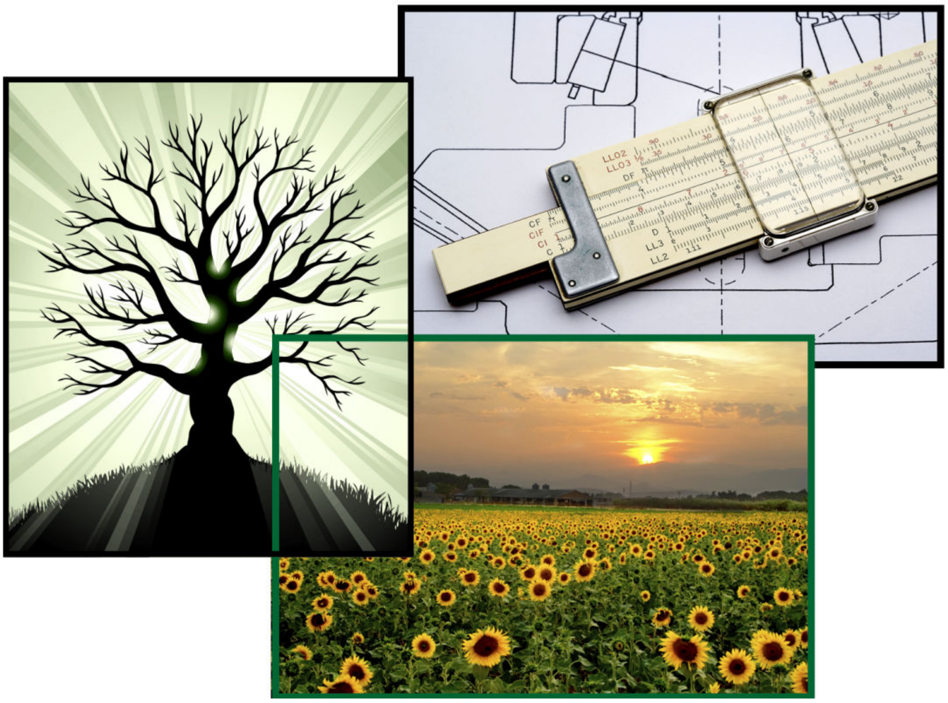
Eksponentielle Funktioner



Billeder:

Forside:	Collage af foto fra blandt andet:
	©iStock.com/chuntise
	©iStock.com/ihoe
Side 11:	©iStock.com/jamesbenet
Side 14:	Tegning af John Napier
Side 22:	©iStock.com/Icsdesign
Side 37:	©iStock.com/tmcnem
Side 39:	©iStock.com/Mistercheezit
Side 45:	©iStock.com/fotoVoyager (øverst)

Desuden egne fotos og illustrationer.

1. Potenser og potensregler

Hvis $a \in R$ og n er et helt, positivt tal, så er *potensen* a^n som bekendt defineret ved:

$$a^n = \overbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{n \text{ stk}} \qquad (1)$$

Tallet n kaldes for *eksponenten* og a kaldes *grundtallet* eller *roden*. Vi siger, at *a er opløftet i n'te* potens. Imidlertid vil man også gerne kunne arbejde med eksponenter, som er negative eller, som ikke er hele tal. Men hvordan skal de defineres? Definition (1) kan vi ikke bruge til noget, da man jo for eksempel ikke kan have et negativt antal! Derfor må man ty til andre metoder til at *udvide potensbegrebet*. Lad os ikke gå i detaljer med det her, blot henvise den interesserede læser til appendiks A. På dette sted skal det blot nævnes, at det kan lade sig gøre at definere a^x, hvor $a \in R_+$, $x \in R$, så følgende *potensregler* gælder:

1) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ 2) $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$ 3) $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$	4) $(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$ 5) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$	6) $a^0 = 1$ 7) $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$ 8) $a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p}$

Man bemærker, at vi har måttet begrænse os til en *positiv* rod a for at kunne definere potensen for enhver reel eksponent x. Til venstre har vi de tre potensregler, hvor vi har at gøre med potenser med det *samme* grundtal a. I midten er der yderligere to potensregler, som omhandler potenser med forskellig grundtal, men ens eksponent: Udvidelsen af potensbegrebet medfører desuden, at man har de tre regler i højre kolonne.

Eksempel 1

Ved brug af de første tre potensregler kan vi udregne følgende:

$$\frac{(2a)^3 \cdot b^2}{4 \cdot a \cdot b^5} = \frac{2^3 \cdot a^3 \cdot b^2}{4 \cdot a^1 \cdot b^5} = \frac{8}{4} \cdot a^{3-1} \cdot b^{2-5} = 2 \cdot a^2 \cdot b^{-3}$$

Eksempel 2

Her bruger vi flere af potensreglerne, blandt andet regel 8):

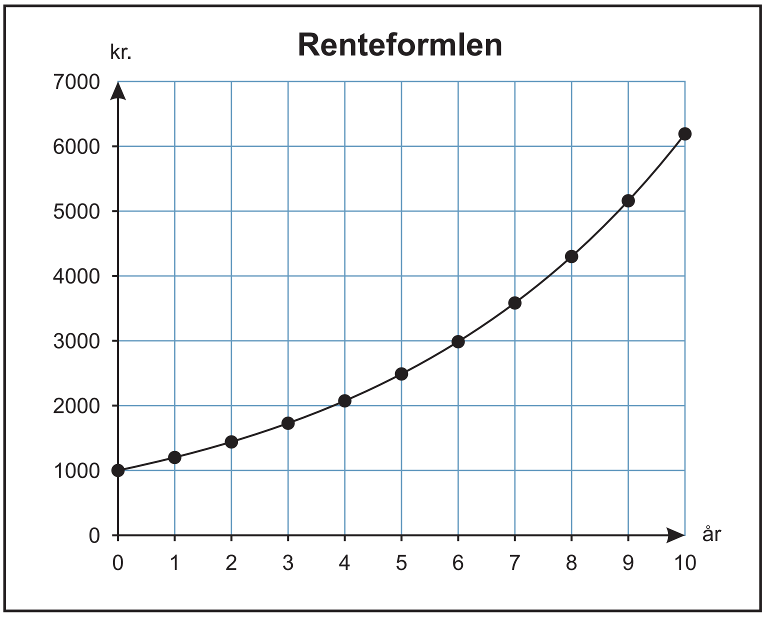
$$\left(\frac{b}{a}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt[3]{b}} = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{(a \cdot b)^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{3}}} = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{a^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{3}}} = a^{-2+\frac{1}{2}} \cdot b^{2+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}} = a^{-\frac{3}{2}} \cdot b^{\frac{13}{6}}$$

2. Indledning

I forrige kapitel så vi på funktioner af typen $f(x) = ax + b$, nemlig de *lineære funktioner*. I dette kapitel skal vi undersøge funktioner, hvor den ubekendte x står i eksponenten, nærmere bestemt funktioner af typen $f(x) = b \cdot a^x$ eller sagt på en anden måde: variabelsammenhængen $y = b \cdot a^x$. Først skal vi se et eksempel, hvor den nye funktionstype kommer i sving.

Eksempel 3

Ifølge renteformlen $K = K_0 \cdot (1+r)^n$, så vil en startkapital på 1000 kr., der står til en årlig rente på 20%, vokse til beløbet $K = 1000 \cdot (1+0,20)^n = 1000 \cdot 1,20^n$ i løbet af n år. Figuren nedenfor viser beløbets udvikling som funktion af antal år efter startbeløbet blev indsat. Hvis vi lader y svare til K, b svare til 1000, a svare til 1,20 og x svare til n, så kan vi se, at vi har at gøre med en eksponentiel funktion: $y = b \cdot a^x = 1000 \cdot 1,20^x$. Den eneste bemærkning er, at renteformlen kun har mening for hele værdier af n (svarende til x), da der kun tilskrives renter én gang hvert år. Derfor viser figuren med punkter kontoens årlige opdaterede saldoer. For overskuelighedens skyld har vi afbildet den forbindende graf for alle reelle værdier af x. Man ser, at saldoen vokser hurtigere end lineært på grund af *renters rente*.



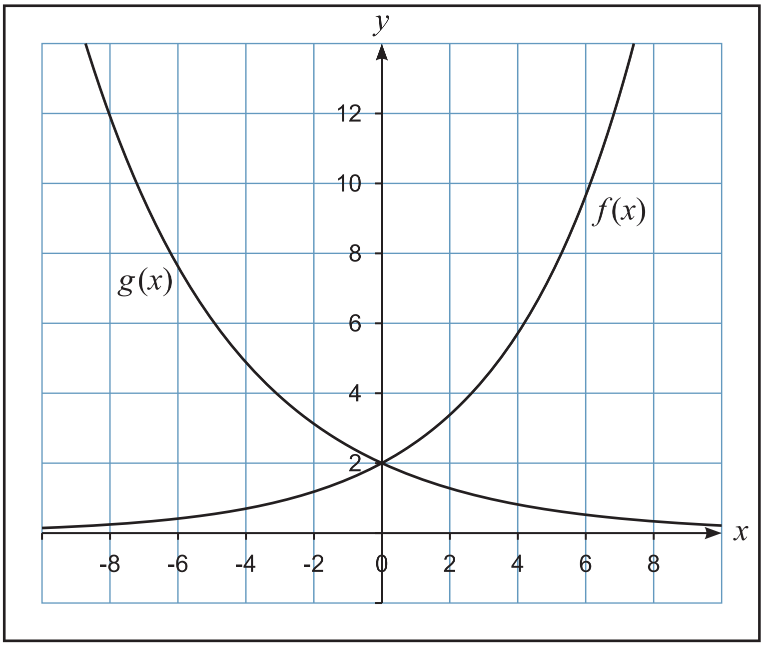
Definition 4

En funktion på formen $f(x) = b \cdot a^x$, hvor $a, b \in R_+$, kaldes for en *eksponentiel funktion* eller en *eksponentiel udvikling*. Funktionen er defineret for *alle* x, så $\text{Dm}(f) = R$. Man kan vise, at værdimængden for f er alle positive tal, dvs. $\text{Vm}(f) = R_+$. Hvis $b = 1$, så kaldes funktionen for en *eksponentialfunktion*.

Eksempel 5

Nedenfor er afbildet graferne for to forskellige eksponentielle funktioner:

$f(x) = 2\cdot 1{,}3^x$ og $g(x) = 2\cdot 0{,}8^x$.



Vi ser, at begge grafer skærer *y*-aksen i $(2,0)$. Som du måske kan gætte, har det noget med *b*-leddet at gøre. Men hvad siger *grundtallet a* noget om? I den næste sætning skal vi udlede nogle egenskaber for eksponentielle funktioner og deres grafer.

Sætning 6

a) Grafen for f skærer *y*-aksen i $(0,b)$.

b) Når *x* øges med 1, så *fremskrives* (ganges) *y*-værdien med *a*.

c) Når *x* øges med Δx, så *fremskrives* (ganges) *y*-værdien med $a^{\Delta x}$.

d) Funktionen er *voksende*, hvis $a > 1$, *aftagende*, hvis $0 < a < 1$ og *konstant*, hvis $a = 1$.

