac{1}{3}x$

*Figur 16*

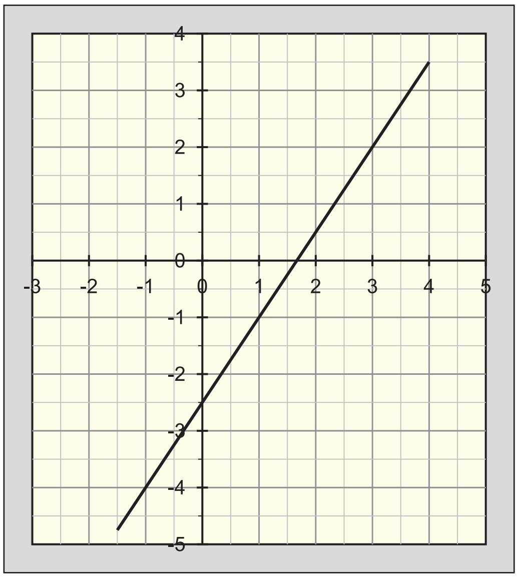
(a)



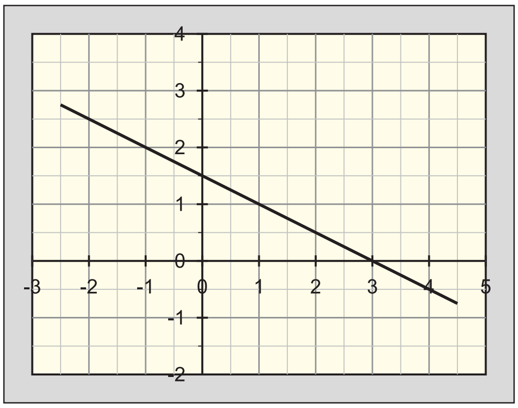

(b)



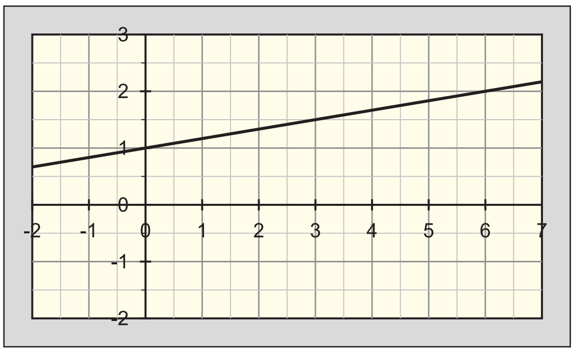

(c)



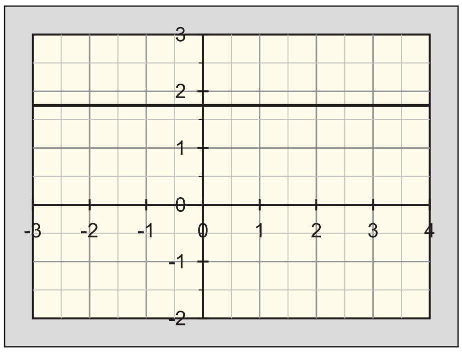

(d)




(e)

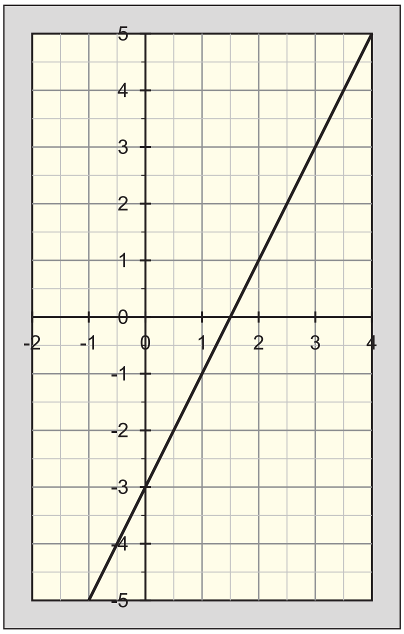



(f)

