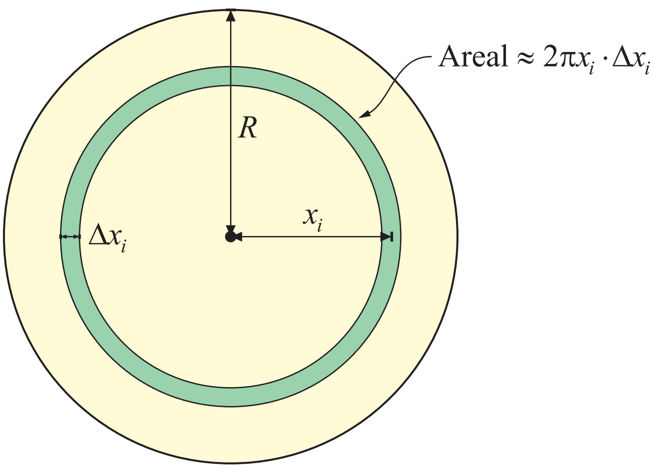
Anvendelser af integralregning

I 1600-tallet blev integralregningen indført. Vi skal se, hvor stærkt et værktøj det er til at løse problemer, som tidligere forekom uoverstigelige. I matematik-grundbogen har vi set, hvorledes man kan finde for eksempel rumfanget af et omdrejningslegeme. Idéen er at inddele legemet i tynde snit. Vi skal se, hvordan denne teknik kan benyttes i en række andre problemer. Vi vil dog afstå fra at føre strenge beviser for resultaterne, og i stedet fokusere på det intuitive i metoderne.

Eksempel 1

På en cirkulær øde ø bor en række indfødte, som antages jævnt fordelt over øens areal. Hver dag skal indbyggerne bevæge sig ind til øens midte for at hente vand fra øens eneste brønd. Spørgsmålet er hvor langt indbyggerne i gennemsnit må bevæge sig for at nå brønden? Øens radius er 6 km.

Løsning:
Det er forholdsvist oplagt, at svaret må være mere end halvdelen af radius, fordi der er flere indbyggere på de yderste 3 km af øen. Mere kan man ikke umiddelbart sige. Hvis problemet bare havde været af diskret natur, havde det været ret nemt: hvis der for eksempel havde været 5 personer, som boede 4 km fra brønden, 10 personer i afstanden 2 km og 5 personer i afstanden 3 km, så kunne man få svaret ved at udregne det *vejede gennemsnit* af afstandene: $\frac{5}{20}\cdot 4\,\text{km}+\frac{10}{20}\cdot 2\,\text{km}+\frac{5}{20}\cdot 5\,\text{km}=3,25\,\text{km}$.



Denne idé vil vi imidlertid føre videre til det kontinuerte problem: Vi inddeler øen i nogle smalle ringe, hvorom vi kan sige, at folk, der bor heri, alle har omtrent den samme afstand til brønden i øens centrum. Lad os sige, at afstanden for den i'te ring er x_i, som vist på figuren. Afstanden skal vægtes med den brøkdel, som ringens areal udgør af hele cirklens areal. Ringens areal er (omtrent) lig med omkredsen gange med tykkelsen, dvs. $2\pi x_i \cdot \Delta x_i$, mens hele skiven med radius R har et areal på $A = \pi \cdot R^2$. Den omtalte brøkdel er derfor

$$\text{Arealbrøkdel} = \frac{\text{Ringens areal}}{\text{Hele skivens areal}} \approx \frac{2\pi x_i \cdot \Delta x_i}{\pi \cdot R^2} = \frac{1}{R^2} \cdot 2x_i \Delta x_i$$

For at få en (approksimativ) værdi for gennemsnitsafstanden $\overline{x}$ for en øboer summerer vi over alle ringene, idet vi vægter afstandene med arealbrøkdelene:

$$\overline{x} \approx \sum_i \{\text{Afstand fra } i\text{'te ring}\} \cdot \{i\text{'te rings arealbrøkdel}\} \approx \sum_i x_i \cdot \frac{1}{R^2} \cdot 2x_i \Delta x_i$$