Bevis: $f(0) = b\cdot a^0 = b\cdot 1 = b$, idet vi benytter potensregel 6). Dette viser a). For at vise b) indsætter vi $x+1$ i forskriften for *f*:

(2) $$f(x+1) \;=\; b\cdot a^{x+1} \;=\; b\cdot a^x\cdot a^1 \;=\; (b\cdot a^x)\cdot a \;=\; f(x)\cdot a$$

hvor vi for at få andet lighedstegn har benyttet potensregel 1). Udregningen (2) viser, at hvis vi giver *x* en tilvækst på 1, så bliver den nye funktionsværdi eller *y*-værdi *a* gange så stor som den forrige funktionsværdi.

Punkt c) fås på lignende måde som punkt b):

(3) $$f(x+\Delta x) \;=\; b\cdot a^{x+\Delta x} \;=\; b\cdot a^x\cdot a^{\Delta x} \;=\; (b\cdot a^x)\cdot a^{\Delta x} \;=\; f(x)\cdot a^{\Delta x}$$

Hvad angår d), så kan vi bruge punkt c): Hvis x får en *positiv* tilvækst på Δx, så skal funktionsværdien fremskrives med $a^{\Delta x}$. Hvis $a>1$, så er $a^{\Delta x}>1$, som viser at funktionsværdien vokser. Tilsvarende med de to andre tilfælde.

□

Bemærkning 7

Ikke nok med at funktionen f i eksempel 5 er voksende. Der gælder også, at *funktionsværdierne går mod uendelig for x gående mod uendelig*. I matematikken bruges følgende notation for dette fænomen: $f(x)\to\infty$ for $x\to\infty$. Man kan altså få vilkårligt store funktionsværdier, bare man vælger et tilstrækkeligt stort x. Desuden haves, at funktionsværdierne går mod 0, når x går mod minus uendelig, hvilket skrives $f(x)\to 0$ for $x\to-\infty$. Overvej selv, hvad der gælder for funktionen g.

Definition 8

Grundtallet a kaldes også for *fremskrivningsfaktoren* svarende til en tilvækst på 1 på x-aksen, mens $a^{\Delta x}$ mere generelt kan betegnes fremskrivningsfaktoren svarende til en tilvækst på Δx på x-aksen.

Eksempel 9 (Procentvis vækst)

Hvis man lægger 30% til et tal, så ganges eller *fremskrives* tallet som bekendt med $1+r=1+0{,}30=1{,}3$. I stedet for at sige, at y-værdien ganges med 1,3 hver gang x øges med 1, så kan man lige så godt sige, at y-værdien øges med 30%, hver gang x øges med 1. Sammenhængen mellem renten og fremskrivningsfaktoren er $a=1+r$. Hvad angår funktionen g i eksempel 5, så vil en tilvækst på 1 på x-aksen resultere i, at y-værdien øges med $r=a-1=0{,}8-1=-0{,}20=-20\%$. Det negative fortegn tolkes derved at y-værdien *reduceres* med 20% hver gang x gives en tilvækst på 1. Endelig kunne man overveje hvad en x-tilvækst på 2 betyder for funktionen f: $a^{\Delta x}=1{,}3^2=1{,}69$, så y-værdien vokser altså med $r=a^{\Delta x}-1=1{,}69-1=0{,}69=69\%$. Årsagen til, at funktionsværdien vokser med mere end det dobbelte ved en x-tilvækst på 2 er, at der er tale om *renters rente*. Diskussionen i dette eksempel kan samles i følgende sætning:

Sætning 10

For en eksponentiel funktion gælder, at samme tilvækster i x giver samme *procentvise* tilvækster i y.

Lad os for en kort stund sammenligne *eksponentielle funktioner* med *lineære funktioner*: a i forskriften $y = ax + b$ for en lineær funktion angiver dét, man skal *lægge til* y-værdien, når x-værdien øges med 1. a i forskriften $y = b \cdot a^x$ for en eksponentiel funktion angiver derimod det, som man skal *gange* y-værdien *med*, når x-værdien øges med 1. Fælles for funktionerne er, at b angiver skæringen med y-aksen. Vi har tidligere set, at man kan bestemme forskriften for en lineær funktion, når man kender to punkter på dens graf. Dette er også tilfældet med eksponentielle funktioner, som vi skal se i det følgende.

Sætning 11

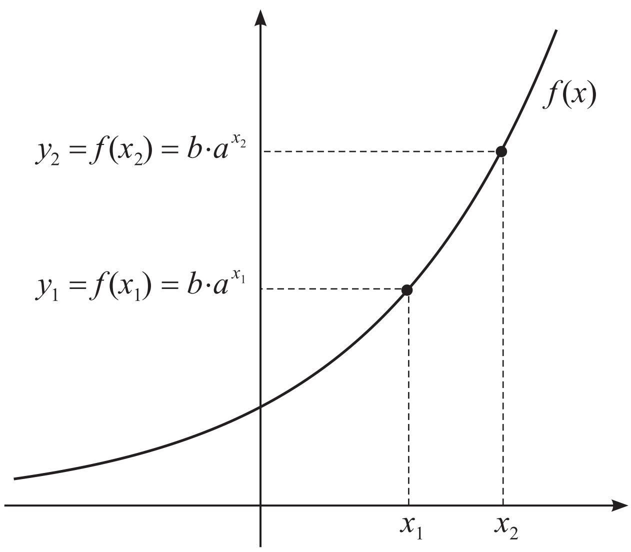
Lad (x_1, y_1) og (x_2, y_2) være to punkter for grafen for en eksponentiel funktion med forskrift $f(x) = b \cdot a^x$. Fremskrivningsfaktoren (grundtallet) a, kan da bestemmes af følgende formel:

(4)
$$a = \sqrt[x_2 - x_1]{\frac{y_2}{y_1}}$$

Bevis: Da punkterne ligger på grafen, haves $y_1 = b \cdot a^{x_1}$ og $y_2 = b \cdot a^{x_2}$, som angivet på figuren nedenfor. Her skal x_1, x_2, y_1 og y_2 antages at være kendte. Derimod er a og b ukendte. Man ser snedigt, at man kan skaffe sig af med den ene ubekendte, b, ved at tage forholdet mellem de to y-værdier:

(5)
$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{b \cdot a^{x_2}}{b \cdot a^{x_1}} = \frac{a^{x_2}}{a^{x_1}} = a^{x_2 - x_1}$$

hvor vi blandt andet har brugt potensregel 2). For at isolere a tages den $(x_2 - x_1)$'te rod på begge sider i (5). Herved fås formel (4).



□

Eksempel 12

Bestem forskriften for den eksponentielle funktion, hvis graf går igennem de to punkter $(-2,5)$ og $(5,30)$. Løsning:

$$a \;=\; \sqrt[x_2-x_1]{\frac{y_2}{y_1}} \;=\; \sqrt[5-(-2)]{\frac{30}{5}} \;=\; \sqrt[7]{6} \;=\; 1,2917$$

For at bestemme b indsættes ét af de to opgivne datapunkter, ligegyldigt hvilket:

$$y = b\cdot a^x \quad\Leftrightarrow\quad b \;=\; \frac{y}{a^x} \;=\; \frac{30}{1,2917^5} \;=\; 8,3426$$

Altså fås $y = 8,3426 \cdot 1,2917^x$.

□

Eksempel 13

Tabellen nedenfor viser støttepunkterne for en eksponentiel funktion. Resten af tabellen ønskes udfyldt.

x	–2	–1	0	1	3
y		5	7		

I princippet kunne vi benytte samme metode som i eksempel 12, da vi kender to støttepunkter på grafen for f – altså bestemme forskriften for funktionen og derefter indsætte de tre x-værdier, for hvilke y-værdierne er ukendte. Vi kan dog også benytte principperne i sætning 6. Fra $x = -1$ til $x = 0$ er x vokset med 1. På samme tid er y blevet multipliceret med 1,4, da $7/5 = 1,4$. Ifølge sætning 6b) er a derfor lig med 1,4. Næste tilvækst i x er også på 1, så vi skal også her gange y med 1,4, så vi får $7 \cdot 1,4 = 9,8$. Næste x-tilvækst er på 2, hvorfor y-værdien skal ganges med $1,4^2$, ifølge sætning 6c). Det giver $9,8 \cdot 1,4^2 = 19,208$. Til sidst får vi y-værdien i –2 ved at give x en negativ tilvækst på –1. Ifølge sætning 6c) skal y da ganges med $a^{\Delta x} = 1,4^{-1}$, hvilket i øvrigt svarer til at dividere med 1,4. Vi får y-værdien i –2 til $5 \cdot 1,4^{-1} = 3,5714$.

-1 $+1$ $+1$ $+2$

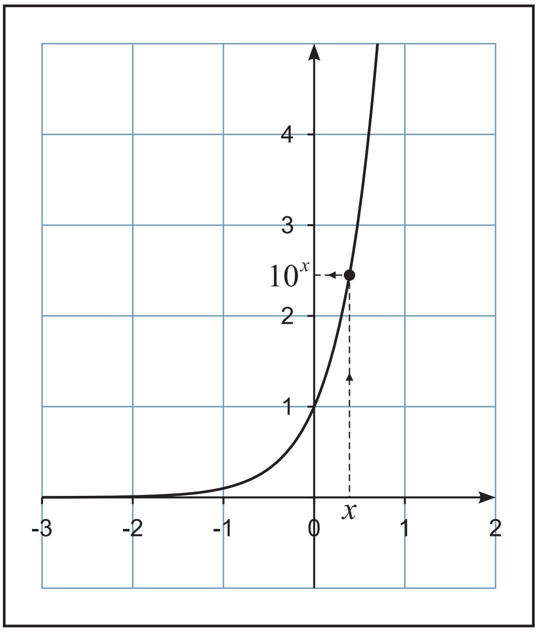
x	–2	–1	0	1	3
y	3,5714	5	7	9,8	19,208

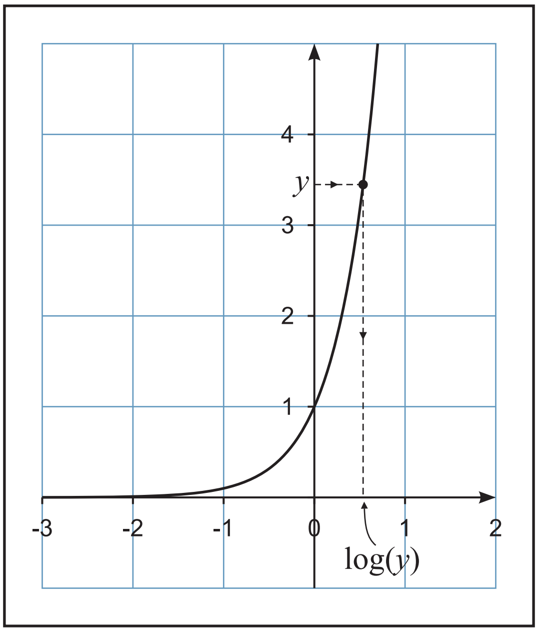
$\cdot 1,4^{-1}$ $\cdot 1,4$ $\cdot 1,4$ $\cdot 1,4^2$

Som en sidekommentar skal det lige bemærkes, at vi faktisk kan angive forskriften direkte her, da b jo er funktionsværdien i 0. Vi får $y = 5 \cdot 1,4^x$.