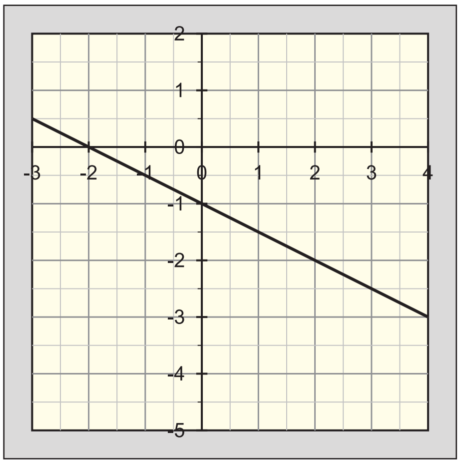


*Figur 17*

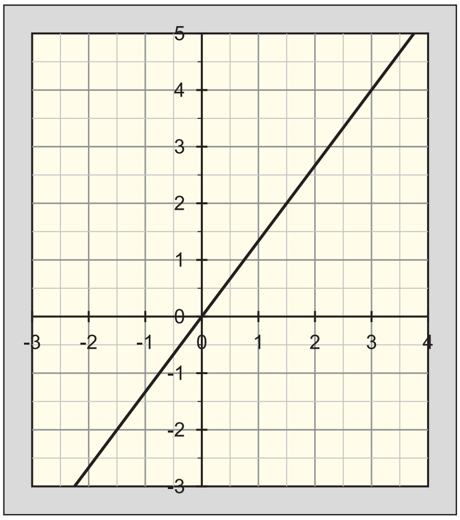
(a)



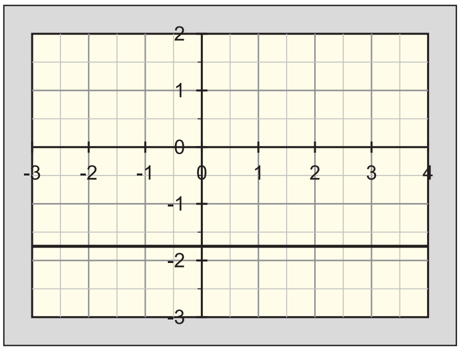

(b)



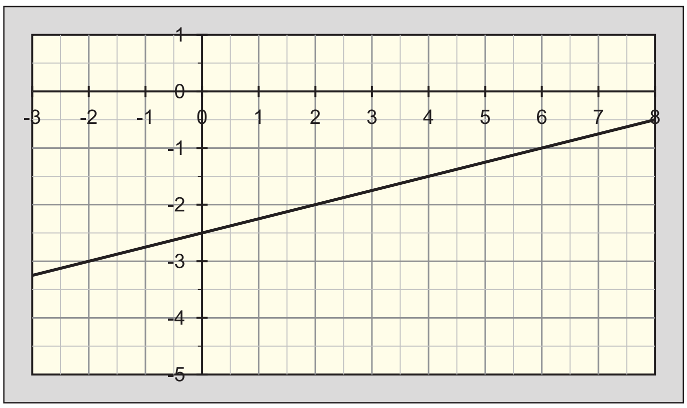

(c)



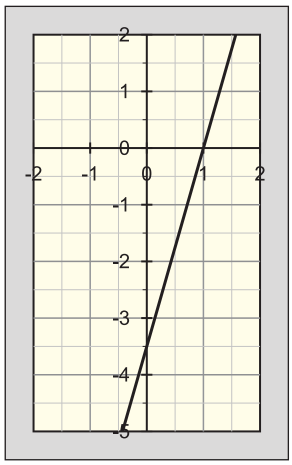

(d)




(e)




(f)



**Opgave 6**

Tegn graferne for nedenstående lineære sammenhænge:

a) $y = -2x + 8$

b) $y = 2$

c) $y = \frac{3}{5}x + 3$

**Opgave 7**

Tegn graferne for den lineære funktion $f(x) = 0{,}54x + 1{,}25$ ; $x \in [-4{,}6[$ .