Den ubeviste påstand er nu, at hvis man lader inddelingerne blive finere og finere, så nærmer summen sig til et integrale og alle $\approx$ bliver til $=$:

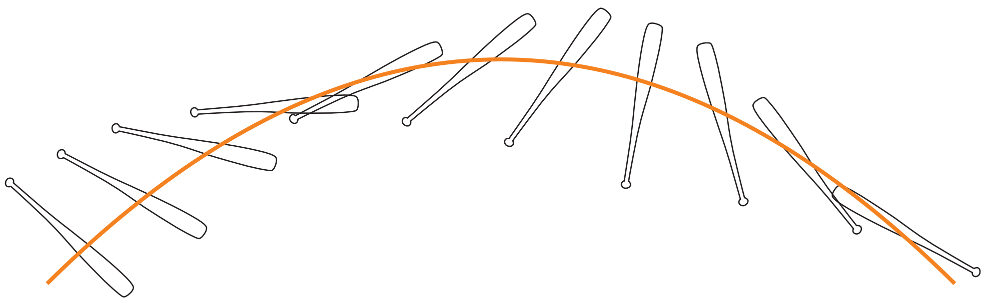
$$\overline{x} = \int_0^R \left(x \cdot \frac{1}{R^2} \cdot 2x \right) dx = \frac{2}{R^2} \int_0^R x^2 dx = \frac{2}{R^2} \left[\tfrac{1}{3} x^3 \right]_0^R = \frac{2}{R^2} \cdot \tfrac{1}{3} R^3 = \tfrac{2}{3} R$$

Den gennemsnitlige afstand indtil øens centrum er altså $\frac{2}{3}$ af øens radius, altså 4 km.

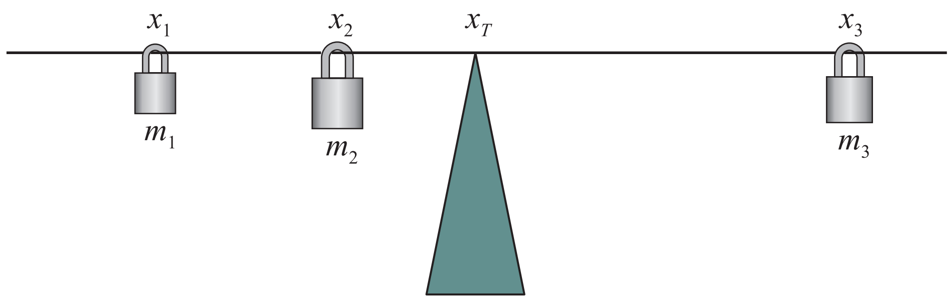
□

Eksempel 2 (Tyngdepunktet)

I denne opgave skal vi se på begrebet *tyngdepunkt* og hvordan det bestemmes. Begrebet går undertiden også under betegnelsen *massemidtpunktet* (Engelsk: *Center of mass*). Begrebet er vigtigt, når man har at gøre med en genstand med en vis udstrækning. Indenfor fysikken beskæftiger man sig blandt andet med de såkaldte *stive legemer* og deres bevægelse. Det kan for eksempel være et baseball-bat, som kastes gennem luften. Her er det baseball battets tyngdepunkt, som vil beskrive en parabelbane.



Tyngdepunktet er per definition *det punkt i et legeme, hvor tyngdekraften har angrebspunkt*. Hermed menes, at hvis man holder en finger under tyngdepunktet, så kan man balancere legemet. I mange henseender, dog ikke alle, vil et legeme opføre sig om al dets masse er koncentreret i tyngdepunktet. Derfor spiller tyngdepunktet ofte en central rolle i fysiske problemstillinger, ligesom i tilfældet med baseball battet.