3. Titalslogaritmen

Nedenfor er afbildet grafen for eksponentialfunktionen $f(x) = 10^x$. Hvis vi fra et givet x på x-aksen går lodret op til grafen og herfra vandret ud til y-aksen, finder vi altså 10^x. Men hvis vi omvendt kender en y-værdi på y-aksen, kan vi så finde en x-værdi, som afbildes i y? Svaret er ja, hvis $y > 0$. Og x-værdien er endda *entydigt* bestemt, eftersom f er en *voksende* funktion (Overvej!). Denne værdi for x vil vi betegne $\log(y)$, som vist på figuren til højre. Dette giver anledning til den såkaldte *logaritmefunktion*.





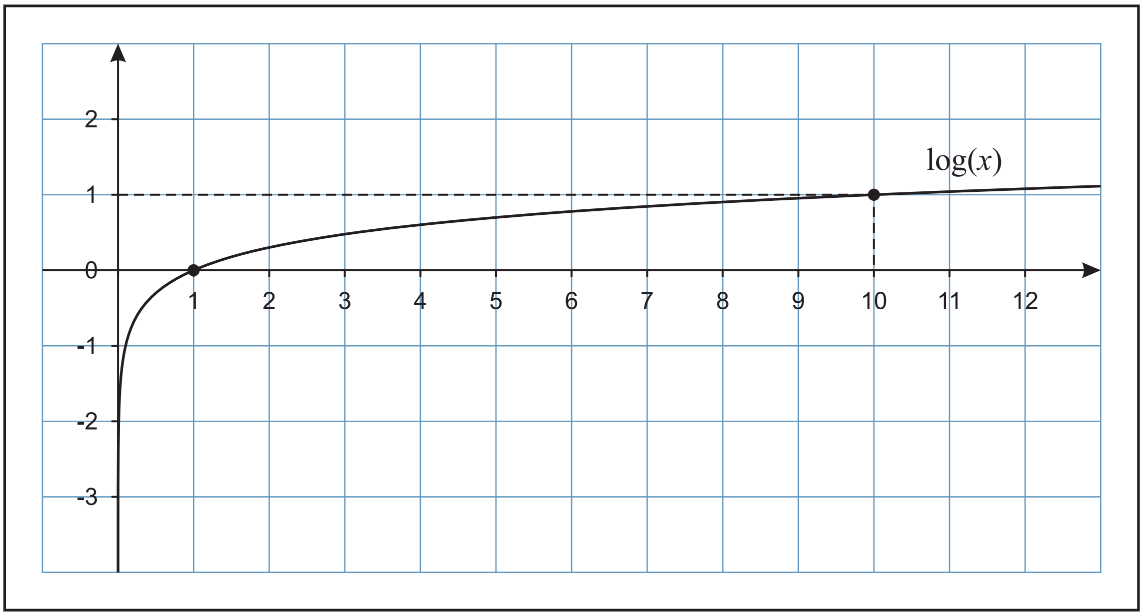
Logaritmefunktionen er altså karakteriseret ved at være den *omvendte* eller *inverse* funktion til $f(x) = 10^x$. Hermed menes, at hvis man først benytter den ene funktion og derefter den anden, så kommer man tilbage til udgangspunktet:

(6) $$\log(10^x) = x \quad \text{for } x \in R$$

(7) $$10^{\log(y)} = y \quad \text{for } y \in R_+$$

Funktionerne 10^x og log ophæver altså hinandens virkning. Derfor kaldes 10^x også undertiden for *antilogaritmen*. Fra teorien om omvendte funktioner har vi endvidere, at grafen for $\log(x)$ fås ved at spejle grafen for 10^x i linjen med ligning $y = x$. Denne graf kan ses på figuren på næste side. Samtidigt får vi definitionsmængden og værdimængden for logaritmen til $\mathrm{Dm}(\log) = \mathrm{R}_+$ og $\mathrm{Vm}(\log) = \mathrm{R}$.

Ifølge (6) haves $\log(1) = \log(10^0) = 0$; $\log(10) = \log(10^1) = 1$; $\log(100) = \log(10^2) = 2$, etc. Ved at se på negative eksponenter af 10 fås for eksempel $\log(0{,}1) = \log(10^{-1}) = -1$; $\log(0{,}01) = \log(10^{-2}) = -2$, etc. Selv om logaritmefunktionen vokser meget langsomt, så har vi alligevel, at y-værdierne nærmer sig til ∞, når x nærmer sig til uendelig. Vi skriver $\log(x) \to \infty$ for $x \to \infty$. Vi har også, at y-værdierne nærmer sig til $-\infty$, når x nærmer sig til 0 fra højre, dvs: $\log(x) \to -\infty$ for $x \to 0^+$.



Nu til nogle vigtige egenskaber for logaritmefunktionen. Vi skal udnytte, at logaritmen er den omvendte funktion til 10^x samt udnytte potensreglerne.

Sætning 14
Om logaritmefunktionen gælder følgende regler:

1) $\log(a \cdot b) = \log(a) + \log(b)$ for $a, b \in R_+$
2) $\log(a/b) = \log(a) - \log(b)$ for $a, b \in R_+$
3) $\log(a^x) = x \cdot \log(a)$ for $a \in R_+,\ x \in R$

Bevis: Lad os først bevise logaritmeregel 1):

$$\log(a \cdot b) \;=\; \log\left(10^{\log(a)} \cdot 10^{\log(b)}\right) \;=\; \log\left(10^{\log(a)+\log(b)}\right) \;=\; \log(a) + \log(b)$$

hvor vi i første lighedstegn har udnyttet, at a og b kan skrives som henholdsvis $10^{\log(a)}$ og $10^{\log(b)}$ ifølge (7). Andet lighedstegn fås ved at benytte potensregel 1). Endelig fås tredje lighedstegn ved at udnytte (6) – dvs. at 10^x og log ophæver hinandens virkning. Logaritmeregel 2) bevises på helt analog vis. Lad os slutte af med at bevise logaritme-regel 3:

$$\log(a^x) \;=\; \log\left(\left(10^{\log(a)}\right)^x\right) \;=\; \log\left(10^{x \cdot \log(a)}\right) \;=\; x \cdot \log(a)$$

hvor vi i første lighedstegn har udnyttet, at a kan skrives som $10^{\log(a)}$. I andet lighedstegn udnyttes potensregel 3), og endelig fås tredje lighedstegn igen ved at benytte (6).

□

Eksempel 15

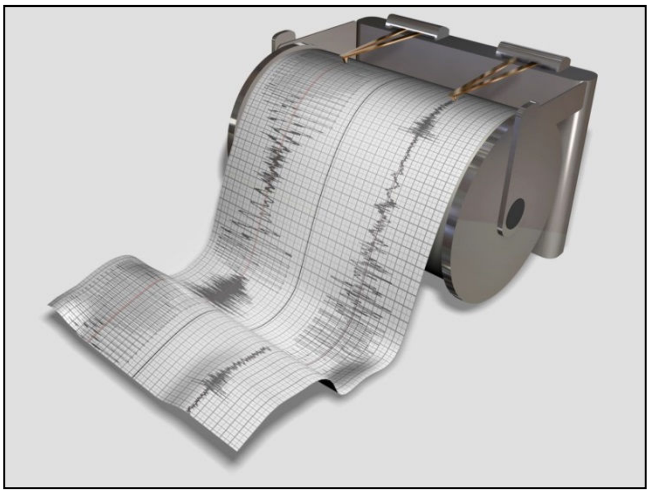
Lad $y = 4 \cdot 1{,}25^x$. Logaritmereglerne kan bruges til for eksempel at løse ligningen $y = 7$. Vi skal altså løse følgende ligning, hvor den ubekendte variabel x står i eksponenten: $4 \cdot 1{,}25^x = 7$. Regningerne går som følger:

$$
\begin{aligned}
& 4 \cdot 1{,}25^x = 7 \\
\Updownarrow \\
& 1{,}25^x = \tfrac{7}{4} \\
\Updownarrow \\
& \log(1{,}25^x) = \log(\tfrac{7}{4}) \\
\Updownarrow \\
& x \cdot \log(1{,}25) = \log(\tfrac{7}{4}) \\
\Updownarrow \\
& x = \frac{\log(\tfrac{7}{4})}{\log(1{,}25)} = 2{,}5079
\end{aligned}
$$

For at komme fra linje 3 til linje 4 har vi benyttet logaritmereglen 3) fra sætning 14. Bemærk i øvrigt, at der gælder ensbetydende mellem linje 2 og 3, fordi man kan komme både frem og tilbage ifølge (6) og (7) fra tidligere.

□

Eksempel 16 (Jordskælv)



I 1935 indførte *Charles F. Richter* i samarbejde med *Beno Gutenberg* den berømte *Richter-skala* til beskrivelse af størrelsen af et jordskælv. På et tidspunkt overvejede Richter at lade udslagets størrelse på en *seismograf* – med en passende korrektion for afstanden til jordskælvet – være et udtryk for jordskælvets størrelse. Imidlertid viste det sig, at forskellen på de mindste og største jordskælv var for store. Richters samarbejdspartner Gutenberg foreslog så at afbilde udslagene logaritmisk. Richter var begejstret og det viste sig, at man nu på en hensigtsmæssig måde kunne rangere de forskellige jordskælv. Samtidigt tiltalte det ham, at man også i astronomi havde indført en såkaldt *størrelsesklasse* for en stjerne (se opgave 37). Ved at bruge logaritmer i definitionen, kunne han nemmere adskille de mange mindre jordskælv fra de få større jordskælv, der på den tid indtraf i Californien. Sammenhængen mellem energien E udløst ved jordskælvet og Richtertallet M, hvor energien regnes i J (Joule) viser sig at være givet ved følgende formel:

(8) $$\log(E) = 1,5 \cdot M + 4,8$$

a) I Danmark bliver jordskælvene heldigvis ikke ret store, blandt andet fordi Danmark *ikke* befinder sig på randen af nogle af pladerne, som udgør Jordens overflade. Alligevel forekommer der små jordskælv i Danmark, selv om de ofte dårlig kan mærkes. Blandt de skælv, som kan nævnes, var der blandt andet et jordskælv af styrke 4,0 på Richterskalaen, som blev registreret på Thyholm, Mors og det vestligste Salling den 4. december 1997. Bestem den energi, som blev udløst ved skælvet.

b) Det berømte jordskælv i San Francisco den 18. april 1806 er efterfølgende blevet vurderet til omkring 8,1 på Richter-skalaen. Hvor stor en energi blev frigjort?

c) Hvis et jordskælv udløser en energi på $5,2 \cdot 10^{15}\ \mathrm{J}$, hvor kraftigt er skælvet da på Richter-skalen?

d) Hvor mange gange større var den energi, som blev frigjort ved San Francisco jordskælvet i 1906 sammenlignet med jordskælvet i Danmark i 1997? Kan du besvare spørgsmålet udelukkende udfra forskellen i Richtertal?