*Hjælp*: Husk, at funktionen kun er defineret i intervallet $[-4{,}6[$ . Det er da oplagt at beregne to støttepunkter ved at indsætte intervallets endepunkter!

**Opgave 8**

Tegn graferne for den lineære funktion $f(x) = -1{,}3x + 2{,}7$ ; $x \in [-2{,}8[$ .

**Opgave 9**

Bestem i hvert af de seks tilfælde nedenfor forskrifterne for de lineære funktioner, hvis graf går gennem punkterne:

a) $(2,3)$ og $(3,6)$

b) $(-2,3)$ og $(6,7)$

c) $(\frac{1}{2},-3)$ og $(3,1)$

d) $(-3,-5)$ og $(6,13)$

e) $(1{,}23; 5{,}76)$ og $(3{,}01; 14{,}62)$

f) $(-4{,}6; 5{,}2)$ og $(6{,}2; -5{,}8)$

**Opgave 10**

Bestem i hvert af de tre tilfælde nedenfor forskrifterne for de lineære funktioner, hvis graf går gennem punkterne:

a) $(0,2)$ og $(4,6)$

b) $(1,-4)$ og $(7,0)$

c) $(30{,}5; 8{,}2)$ og $(72{,}1; 17{,}9)$

**Opgave 11**

Bestem forskriften for den lineære funktion *f*, hvis hældning er 3 og hvor $f(2) = 10$ .

**Opgave 12**

En lineær funktion *f* har forskriften $y = 1,5x - 4$. En anden lineær funktion *g* har en graf, som er parallel med grafen for *f*, og som passerer igennem punktet $(3,6)$. Bestem forskriften for *g*.

**Opgave 13**

Lad *f* være den lineære funktion med forskrift $y = \frac{2}{3}x + 2$. Beregn grafens skæring med *x*-aksen.

**Opgave 14**

Løs ligningen $f(x) = g(x)$ grafisk i følgende tilfælde:

a) $f(x) = 2x + 5$, $g(x) = -x + 10$.

b) $f(x) = \frac{1}{2}x + 3$, $g(x) = -\frac{3}{2}x - 4$

c) $f(x) = -2x + 2$, $g(x) = \frac{1}{4}x + 5$

**Opgave 15**

Løs opgave 14 ved beregning også.

**Opgave 16**

Lad $f(x) = 2x - 5$ og $g(x) = x - 3$.

a) Løs ligningen $f(x) = 2$ både grafisk og ved beregning.

b) Løs ligningen $g(x) = -2,5$ både grafisk og ved beregning.

**Opgave 17**

Lad $f(x) = 2,6x - 5,1$.

a) Bestem *y*-tilvæksten, når *x*-tilvæksten er 3.

b) Hvilken *x*-tilvækst giver en *y*-tilvækst på 6?

**Opgave 18**

Nedenfor en delvist udfyldt støttepunktstabel for en lineær funktion. Udfyld selv resten!

| ***x*** | –2 | –1 | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| ***y*** | | 2 | 5 | | |

**Opgave 19**

Nedenfor en delvist udfyldt støttepunktstabel for en lineær funktion. Udfyld selv resten! Angiv desuden en forskrift for den lineære funktion.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $x$ | 2 | 3 | 5 | 6 |
| $y$ | | 1 | 4 | |

**Opgave 20**

Et taxi-firma A tager 20 kr. i startgebyr og 12 kr. pr. kørt km.

a) Opskriv en forskrift for den lineære funktion, som beskriver taxiregningen $y$ i kroner for antal kørte kilometer $x$.

b) Benyt forskriften fra a) til at finde prisen for at køre 12,5 km.

c) Hvor langt kan man køre for 200 kr.?

Et andet taxi-firma B tager 30 kr. i startgebyr, men kun 10 kr. pr. kørt km.

d) Hvor langt skal man køre, før taxi-firma B bliver billigst?