Figuren herover illustrerer, at de tre vægte kan holdes i ligevægt, hvis man understøtter stangen i punktet med *x*-koordinat x_T. De tre vægte befinder sig på den antaget vægtløse stang i positionerne x_1, x_2 og x_3. Masserne er henholdsvis m_1, m_2 og m_3. Tyngdepunktets koordinater x_T er da givet ved:

(1) $$x_T = \frac{m_1 \cdot x_1 + m_2 \cdot x_2 + m_3 \cdot x_3}{M} = x_1 \cdot \frac{m_1}{M} + x_2 \cdot \frac{m_2}{M} + x_3 \cdot \frac{m_3}{M}$$

hvor $M = m_1 + m_2 + m_3$ er den samlede masse. Omskrivningen i 2. lighedstegn viser, at tyngdepunktet fås ved at vægte positionerne for de enkelte lodder med deres respektive massebrøkdele. Tyngdepunktet kan også karakteriseres som det punkt, i forhold til hvilket det såkaldte *kraftmoment* er lig med $\vec{0}$. Løst sagt betyder det her, at kraft gange arm på venstre side af understøtningspunktet er lig med kraft gange arm på højre side af understøtningspunktet. Se mere herom i opgave 6.

Hvis man mere generelt har at gøre med endeligt mange masser $m_1, m_2, \ldots, m_n$ anbragt i punkter i *rummet*, angivet ved stedvektorerne henholdsvis $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_n$, så er tyngdepunktet $\vec{r}_T$ for systemet af de *n* masser givet ved stedvektoren:

(2) $$\vec{r}_T = \frac{m_1 \cdot \vec{r}_1 + m_2 \cdot \vec{r}_2 + \ldots + m_n \cdot \vec{r}_n}{M}$$

hvor igen $M = m_1 + m_2 + \ldots + m_n$ er systemets samlede masse. Problemet bliver sværere, når man har at gøre med en *kontinuert massefordeling*. Her kan man ikke umiddelbart summere op som ovenfor, da der er uendeligt mange partikler i systemet. For at løse problemet er det hensigtsmæssigt at anvende *integralregning*. Hvis man har at gøre med en *plan* massefordeling på formen:

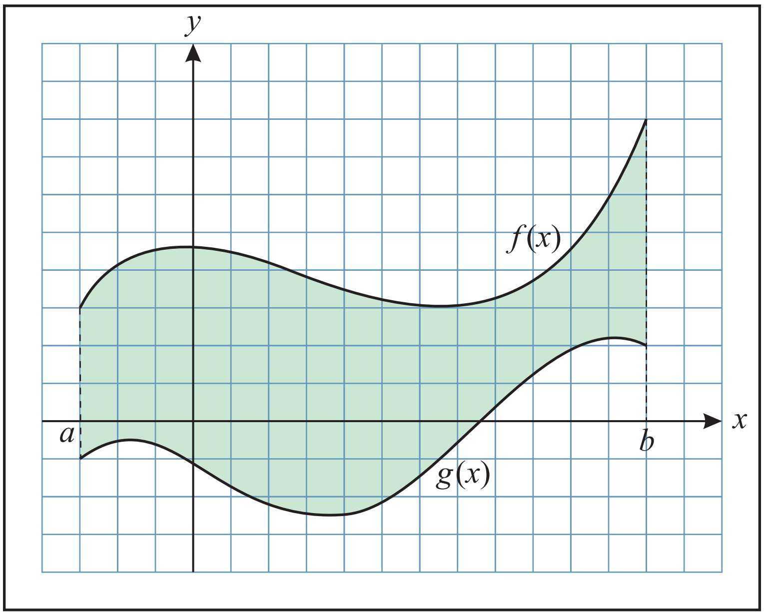
$$\left\{ (x, y, z) \,\middle|\, a \le x \le b \;\wedge\; g(x) \le y \le f(x) \;\wedge\; z = z_0 \right\}$$

så viser det sig, at tyngdepunktet $\vec{r}_T = (x_T, y_T, z_T)$ kan findes ved

(3)

$$x_T = \frac{\int_a^b x \cdot (f(x) - g(x))dx}{\int_a^b (f(x) - g(x))dx} \quad ; \qquad y_T = \frac{\frac{1}{2} \cdot \int_a^b \left((f(x))^2 - (g(x))^2 \right) dx}{\int_a^b (f(x) - g(x))dx} \quad ; \qquad z_T = z_0$$