Løsning:

a) Vi benytter antilog på begge sider af formel (8) ovenfor:

$$E \;=\; 10^{1,5 \cdot M + 4,8} \;=\; 10^{1,5 \cdot 4,0 + 4,8} \;=\; 10^{10,8} \;=\; 6,3 \cdot 10^{10} \;\text{ i enheden Joule.}$$

b) På samme måde som i spørgsmål a):

$$E \;=\; 10^{1,5 \cdot M + 4,8} \;=\; 10^{1,5 \cdot 8,1 + 4,8} \;=\; 10^{16,95} \;=\; 8,9 \cdot 10^{16} \;\text{ i enheden Joule.}$$

c) Vi skal have isoleret M i formel (8):

$$\log(E) = 1,5 \cdot M + 4,8 \quad \Leftrightarrow \quad \log(E) - 4,8 = 1,5 \cdot M \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\log(E) - 4,8}{1,5} = M$$

$$M \;=\; \frac{\log(E) - 4,8}{1,5} \;=\; \frac{\log(5,2 \cdot 10^{15}) - 4,8}{1,5} \;=\; 7,3$$

d) Man kan naturligvis bestemme forholdet ved at dividere resultatet i spørgsmål b) med resultatet i spørgsmål a), men det kan også gøres på følgende måde: Betegn de to Richter-tal med henholdsvis M_1 og M_2 og de tilsvarende energier med henholdsvis E_1 og E_2. Da kan vi udregne forholdet mellem de to energier på følgende måde:

$$\frac{E_2}{E_1} \;=\; \frac{10^{1,5 \cdot M_2 + 4,8}}{10^{1,5 \cdot M_1 + 4,8}} \;=\; 10^{1,5 \cdot M_2 + 4,8 - 1,5 \cdot M_1 - 4,8} \;=\; 10^{1,5 \cdot M_2 - 1,5 \cdot M_1}$$

$$=\; 10^{1,5 \cdot (M_2 - M_1)} \;=\; 10^{1,5(8,1 - 4,0)} \;=\; 1,41 \cdot 10^{6}$$

Altså blev der ved San Francisco jordskælvet udløst ca. 1,4 million gange så meget energi, som det relativt kraftige jordskælv i Danmark i 1997.

4. Den naturlige eksponential- og logaritmefunktion

Logaritmen, som vi har defineret i begyndelsen af afsnit 3, kaldes også for *titalslogaritmen*, da det er den omvendte funktion til 10^x. Vi siger, at logaritmen har grundtal 10. På tilsvarende måde kan man for ethvert andet positivt reelt tal *a* indføre *logaritmen med grundtal a*, kaldet $\log_a(x)$, som den omvendte funktion til funktionen $f(x) = a^x$. Der er specielt én anden værdi af *a*, som er interessant, nemlig 2,7182... Tallet får på grund af dets vigtighed sit eget symbol *e*. Årsagen til dette tals vigtighed vil først blive afsløret i forbindelse med *differentialregningen* i 2g. Eksponentialfunktionen $f(x) = e^x$ betegnes den *naturlige eksponentialfunktion* og den tilhørende omvendte funktion kaldes for den *naturlige logaritmefunktion* og betegnes med $\ln(x)$. Analogt til (6) og (7) har vi:

(9) $$\ln(e^x) = x \quad \text{for } x \in R$$

(10) $$e^{\ln(y)} = y \quad \text{for } y \in R_+$$

så $\ln(x)$ og e^x ophæver hinandens virkning, ligesom $\log(x)$ og 10^x gør det. Den naturlige logaritmefunktion adlyder i øvrigt de samme logaritmeregler som dem nævnt i sætning 14 for $\log(x)$.

Af mange årsager vælger man ofte at udtrykke en hvilken som helst eksponentialfunktion a^x via den naturlige eksponentialfunktion. Ifølge (10) haves $a = e^{\ln(a)}$, hvorved

(11) $$a^x \;=\; \left(e^{\ln(a)}\right)^x \;=\; e^{\ln(a)\cdot x} \;=\; e^{k\cdot x}$$

hvor $k = \ln(a)$. En fordel ved at benytte $e^{k\cdot x}$ frem for a^x er, at man i praktiske situationer i fx fysik kan lade den fysiske enhed være indeholdt i konstanten *k*, frem for i grundtallet *a* (Overvej!).

Eksempel 17

Vi ønsker at omskrive den eksponentielle funktion $f(x) = 3\cdot 5^x$ til en form, hvor den naturlige eksponentialfunktion indgår.

Løsning: $k = \ln(a) = \ln(5) = 1,6094$, hvorved ifølge (11): $f(x) = 3\cdot 5^x = 3\cdot e^{1,6094\cdot x}$.

□

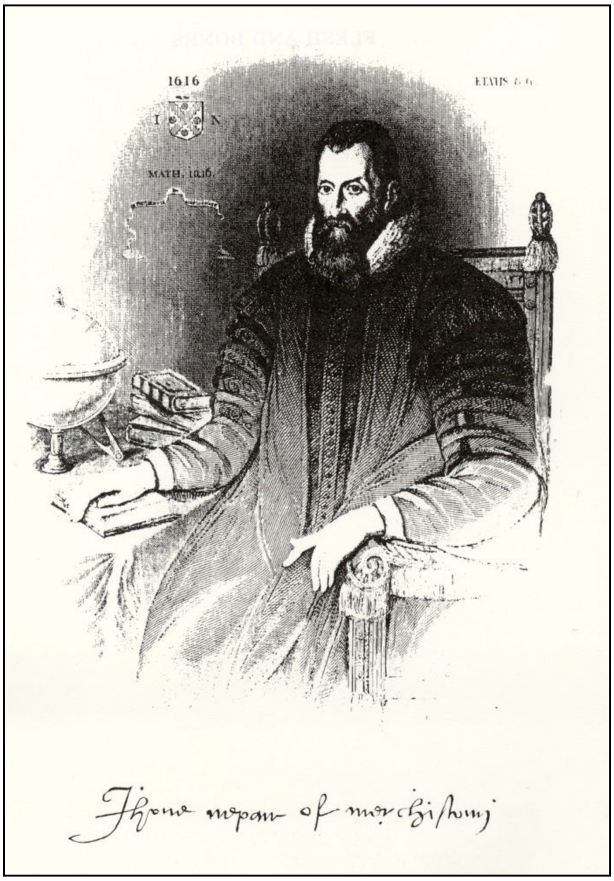
Eksempel 18

Omskriv $f(x) = 4\cdot e^{-2,1\cdot x}$ til formen $f(x) = b\cdot a^x$.

Løsning: $f(x) = 4\cdot e^{-2,1\cdot x} = 4\cdot\left(e^{-2,1}\right)^x = 4\cdot 0,1225^x$.

□

5. Lidt fra logaritmernes historie



I begyndelsen af 1600-tallet blev de første logaritmer ”opdaget” af skotten *John Napier* (1550-1617), som er afbildet på billedet til højre. Han var baron på slottet *Merchiston* i nærheden af Edinburgh. Senere bidrog englænderen *Henry Briggs* (1561-1631) til indførelsen af de nuværende *titalslogaritmer*. Siden den tid fik logaritmerne en kolossal betydning som hjælpemiddel til at lette arbejdet ved numeriske beregninger. Først fik logaritmerne stor betydning indenfor astronomien, som var en af de beregningstunge discipliner. Da man på den tid ikke havde lommeregnere eller edb-maskiner til rådighed, var det af stor betydning, at man kunne lette beregningsarbejdet. Logaritmerne er, som vi skal se nedenfor, velegnede i forbindelse med udførelse af *multiplikationer, divisioner*, *roduddragninger* og *potensopløftninger*, der jo normalt tager lang tid at udføre i hånden. Faktisk blev logaritmetabeller anvendt lige indtil 1970’erne, hvor lommeregnerne vandt indpas. I mere end 300 år var logaritmerne således af fundamental betydning for folk, som skulle udføre store beregninger: Astronomer, ingeniører, videnskabsfolk, navigatører etc. ...

Før vi kigger på et eksempel, vil det være en fordel, hvis du fremskaffer en gammel logaritmetabel, gerne fircifrede tabeller fra *Erlang C*. Alternativt må du ”bruge lommeregneren som logaritmetabel”. Når vi skal gange to tal sammen, kan vi bruge logaritmeregel 1) fra sætning 14:

$$\log(a \cdot b) = \log(a) + \log(b)$$

Lad os sige, at vi skal gange 2,349 med 83,37. Logaritmeregel 1) giver da:

$$\begin{aligned} \log(2{,}349 \cdot 83{,}37) &= \log(2{,}349) + \log(83{,}37) \\ &= 0{,}3709 + 1{,}9210 \qquad (12) \\ &= 2{,}2919 \end{aligned}$$

Nu ved vi altså hvad $\log(2{,}349 \cdot 83{,}37)$ er lig med. For at finde det ønskede produkt udnytter vi sammenhængen (7) fra tidligere, dvs. at funktionen 10^x ophæver virkningen af logaritmen. Altså fås: $2{,}349 \cdot 83{,}37 = 10^{2{,}2919} = 195{,}8$.

Idéen i ovenstående er følgende: Man finder først logaritmen til hver af de to involverede tal, som indgår i multiplikationen. Derefter lægges de to logaritmeværdier sammen, og resultatet bestemmer man *antilogaritmen* til. Dermed haves det ønskede produkt. I stedet for at gange de to tal sammen i hånden, kan man altså udføre to tabelopslag i en logaritmetabel, en addition samt et opslag i en antilogaritmetabel. Nævnte metode kan virke mere besværlig end at udføre multiplikationen i hånden. Her må man være opmærksom på, at man ved håndmetoden nemmere kommer til at begå fejl (overvej!). Besparelsen vil endvidere være større jo flere cifre, der er i tallene. Ved multiplikation af for eksempel tre eller flere tal vil der være en yderligere besparelse og ved roduddragning og potensopløftning (se opgave 50) en kæmpe besparelse.

Lige nogle kommentarer i forbindelse med brug af logaritmetabel

De fleste logaritmetabeller kan kun anvendes *direkte* i intervallet $\left[1,10\right[$, og de fleste antilogaritmetabeller (10^x) kun i intervallet $\left[0,1\right[$. Heldigvis kan man også bestemme logaritmen og antilogaritmen til tal, der ligger udenfor de pågældende intervaller. Man foretager blot nogle få "korrektioner", som det fremgår af følgende eksempler:

$$\log(83,37) = \log(10\cdot 8,337) = \log(10) + \log(8,337) = 1 + \log(8,337)$$
$$10^{2,2919} = 10^2\cdot 10^{0,2919} = 100\cdot 10^{0,2919}$$
$$10^{-1,6316} = 10^{-2+2-1,6316} = 10^{-2}\cdot 10^{2-1,6316} = 0,01\cdot 10^{0,3684}$$

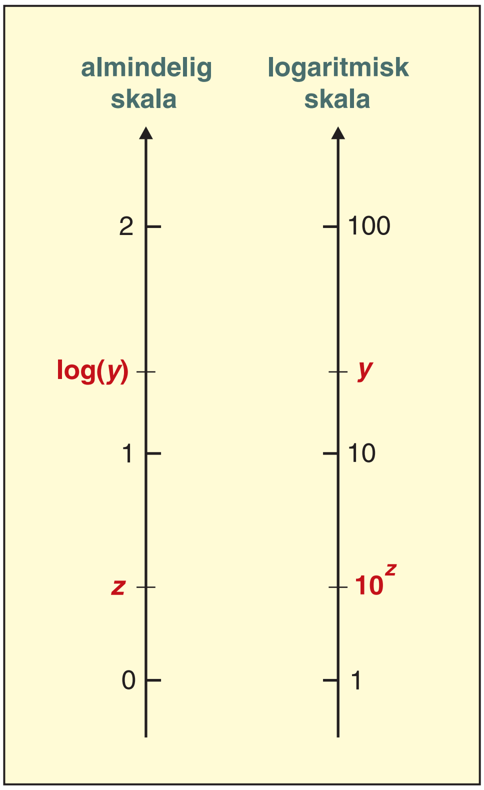
Disse korrektioner kan ofte foretages i hovedet.