**Opgave 21**

I USA benytter man ofte Fahrenheit-skalaen som temperaturskala, mens man i Europa plejer at bruge Celsius-skalaen. Sammenhængen mellem temperaturen $T_F$ i Fahrenheit og temperaturen $T_C$ i graders Celsius er givet ved: $T_F = \frac{9}{5} \cdot T_C + 32$. Eller, hvis vi vedtager at lade $x$ være temperaturen i °C og $y$ temperaturen i Fahrenheit: $y = \frac{9}{5} x + 32$.

a) I Danmark i april er det 12°C. Hvad svarer det til i Fahrenheit?

b) En sommerdag på Hawaii er det 100°F. Hvad svarer det til i °C?

c) Hvis temperaturen stiger med 10°C, hvor mange grader stiger så temperaturen, når der regnes i Fahrenheit?

d) Hvad er frysepunktet, regnet i Fahrenheit?

e) Lav en formel, som giver temperaturen i °C, når man har temperaturen i graders Fahrenheit.

**Opgave 22**

Det oplyses, at $x$ og $y$ er *proportionale*. Udfyld de resterende felter i tabellen:

| $x$ | –1 | 0 | 2 | 5 |
|---|---|---|---|---|
| $y$ | | | 3 | |

**Opgave 23**

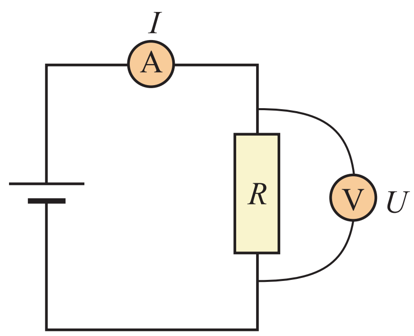
I fysik gælder *Ohms lov*: $U = R \cdot I$, hvor $U$ er *spændingen*, $I$ er *strømstyrken* og $R$ er *modstanden*. Spændingen kan måles med et voltmeter og strømstyrken kan måles med et amperemeter, som vist på figuren herunder. Hvis vi afsætter $U$ opad $y$-aksen og $I$ hen ad $x$-aksen, så skal vi altså teoretisk få en ret linje gennem (0,0).

a) Afsæt punkterne fra tabellen nedenfor i et koordinatsystem, som angivet ovenfor.

b) Konstater, at der er tale om en *proportionalitet* mellem $I$ og $U$ og tegn den bedste rette linje, der tilnærmer datapunkterne, idet du tvinger linjen igennem (0,0).

c) Bestem en forskrift for den lineære sammenhæng. Hvad siger hældningskoefficienten noget om?

| ***I* (A)** | 0 | 0,10 | 0,25 | 0,35 | 0,50 | 0,60 | 0,75 | 0,85 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ***U* (V)** | 0 | 0,72 | 1,70 | 2,63 | 3,60 | 4,47 | 5,45 | 6,20 |




**Opgave 24**

Som bekendt falder luftens temperatur, når man stiger op igennem atmosfæren. Udenfor flyveren i 10 km's højde er der således frosttemperaturer. Spørgsmålet er, hvordan lufttemperaturen $T(h)$ falder med højden $h$ over jordoverfladen. En model, som holder nogenlunde i en del tilfælde er, at temperaturen falder *lineært*: $T(h) = a \cdot h + T_0$. hvor temperaturen $T_0$ er temperaturen ved jordoverfladen, og $a$ er en konstant. Lad os i det følgende sige, at vi har en situation, hvor temperaturen ved jordoverfladen er lig med 15°C og hvor temperaturen falder med 0,7 grader pr. 100 meters opstigen.

a) Lad os i det følgende vedtage, at vi kalder højden for $x$ (regnet i meter) og temperaturen for $y$ (regnet i °C). Argumenter for, at der så gælder følgende lineære sammenhæng mellem $x$ og $y$: $y = 0,007 \cdot x + 15$.
b) Hvad er temperaturen i højden 1 km?
c) Hvor højt skal man op, før temperaturen er faldet til frysepunktet?