Mængden er illustreret på figuren nedenfor. Det ses, at området i y-aksens retning er begrænset af graferne for to funktioner f og g. Det skal endvidere nævnes, at formlernes gyldighed som forudsætning har, at massefylden overalt i det plane lag er konstant!



I opgave 1 og 2 kan du bestemme tyngdepunkter og i den lidt sværere opgave 3 kan du forsøge at bevise formlerne (3) ved at benytte en teknik a lá den beskrevet i eksempel 1.

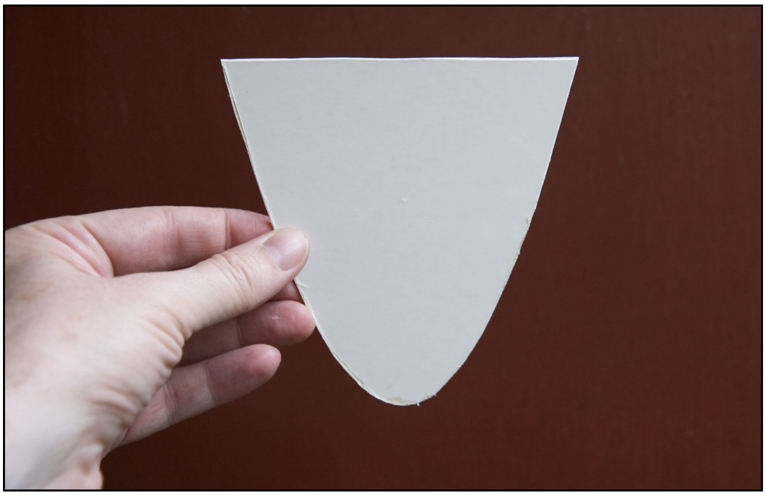
□

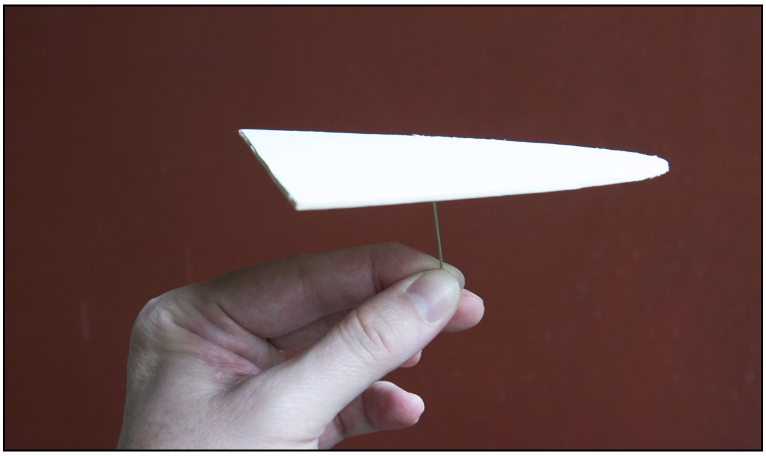
Opgaver

Opgave 1

Betragt følgende plane mængde: $\left\{ (x,y,z) \,\middle|\, -2 \leq x \leq 2 \;\wedge\; x^2 \leq y \leq 4 \;\wedge\; z = 0 \right\}$

a) Tegn eventuelt situationen på grafregneren for at se, hvordan mængden ligger.
b) Bestem områdets areal først i hånden og kontroller bagefter med grafregneren.
c) Benyt (3) til at finde tyngdepunktet for figuren. Benyt gerne grafregneren hertil.
d) Klip figuren ud af et stykke tykt karton og afmærk tyngdepunktet: Kan du balancere figuren i dette punkt? (Lav et lille hul, så nålespidsen ikke glider!)