□

6. Logaritmisk skala

Når man afbilder data på en skala, så anvendes som oftest det vi vil kalde en *almindelig skala*. Det er karakteriseret ved, at den har *ækvidistant* inddeling, hvorved menes at tal, som har samme indbyrdes forskel, bliver afbildet med samme indbyrdes afstand. Undertiden er det dog hensigtsmæssig at foretage en anden inddeling, for eksempel hvis nogle data klumper sig uhensigtsmæssigt meget sammen, hvis de afbildes på en almindelig skala. Det kan også være, at tallene er meget forskellige i størrelse, så der både er meget små og meget store tal. Den vel næstmest anvendte type inddeling på en akse er den *logaritmiske*.

Indretningen af den *logaritmiske skala* er illustreret på figuren på næste side. Udfor tallene 0, 1 og 2 på en almindelig skala anbringes på den logaritmiske skala henholdsvis tallene $10^0 = 1$, $10^1 = 10$ og $10^2 = 100$ og generelt set anbringes overfor tallet z på en almindelig skala tallet 10^z på den logaritmiske skala. Omvendt, så anbringes y på den logaritmiske skala overfor $\log(y)$ på den almindelige skala. I stedet for at udregne $\log(y)$ og afsætte den beregnede værdi på en almindelig skala, kan man altså lige så godt anbringe y direkte på den logaritmiske skala – placeringen er den samme, som det fremgår af ovenstående! Det fremgår også, at man på den logaritmiske akse kun kan afbilde *positive* værdier. Til gengæld kan man på den logaritmiske akse afbilde både meget små og meget store tal på samme tid, uden at de små tal klumper sammen. Lad y_1 og y_1 være to positive tal. Omskrivningen $\log(y_2) - \log(y_1) = \log(y_2/y_1)$ viser da, at afstanden mellem de to tal på den logaritmiske akse kun afhænger af deres indbyrdes forhold y_2/y_1. Som et eksempel herpå kan vi tage parret 100 og 10 samt parret 10 og 1. Da parrene har samme indbyrdes forhold, nemlig 10, så skal de afbildes med samme afstand på den logaritmiske akse. Vi kan på figuren se, at dette holder stik. Der afsættes altså lige så meget plads til tallene i det lille interval $[1,10]$, som der afsættes til tallene i det store interval $[10,100]$. Det er ofte en stor fordel.

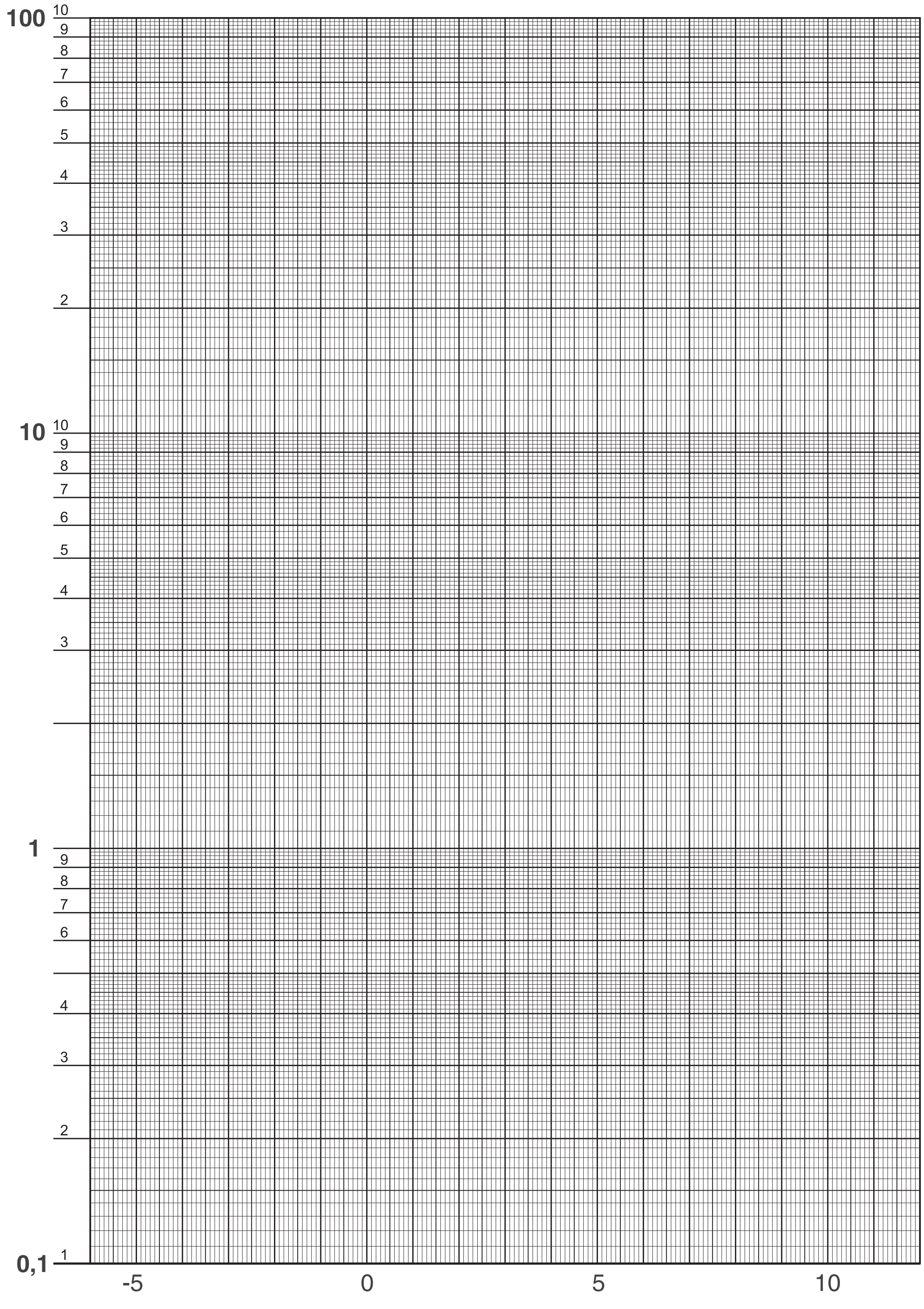


Enkeltlogaritmisk koordinatsystem

Et enkeltlogaritmisk koordinatsystem er et koordinatsystem, hvor x-aksen er en almindelig akse og y-aksen er logaritmisk. Man kan vise – se appendiks B – at der gælder en smuk egenskab for eksponentielle funktioner i et sådant koordinatsystem:

> **Sætning 19**
> En funktion er eksponentiel *hvis og kun hvis* den i et enkeltlogaritmisk koordinatsystem har en retlinet graf.

Ovenstående egenskab er årsagen til at man fremstiller såkaldt *enkeltlogaritmisk papir*, som har en alm. x-akse og en logaritmisk y-akse. Papiret kan ifølge sætning 19 benyttes til at afgøre, om en bestemt udvikling er eksponentiel: Hvis grafen er en ret linje på enkeltlogpapir, så er der tale om en eksponentiel udvikling. Filosofien er, at det er meget nemmere at afgøre, om en graf er lineær, end at afgøre om en graf krummer på den helt rigtige måde i et almindeligt koordinatsystem. Den logaritmiske skala er opdelt i tre *dekader*, hvormed menes tre intervaller, der hver spænder over en faktor 10. Papiret er fleksibelt på den måde, at man selv kan vælge *hvilke* fire på hinanden følgende tipotenser man ønsker at bruge. På enkeltlogpapiret vist på næste side er det valgt at lade den logaritmiske y-akse spænde fra 0,1 til 100. Man kunne lige så vel have valgt at lade aksen spænde fra 1 til 1000 eller 0,01 til 10.


100
10
1
0,1
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
-5
0
5
10

Bemærkning 20

I grafregnernes og computernes tidsalder vil man nok ikke så ofte som tidligere benytte enkeltlogaritmisk papir, idet man kan lade disse apparater direkte foretage *eksponentiel regression*, hvorved det kan afgøres om en given udvikling er eksponentiel eller tilnærmelsesvist eksponentiel. Alligevel kan et enkeltlogaritmisk koordinatsystem undertiden være en meget visuel attraktiv måde at afbilde data på. Bemærk, at man indirekte kan lade grafregneren tegne grafen i et enkeltlogaritmisk koordinatsystem, hvis man i stedet for at afbilde punkterne (x, y) afbilder punkterne $(x, \log(y))$. Vi vil se nærmere på eksponentiel regression under afsnittet *Eksponentielle modeller*.

7. Fordoblings- og halveringskonstanter

For eksponentielle funktioner gælder der nogle smukke egenskaber, som vi skal se:

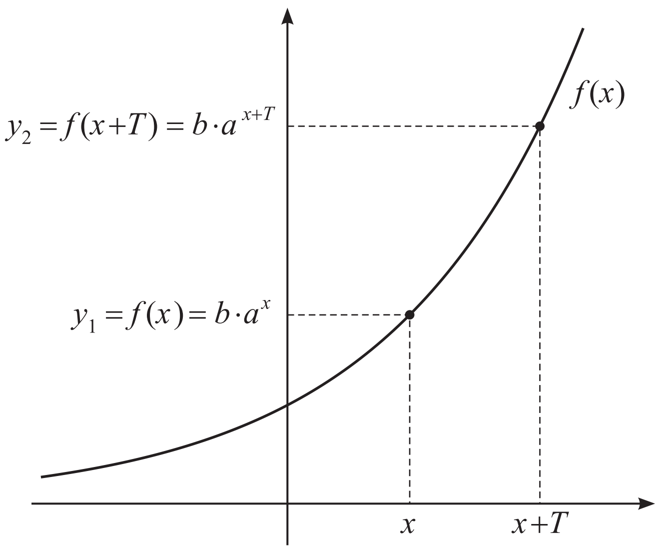
Sætning 21

Givet en voksende eksponentiel funktion $f(x) = b \cdot a^x$ (dvs. $a > 1$). Da vil y-værdien fordobles, når x øges med en bestemt størrelse kaldet *fordoblingskonstanten*, betegnet med bogstavet T_2 eller bare T. Der gælder:

(13) $$T_2 = \frac{\log(2)}{\log(a)}$$

Bevis: Betragt figuren nedenfor. Lad os give x en tilvækst på T. Forholdet mellem funktionsværdierne i x og $x+T$ er da:

(14) $$\frac{y_2}{y_1} = \frac{f(x+T)}{f(x)} = \frac{b \cdot a^{x+T}}{b \cdot a^x} = a^{x+T-x} = a^T$$



Betingelsen for at funktionsværdien fordobles er derfor:

(15) $$a^T = 2 \quad \Leftrightarrow \quad \log(a^T) = \log(2) \quad \Leftrightarrow \quad T \cdot \log(a) = \log(2) \quad \Leftrightarrow \quad T = \frac{\log(2)}{\log(a)}$$

hvor vi fra andet til tredje trin har benytte logaritmeregel 3). Man gør nu den vigtige iagttagelse, at den tilvækst vi skal give x for at funktionsværdien fordobles, er *uafhængig af* x. Derfor er det fornuftigt at indføre betegnelsen *fordoblingskonstant* for en voksende eksponentiel funktion.