I en anden model, som gælder i en anden vejrmæssig situation er $y = 0,01 \cdot x + 10$.

d) Hvad er temperaturen ved jordoverfladen?
e) Hvor meget falder temperaturen pr. 100 meter i dette tilfælde?

**Opgave 25**

En stykvis lineær funktion har følgende forskrift:

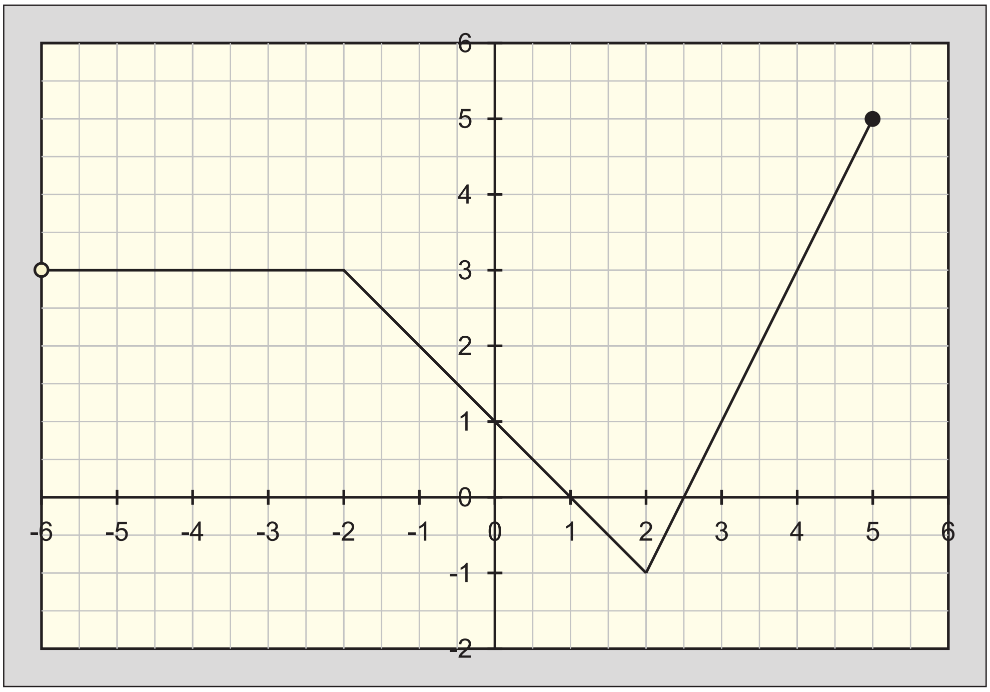
$$f(x) = \begin{cases} -x+2 & \text{for } x \in [-3,1[ \\ 0,5x+0,5 & \text{for } x \in [1,3] \\ 2x-6 & \text{for } x \in ]3,6[ \end{cases}$$

a) Tegn grafen for $f$.
b) Bestem $f(-2)$ og $f(4)$.
c) Løs ligningen $f(x) = 3$.

**Opgave 26**

Opskriv en forskrift for den stykvis lineære funktion, som har følgende graf:

*Figur 18*



**Opgave 27**

Tegn grafen for følgende stykvis lineære funktion:

$$f(x) \;=\; \begin{cases} -\frac{1}{2}x+5 & \text{for } \; x \in [0,3[ \\ \frac{2}{3}x+2 & \text{for } \; x \in [3,6[ \end{cases}$$

**Opgave 28**

I afsnittet med *lineære modeller* så vi på en taxi, som kostede 30 kr. i startgebyr og 11 kr. pr. kørt km. I denne opgave skal vi se på en taxi-chauffør, som tager samme beløb, men hvis man kører mere end 8 km, koster de efterfølgende kilometer kun 8 kr. pr. km. Opskriv en forskrift for en stykvis lineær funktion, hvor $y$ eller $f(x)$ angiver den samlede pris og $x$ er antal kørt km.