Opgave 2

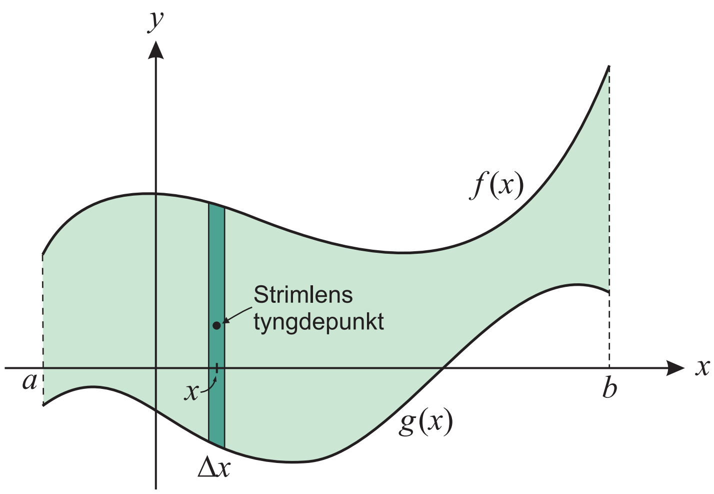
Betragt følgende plane mængde: $\left\{ (x,y,z) \,\middle|\, 0 \leq x \leq \pi \;\wedge\; 0 \leq y \leq \sin(x) \;\wedge\; z = 0 \right\}$

a) Tegn eventuelt situationen på grafregneren for at se, hvordan mængden ligger. Husk at sætte maskinen til at regne vinkler i radianer!
b) Bestem områdets areal først i hånden og kontroller bagefter med grafregneren.
c) Benyt (3) til at finde tyngdepunktet for figuren. Benyt gerne grafregneren hertil.

Opgave 3 (Bevis for (3))

I denne opgave skal du forsøge at bevise formlerne for tyngdepunktet i (3).

Hjælp: Indse for det første, at man ligeså godt kan vægte med arealer frem for med masser, da massefordelingen antages jævn i det plane område. Inddel området i strimler med bredden Δx parallelle med y-aksen, som antydet på figuren nedenfor. Vis, at strimlen omkring x omtrent har et areal, som er lig med $(f(x)-g(x))\cdot\Delta x$ og at koordinaterne for strimlens tyngdepunkt er ca. $(x, \frac{1}{2}(f(x)+g(x)))$. Summer over alle strimler, idet du vægter tyngdepunkterne med deres respektive arealbrøkdele. Benyt endelig teknikken med at lade inddelingen blive finere og finere, så summerne nærmer sig til et integrale. Bemærk, at der i nævnerne i (3) står det samlede areal af figuren!



Opgave 4

Find selv på en interessant figur og find dets tyngdepunkt. Klip dernæst figuren ud af et stykke karton og afmærk tyngdepunktet: Kan du balancere figuren i dette punkt?

Opgave 5

Søg på Internettet om fakta og teori omkring emnet *tyngdepunkt*. Husk, at begrebet også betegnes *massemidtpunkt* og på engelsk *center of mass*. Fremlæg resultaterne i klassen.

Opgave 6 (Vægtstangsprincippet – lidt svær!)

Som nævnt på side 3, så vil en vægtstang være balanceret, såfremt det samlede kraftmoment på systemet er $\vec{0}$. I tilfældet med lodderne på vægtstangen fås kraftmomentets størrelse ved at gange tyngdekraften $m\cdot g$ for hver objekt i systemet med dets afstand (regnet med fortegn!) til balancepunktet:

$$m_1\cdot g\cdot(x_1-x_T)+m_2\cdot g\cdot(x_2-x_T)+m_3\cdot g\cdot(x_3-x_T)=0$$

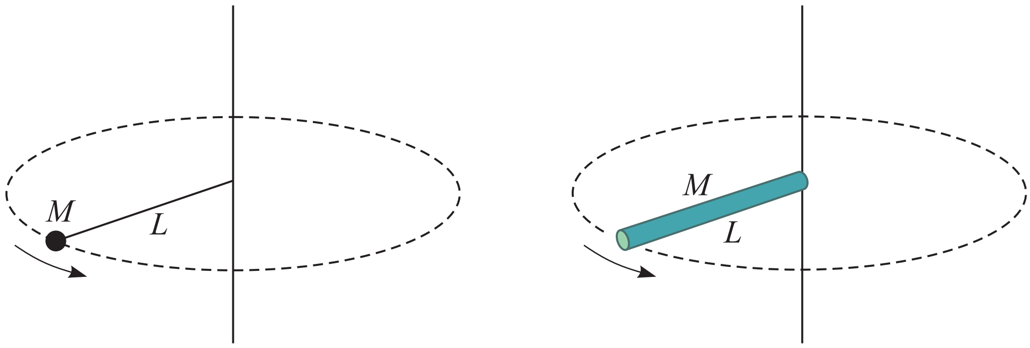
Vis, at dette er ensbetydende med (1).

Opgave 7 (Tyngdepunkt af trekant)

En trekants tyngdepunkt er i medianernes skæringspunkt. Afprøv dette i praksis. Lidt sværere: Prøv at argumentere for, at en trekant kan balancere omkring enhver af dens medianer. *Hjælp*: Benyt et parallelforskydningsargument for at danne symmetri!

Opgave 8 (Inertimoment)

Et vigtigt begreb i mekanikken er det såkaldte *inertimoment*. Når ingeniører designer mekaniske apparater, hvori der er drejelige dele er det vigtigt at tage højde for denne størrelse. Inertimomentet beskriver *trægheden* i de roterbare dele. Det mest simple tilfælde er hvor man har en masse M, som kan betragtes som punktformig, og som roterer omkring en akse. På venstre del af figuren herunder er den punktformige masse anbragt for enden af en tynd stang, vi kan betragte som masseløs. Stangens længde betegnes med L og roterer om den lodrette akse. Per definition er inertimomentet I af dette system lig med $I = M \cdot L^2$. Af dette udtryk ses det, at inertimomentet bliver større jo længere massen er fra omdrejningsaksen!



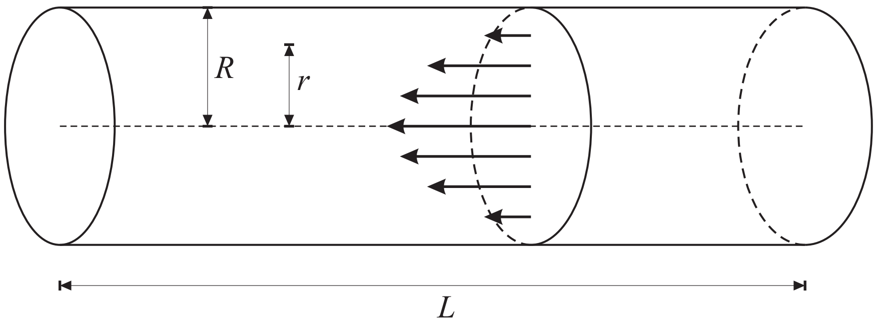
Et interessant spørgsmål er nu, hvad der sker med inertimomentet, hvis al massen ikke er samlet i et punkt for enden af stangen, men er fordelt jævnt langs stangen. I det følgende skal du betragte stangen som bestående af en masse små masser. Situationen er vist på figuren til højre.

a) Hvorfor er det intuitivt klart, at inertimomentet må være mindre end i situationen til venstre?
b) Vis, ved at inddele i en masse små dele, at inertimomentet af den homogene stang til højre er lig med $I = \frac{1}{3}ML^2$. *Hjælp*: Vis, at massen af en lille del af stangen med længden Δx er lig med $M \cdot \Delta x / L$.
c) Betragt nu situationen, hvor en tynd cirkulær skive roterer omkring en akse, der går gennem skivens centrum og er vinkelret derpå. Vis, at $I = \frac{1}{2}MR^2$, hvor R er skivens radius.
d) Undersøg begrebet inertimoment yderligere på Internettet.