□

For en aftagende eksponentiel funktion vil vi uden bevis anføre et analogt resultat:

Sætning 22

Givet en aftagende eksponentiel funktion $f(x) = b \cdot a^x$ (dvs. $a < 1$). Da vil funktionsværdien halveres, når x øges med en bestemt størrelse kaldet *halveringskonstanten*, betegnet med bogstavet $T_{½}$ eller bare T. Der gælder:

(16) $$T_{½} = \frac{\log(½)}{\log(a)}$$

Eksempel 23

Tegn grafen for $f(x) = 2 \cdot 1{,}3^x$ på et enkeltlogaritmisk papir og løs følgende opgaver:

a) Bestem funktionsværdien i $x = 2$ ved aflæsning og ved beregning.
b) Løs ligningen $f(x) = 15$ ved aflæsning og ved beregning.
c) Bestem fordoblingskonstanten ved aflæsning og ved beregning.

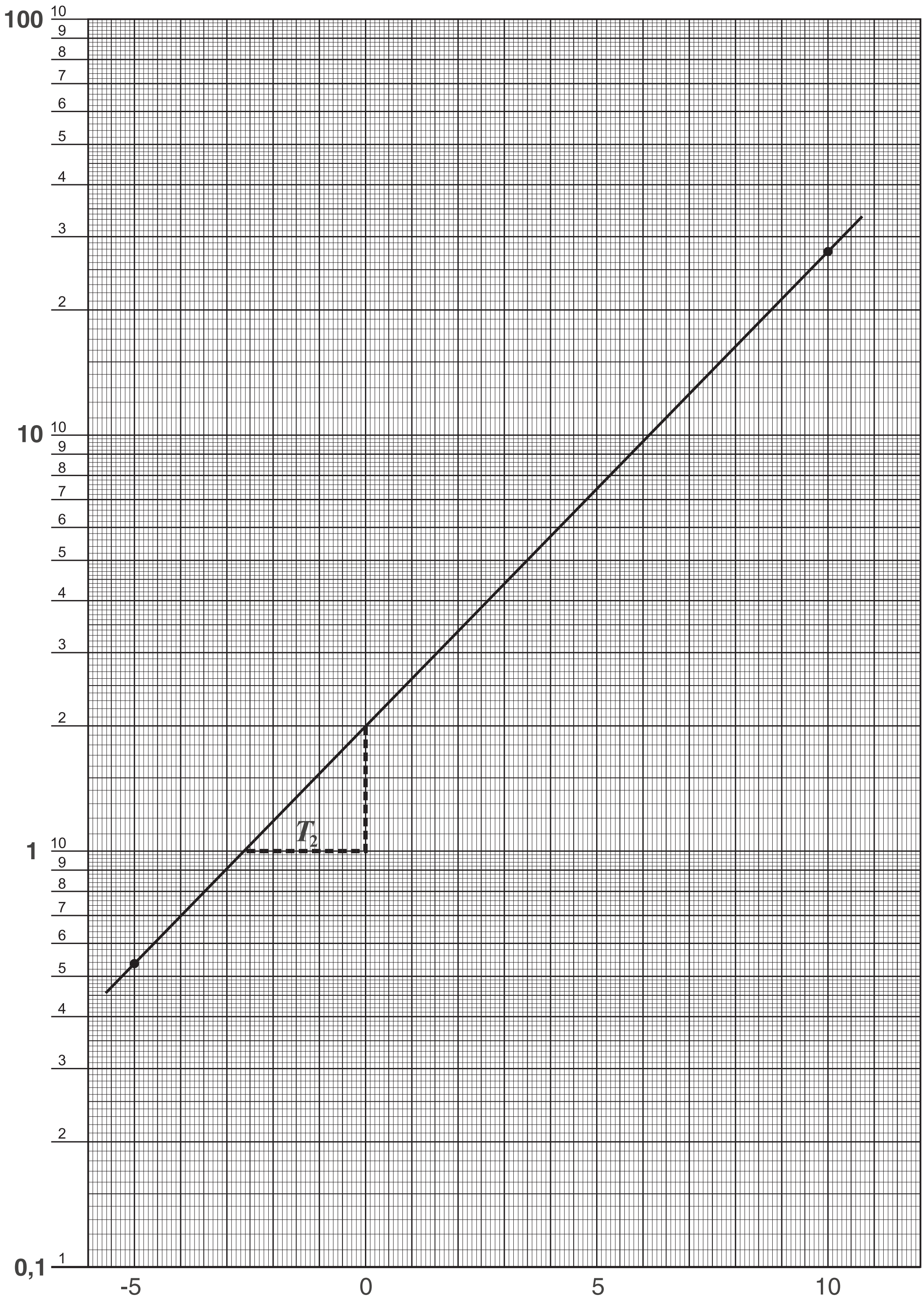
Løsning:
Da der ikke står anført noget særligt om definitionsmængden, kan man vælge at tegne grafen i intervallet $[-6, 12]$, hvor 1 cm på x-aksen svarer til 1. Ifølge sætning 19 er grafen på enkeltlogpapir en ret linje. Vi behøver derfor blot udregne to støttepunkter.

$$f(-5) = 2 \cdot 1{,}3^{-5} = 0{,}5387 \; ; \quad f(10) = 2 \cdot 1{,}3^{10} = 27{,}57 \, .$$

Disse indtegnes på papiret og linjen igennem dem tegnes. Se på næste side.

a) Aflæsning: $f(2) = 3{,}4$. Beregning: $f(2) = 2 \cdot 1{,}3^2 = 3{,}38$
b) Aflæsning: $f(x) = 15 \;\Leftrightarrow\; x = 7{,}65$. Beregning:

$$f(x) = 15 \;\Leftrightarrow\; 2 \cdot 1{,}3^x = 15 \;\Leftrightarrow\; 1{,}3^x = 7{,}5 \;\Leftrightarrow\; \log(1{,}3^x) = \log(7{,}5)$$
$$\Leftrightarrow\; x \cdot \log(1{,}3) = \log(7{,}5) \;\Leftrightarrow\; x = \frac{\log(7{,}5)}{\log(1{,}3)} = 7{,}6798$$


100
10
1
0,1
T_2
-5
0
5
10

c) Aflæsning: Man opsøger et punkt på grafen, der har en pæn y-værdi, fx 1. Så undersøger man, hvor meget x-værdien skal øges, for at y-værdien fordobles, dvs. bliver lig med 2 i dette tilfælde. Man ser, at x-værdien skal øges med 2,6, så $T_2 = 2{,}6$, som markeret på figuren på forrige side.

Beregning: $T_2 \;=\; \dfrac{\log(2)}{\log(a)} \;=\; \dfrac{\log(2)}{\log(1{,}3)} \;=\; 2{,}6419$

□

Hvis den eksponentielle funktion er på formen $f(x) = b \cdot e^{k \cdot x}$, jævnfør afsnit 4, så ser formlerne for fordoblings- og halveringskonstanten anderledes ud. Man kan vise (se opgave 73), at følgende gælder:

Sætning 24

Givet en eksponentiel funktion på formen $f(x) = b \cdot e^{k \cdot x}$. Hvis $k > 0$ er funktionen *voksende*, og den har en fordoblingskonstant givet ved formlen $T_2 = \ln(2)/k$. Hvis derimod $k < 0$, er funktionen *aftagende* og den har en halveringskonstant givet ved formlen $T_{½} = \ln(½)/k$.

Bemærkning 25

Hvis vi har at gøre med en *voksende* eksponentiel funktion, så er der som bekendt hertil knyttet en fordoblingskonstant T_2. Ifølge beviset for sætning 21 haves $a^{T_2} = 2$. Hvis vi opløfter begge sider af denne ligning i x/T_2, så fås følgende:

(17) $$a^{T_2} = 2 \quad \Leftrightarrow \quad \left(a^{T_2}\right)^{\frac{x}{T_2}} = 2^{\frac{x}{T_2}} \quad \Leftrightarrow \quad a^x = 2^{\frac{x}{T_2}}$$

hvor vi for at få sidste ensbetydende tegn har benyttet potensregel 3). Indsættes udtrykket for a^x i forskriften fås:

(18) $$f(x) = b \cdot a^x = b \cdot 2^{\frac{x}{T_2}}$$

På tilsvarende måde viser man nemt, at hvis f er en *aftagende* eksponentiel funktion, så kan funktionen skrives på formen:

(19) $$f(x) = b \cdot a^x = b \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{T_{½}}}$$

Denne specielle forskrift for den eksponentielle funktion kan være meget hensigtsmæssig i opgaver, hvor fordoblings- eller halveringskonstanten er oplyst i en opgave, for eksempel i eksempel 28 i afsnit 8.

□

8. Eksponentielle modeller

I dette afsnit skal vi kigge på nogle situationer, hvor eksponentielle funktioner dukker op i praksis. Udover at besvare forskellige tekniske spørgsmål, skal vi fokusere på de principper, som er afgørende for, hvorfor udviklingerne bliver eksponentielle.

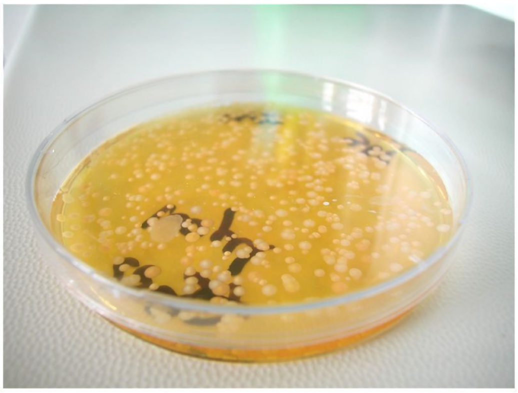
Eksempel 26 (Vækst af bakteriekultur)