NB! I øvrigt kan det nævnes, at hvis man har en legemes inertimoment I og kender *vinkelhastigheden* ω i rotationen, så er rotationsenergien lig med $E_{\text{rot}} = \frac{1}{2}I\omega^2$.

Opgave 9 (Strømning i blodkar)

Formen af et blodkar (vene eller arterie), kan modelleres med en cylinder med radius R og længde L, som illustreret på figuren nedenfor.



På grund af friktionen langs blodkarrets væg, er blodets hastighed v størst i midten af blodkarret og aftager mod 0 ud mod væggen. Sammenhængen mellem hastigheden og afstanden r fra cylinderaksen kaldes *the law of laminar flow* og blev opdaget i 1840 af den franske fysiker *Jean-Louis-Marie Poiseuille* og lyder:

(4) $$v = \frac{\Delta p}{4\eta L}\cdot(R^2 - r^2)$$

hvor η betegner blodets viskositet og Δp er trykforskellen mellem enderne af cylinderen. Hvis Δp og L er konstante, så angiver (4) hastigheden som funktion af r, hvor $r \in [0, R]$.

a) Den gennemsnitlige hastighedsændring, når man bevæger sig udad fra $r = r_1$ til $r = r_2$ er naturligt nok givet ved

$$\frac{\Delta v}{\Delta r} = \frac{v(r_2) - v(r_1)}{r_2 - r_1}$$

Når man lader $\Delta r \to 0$, vil differenskvotienten nærme sig til differentialkvotienten $v'(r)$. Bestem et udtryk for denne størrelse, som i øvrigt betegnes *hastigheds-gradienten*. For en af menneskets mindre arterier kan man bruge følgende værdier: $\eta = 0{,}027$, $R = 0{,}008\,\text{cm}$, $L = 2\,\text{cm}$ og $P = 4000\,\text{dynes/cm}^2$. Bestem hastigheden, når $r = 0{,}003\,\text{cm}$, og bestem hastighedsgradienten for samme værdi af r.

b) I dette spørgsmål skal du udlede følgende udtryk for strømmen eller fluxen F igennem blodkarret:

(5) $$F = \frac{\pi\cdot\Delta p\cdot R^4}{8\cdot\eta\cdot L}$$

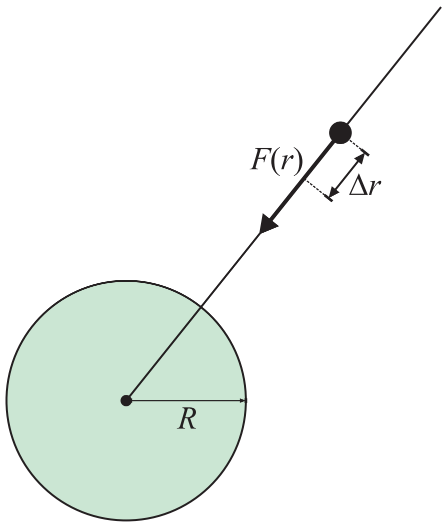
Flux er volumen (blod) pr. tidsenhed. Udtrykket (5) kaldes for *Poiseuilles lov*. *Hjælp*: Da hastigheden langs blodkarrets væg er mindre end langs dets akse, må du foretage en integration. En hensigtsmæssig inddeling er at kigge på ringe omkring aksen, for heri er blodets hastighed omtrent konstant. Hvis du bedre kan finde ud af det, når den variable hedder x, så kan du eventuelt udskifte r med x. Der skal integreres fra 0 til R.

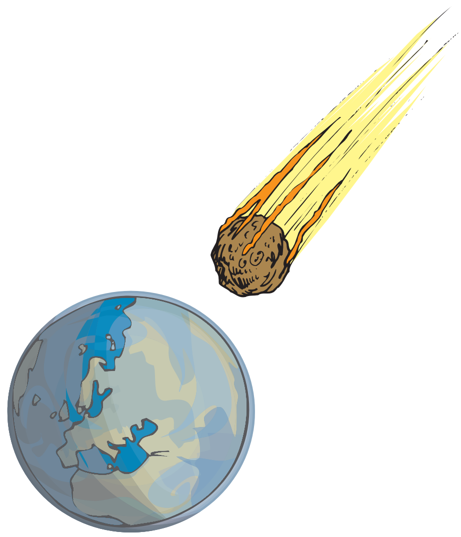
Opgave 10 (Jordens tyngdefelt)

Den store britiske fysiker Isaac Newton opdagede i 1600-tallet massetiltrækningsloven, som siger, at to masser m og M i den indbyrdes afstand r påvirker hinanden med en kraft af følgende størrelse, hvor G er *gravitationskonstanten*:

(6) $$F = G \cdot \frac{m \cdot M}{r^2}$$

Kraften på den ene masse er endvidere rettet mod tyngdepunktet af den anden masse. På figuren nedenfor ser du et meteor, som kommer ind i Jordens tyngdefelt og har retning direkte mod Jordens centrum.





Som bekendt er det mekaniske arbejde, som en kraft F udfører på et legeme lig med ”kraft gange vej”, når kraften og bevægelsesretningen er ensrettede, hvilket er tilfældet her. Vi ønsker at beregne det arbejde, som tyngdekraften udfører på meteoren fra den kommer fra det uendelige fjerne til den lander på Jordens overflade. Der er imidlertid en komplikation: Kraften er ikke den samme hele vejen; faktisk bliver den større og større jo nærmere meteoret kommer Jorden. Derfor er man nødt til at dele problemet op i små vejstykker, hvor kraften kan regnes konstant. I det følgende kan vi regne med følgende værdier $R = 6367000\text{ m}$, $M = 5{,}974 \cdot 10^{24}\text{ kg}$, $G = 6{,}6726 \cdot 10^{-11}\text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$ for henholdsvis Jordens radius, masse samt gravitationskonstanten.

a) Vis ved at integrere fra R til ∞, at det arbejde A, som Jordens tyngdekraft udfører på meteoret med masse m, fås af følgende formel: $A = \dfrac{G \cdot m \cdot M}{R}$

b) Når en raket skydes fra Jordens overflade ud i rummet, så skal raketten overvinde tyngdekraften, dvs. den skal have tilført lige så megen energi som angivet ved formlen i spørgsmål a). Det kan ske ved at den har en stor kinetisk energi fra starten. Vis, at raketten skal have en fart af 11,2 km/s (den såkaldte *escape-hastighed*), for at kunne komme (uendeligt langt) ud i rummet.

Opgave 11 (En skæv pyramide)

I denne opgave skal du bevise, at rumfanget af en helt vilkårlig pyramide med grundflade G og højde H er lig med $\frac{1}{3} \cdot H \cdot G$.

a) Foretag et vandret snit i pyramiden, stykket x under toppunktet. Benyt ensvinklede trekanter til at argumentere for, at arealet af snittet må være lig med $(x/H)^2 \cdot G$.

b) Skær et tyndt lag med tykkelsen Δx af pyramiden i den lodrette afstand x fra toppen, som vist på figuren nedenfor til højre. Angiv et omtrentligt udtryk for lagets volumen.

c) Opskær hele pyramiden i lag som under punkt b) og summer deres rumfang. Opstil et integrale, som angiver pyramidens rumfang, og udregn det. Stemmer resultatet med formlen ovenfor?

d) Grundfladen behøver hverken være et kvadrat eller et rektangel. Gælder formlen for rumfanget også, hvis figuren har en helt vilkårlig form som grundflade?