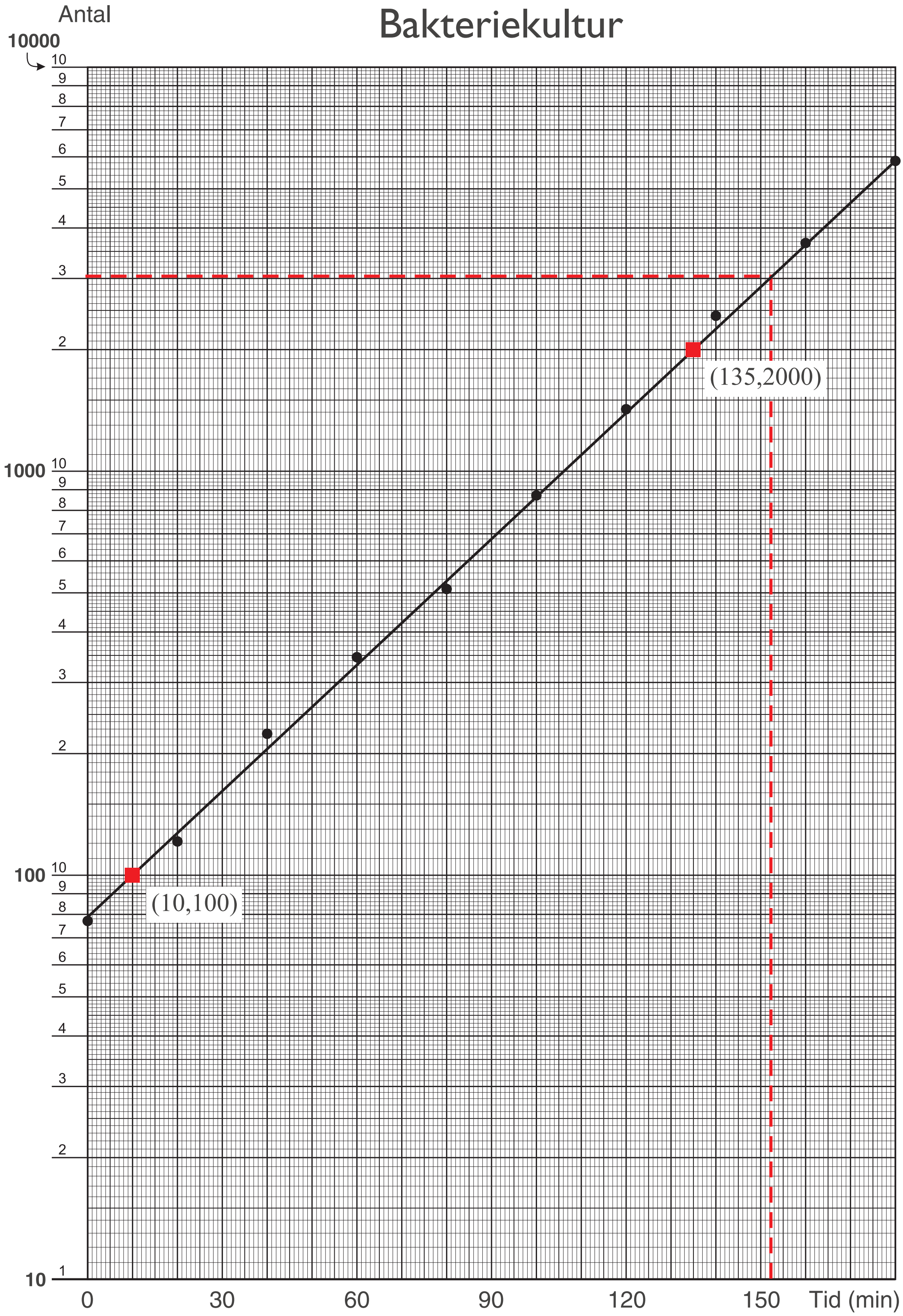
Når man skal beskrive en bakteriekulturs vækst, så inddeler man normalt i fire faser: *Nølefasen*, den *eksponentielle fase*, den *stationære fase* og *dødsfasen*. Nølefasen er karakteriseret ved, at cellerne først skal indstille sig på at kunne begynde at vokse. Hvis de er gået i dvale kan det være, at der først skal fjernes nogle proteiner, før væksten kan begynde. Cellen skal også begynde at lave cellevægsmateriale etc. I den eksponentielle fase er cellen rede til at vokse, og det kan ske uden videre hindringer. Lad os forestille os, at udviklingen i antal bakterier har udviklet sig som angivet i tabellen nedenfor.

a) Påvis, at udviklingen virkeligt er eksponentiel.
b) Hvor mange bakterier vil der være tilstede efter 4 timer, hvis udviklingen fortsætter en time mere?
c) Hvornår var populationen oppe på 3000 bakterier?
d) Hvor stor er fordoblingstiden i den eksponentielle fase?
e) Hvor mange procent vokser bakteriekulturen med hvert minut?
f) Hvor mange procent vokser bakteriekulturen med for hver 10 minutter?

t (min)	0	20	40	60	80
Antal	77	121	223	347	510

t (min)	100	120	140	160	180
Antal	869	1421	2410	3670	5866




Bakteriekultur
Antal
10000
1000
100
10
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
30
60
90
120
150
Tid (min)
(10,100)
(135,2000)

a) Som vist på forrige side, så er punkterne indtegnet på enkeltlogaritmisk papir, og man observerer, at punkterne omtrent ligger på en ret linje. Det betyder ifølge sætning 19, at udviklingen omtrent er *eksponentiel*. Den bedste linje er tegnet ind og to punkter på linjen er markeret med en rød firkant: $(10,100)$ og $(135,2000)$. Ifølge formel (4) i sætning 11 fås:

$$a \;=\; \sqrt[x_2-x_1]{\frac{y_2}{y_1}} \;=\; \sqrt[135-10]{\frac{2000}{100}} \;=\; 1,0243$$

Og ved indsættelse af punktet $(10,100)$, fås: $b \;=\; \dfrac{y}{a^x} \;=\; \dfrac{100}{1,0243^{10}} \;=\; 78,7$.

Altså er forskriften $y \;=\; 78,7 \cdot 1,0243^x$.

b) Da x regnes i minutter, er x lig med 240. Den tilsvarende y-værdi er:

$$y \;=\; 78,7 \cdot 1,0243^{240} \;=\; 25032$$

så svaret er, at der vil være ca. 25000 bakterier efter 4 timer. Der er desværre ikke plads til at aflæse dette grafisk på det enkeltlogaritmiske papir.

c) Der er 3000 bakterier:

$$y = 3000 \quad\Leftrightarrow\quad 78,7 \cdot 1,0243^x = 3000 \quad\Leftrightarrow\quad 1,0243^x = \frac{3000}{78,7}$$

$$\Leftrightarrow\quad 1,0243^x = 38,12 \quad\Leftrightarrow\quad \log(1,0243^x) = 38,12$$

$$\Leftrightarrow\quad x \cdot \log(1,0243) = \log(38,12) \quad\Leftrightarrow\quad x \;=\; \frac{\log(38,12)}{\log(1,0243)} \;=\; 151,6$$

Altså vil der efter prognosen omtrent være 3000 bakterier efter 152 sek. Dette passer fint med aflæsningen markeret på grafen!

d) Fordoblingstiden fås ifølge sætning 21:

$$T_2 \;=\; \frac{\log(2)}{\log(a)} \;=\; \frac{\log(2)}{\log(1,0243)} \;=\; 28,9$$

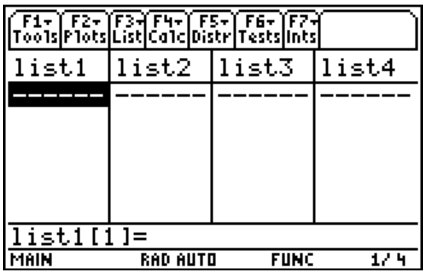
så bakteriernes antal fordobles efter ca. 28,9 minutter.

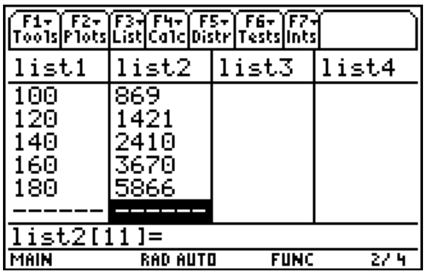
e) Ifølge sætning 6b) så fremskrives y-værdien med a, når x gives en tilvækst på 1. Ifølge metoden omtalt i eksempel 9, kan dette udsagn oversættes til, at y-værdien vokser med $r = a - 1 = 1,0243 - 1 = 0,0243 = 2,43\%$ hver gang x øges med 1. Så svaret er altså, at bakteriernes antal vokser med 2,43% pr. minut.

f) Denne gang skal vi benytte sætning 6c) til at slutte, at y fremskrives med $a^{\Delta x}$, når x øges med Δx. Ifølge metoden omtalt i eksempel 9, kan dette oversættes til procent: $r = a^{\Delta x} - 1 = 1,0243^{10} - 1 = 0,271 = 27,1\%$. Dermed er bakteriekulturens størrelse vokset med 27,1% i løbet af 10 minutter.

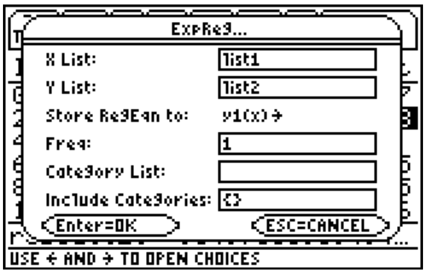
Lad os se, hvordan man kan løse opgaven med Texas TI-89 Titanium.

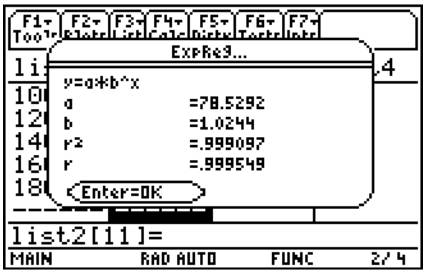
a) Start `Stat/List Editoren` (*SL*-editoren) via O. Der kommer først et vindue med *Folder Selection...*. Det taster du bare videre fra med ÷. Nu dukker et vindue op med nogle lister, som vist på figuren nedenfor til venstre.





Du indtaster nu *x*-værdierne i `list1` og *y*-værdierne i `list2`. , så du får vinduet vist til højre ovenfor. *Eksponentiel regression* udføres på følgende måde: Tast for at vælge menuen `Calc`. Vælg `3:Regressions` og dernæst `8:ExpReg` og sørg for, at indstille, som vist på figuren nedenfor til venstre. Afslut med ÷.

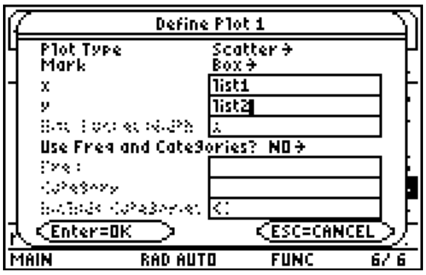


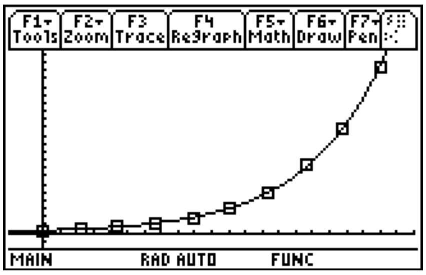


Bemærk, at det er vigtigt, at der ud for `Store RegEqn to` står fx `y1(x)`, således, at du senere kan referere til den regressionslinje, du er ved at udregne. Resultatet af regressionen er altså følgende eksponentielle funktion:

$$y = 78{,}5292 \cdot 1{,}0244^x$$

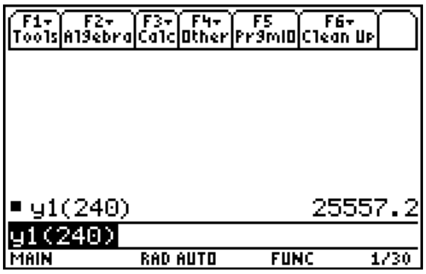
Bemærk, at grafregneren bytter rundt på rollen af *a* og *b* i forhold til, hvad der normalt er kutyme. Værdien `r` er den såkaldte *korrelationskoefficient*. Hvis den numerisk set er meget tæt på 1, så er der tale om den meget fin eksponentiel sammenhæng. Det er tilfældet her, så man kan bekræfte den tilnærmelsesvise eksponentielle sammenhæng. Afslut med ÷. Måske du også får lyst til at se med egne øjne, at den eksponentielle graf nu også tilnærmer datapunkterne fint? I så fald kan du gøre følgende: Gå ind i *SL*-editoren, hvis du ikke allerede er der. Tast for `Plots` og vælg `1:Plot Setup`. Tast for `Define`. Sørg nu for, at det vindue, der dukker op, kommer til at se ud som på figuren nedenfor til venstre. Tast ÷ en eller to gange, indtil du er tilbage i `Plot Setup` vinduet. Tegn plottet med `ZoomData` ved at taste . Det skulle gerne give billedet til højre. Vi ser, at kurven pænt tilnærmer datapunkterne. Spørgsmål a) er dermed besvaret bekræftende!

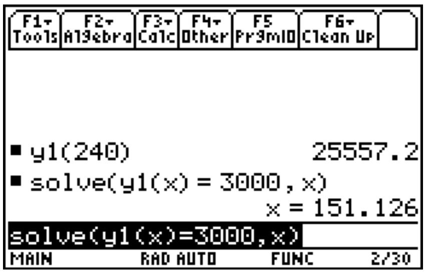




Bemærk, at hvis du får tegnet andre irrelevante grafer i vinduet, kan det være, at du har haft noget liggende fra tidligere. Du kan slå plots eller grafer til og fra ved at gå ind i #-editoren og fjerne eller placere flueben med □. En anden ting: Du kan smart få grafregneren til at tegne på ”enkeltlogpapir”: se opgave 83.

b) Husk, at regressionsfunktionen er gemt i grafregneren i `y1(x)`. Du kan derfor hurtigt besvare dette spørgsmål ved at gå ind på hovedskærmen ved at taste ∀ og taste `y1(24Ø)` i indtastningslinjen efterfulgt af ÷. Det giver skærmbilledet nederst til venstre. Så efter 4 timer = 240 minutter er prognosen altså, at der vil være 25557 bakterier.





c) Her kender vi y og skal finde x: I hovedskærmen indtastes følgende:

`solve(y1(x)=3ØØØ,x)`

Enten kan `solve` skrives direkte via det alfanumeriske tastatur via φ eller også kan man taste □ og herefter `1:solve(` for at hente det. Bemærk, at nullerne i 3000 er angivet som ”ø’er”. Det gør man ofte i datalogi for ikke at tage fejl af om det er bogstavet ”o”. Man skal naturligvis taste dem ind som nuller! Efter at have tastet ÷, fås skærmbilledet for oven til højre. Efter prognosen vil 3000 bakterier altså være opnået efter 151 minutter.

d) Fordoblingstiden findes med formel (13) i sætning 21: $T_2 = \log(2)/\log(a)$. Du vil nok opdage, at logaritmen ikke direkte står på tastaturet. Der er imidlertid funktioner, som er skjult. En del af disse kan du se ved at taste ∞ $\boxed{\text{KEY}}$. Her kan du se, at man med ∞μ kan få titalslogaritmen frem. Fremskrivningsfaktoren a fandt du under spørgsmål a). Indtast herefter i hovedskærmen `log(2)/log(1.Ø244)` og tryk ÷. Det giver 28,7529. Bakteriekulturen fordobles altså for hver knap 29 minutter!

e) Man trykker `1.Ø244-1` i hovedskærmen og får `Ø.Ø244`. I hovedet oversættes dette til en vækst på 2,44% pr. minut.

f) Man trykker `1.Ø244^1Ø-1` i hovedskærmen og får `Ø.272611`. I hovedet oversættes dette til en vækst på 27,3% pr. 10 minutter.

Som nævnt i starten af opgaven er der i virkeligheden flere faser ved udviklingen af en bakteriekultur. Det er vel også klart, at kulturen ikke vil kunne vokse sig vilkårligt stor – ”træerne vokser ikke ind i himlen”, som man siger. Årsagen er, at der på et tidspunkt kommer til at mangle føde/næringsstof, når bakterie-kulturen har nået en vis størrelse. På dette tidspunkt vil udviklingen blive hæmmet og gå langsommere, ja ligefrem stagnere eller dale – heraf den *stationære fase* og *dødsfasen*. Man har også en matematisk model, som kan beskrive den stationære fase, nemlig den såkaldte *logistiske vækst*. Men hvorfor er den eksponentielle udvikling ofte så god til at beskrive *populationers udvikling over tid*? Hvad er det for et princip som er afgørende herfor? Svaret er, at det er sætning 10. Det er naturligt, at populationen vokser med den samme procent for hver tidsperiode: Hvis en population er dobbelt så stor, er det også naturligt, at tilvæksten i populationen er dobbelt so stor. Denne eksponentielle udvikling oplever man også undertiden for befolkningen i en by. Det er dog som oftest ikke så overbevisende, som tilfældet er med bakterier og lignende. Menneskets hensigter er mere komplekse: En ændret politik i en by kan øge eller mindske befolkningstilvæksten. Måske opstår der krig, hungersnød etc.

Eksempel 27

Population A starter med 2500 individer og vokser med 3,2% pr. år, mens population B starter med 4000 individer og vokser med 1,2% pr. år.

a) Hvor lang tid tager det, før population A passerer population B i antal?
b) Lav en skitse af populationernes tidsmæssige forløb.

Løsning: Vi løser først a) i hånden:

a) For population A er fremskrivningsfaktoren pr. år lig med $a = 1 + r = 1 + 0,032 = 1,032$, mens den for population B er $a = 1 + r = 1 + 0,012 = 1,012$. Det betyder, at vi har følgende to forskrifter for de to udviklinger, hvor x angiver tiden i antal år:

$$f_A(x) = 2500 \cdot 1,032^x \ , \quad f_B(x) = 4000 \cdot 1,012^x$$

Lad os undersøge, hvornår populationerne er lige store:

$$f_A(x) = f_B(x) \quad \Leftrightarrow \quad 2500 \cdot 1,032^x = 4000 \cdot 1,012^x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1,032^x}{1,012^x} = \frac{4000}{2500}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\frac{1,032}{1,012}\right)^x = 1,6 \quad \Leftrightarrow \quad 1,0198^x = 1,6 \quad \Leftrightarrow \quad x \cdot \log(1,0198) = \log(1,6)$$

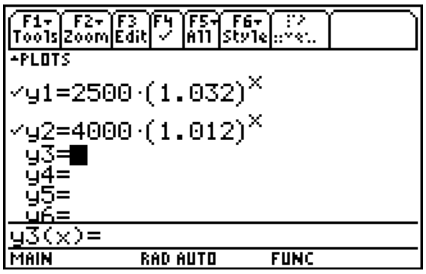
$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{\log(1,6)}{\log(1,0198)} = 24,0$$

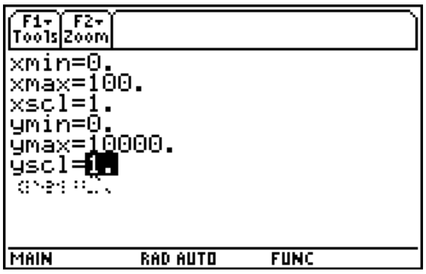
Så svaret er, at efter 24,0 år vil population A overhale population B.

Lad os dernæst løse a) og b) ved hjælp af grafregneren:

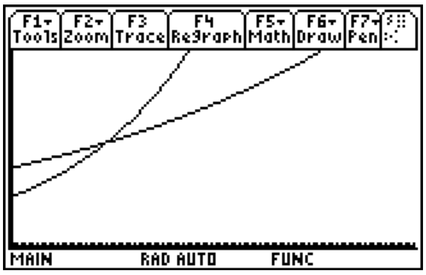
a) I hovedskærmen indtastes `solve(2500*1.032^x>=4000*1.012^x,x)`, hvilket giver `x≥24.0164`, så population A passerer population B i antal efter 24,0 år.

b) Tryk ∞# for at komme ind i #-editoren. Hvis der allerede står noget, så slet det med □v÷. Indtast herefter de to forskrifter som henholdsvis `y1(x)` og `y2(x)`, som giver skærmbilledet nedenfor til venstre. Tast dernæst ∞%. Dit skærmbillede afhænger nu meget af, hvorledes din grafregner var indstillet tidligere. Måske ser du slet ingen grafer! Du skal have indstillet dit *vindue* fornuftigt. En god måde at gøre det på er ved at trykke ∞∃: Tænk nu på, at x er antal år, og vi skal kunne se noget fremad. Vi vælger at lade x forløbe fra 0 til 100. Hvad angår y, så husk, at de to grafer starter med y-værdier i henholdsvis 2500 og 4000. Vi vælger at give lidt rigeligt plads og vælger derfor y fra 0 til 10000. Sørg for, at vinduet ser ud som på figuren nedenfor til højre.





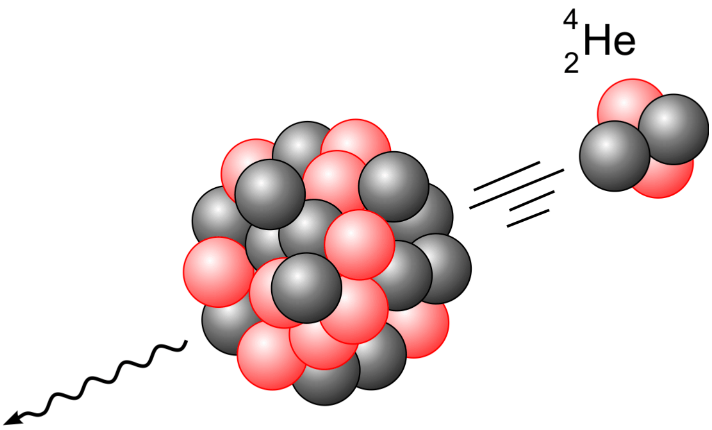
Tast ∞% for at se graferne tegnet. Skærmen skulle gerne se således ud:



Når du har tegnet graferne og er i grafvinduet, er der i øvrigt en alternativ måde, du kunne have løst opgave a) på: Du kunne vælge menuen `Math` med □ og herefter `5:Intersection`. Du skal fortælle hvilke kurver, du vil finde skæringspunktet mellem. Der spørges om `1st Curve`? Prøv at bruge piletasterne lidt indtil en *cursor* kommer til syne. Den graf, som cursoren står på, når du trykker ÷, bliver den først kurve (1st Curve). Tilsvarende for den anden kurve (2nd Curve). Herefter bliver du spurgt om `Lower Bound`, hvilket betyder *nedre grænse*. Du skal angive en x-værdi til venstre for skæringspunktet mellem de to grafer. Du kan vælge `0` og trykke ÷. Endelig skal du angive `Upper Bound` , dvs. en *øvre grænse*. Her kan du vælge `100` og trykke ÷. Efter lidt tid får du både x- og y-værdi for skæringspunktet, nemlig `24.0164` og `5326.93`. Svaret er derfor, at population A passerer population B efter 24,0 år.

Eksempel 28 (Radioaktivt henfald)

Ved et radioaktivt henfald menes, at en ustabil atomkerne enten udsender elektromagnetisk stråling (γ-stråling) eller omdannes til en ny kerne under udsendelse af én eller flere partikler. α-henfald og β-henfald er eksempler på sidstnævnte. Ved et α-henfald udsender kernen en heliumkerne, som vist på figuren. Radioaktivitet er et område, hvor eksponentielle funktioner kommer i sving. Radioaktive henfald handler om *sandsynligheder*; man kan ikke sige med sikkerhed hvornår en given kerne henfalder, kun angive en sandsynlighed for, at det sker i et givet tidsrum. Dette betyder, at den procentdel af kernerne, som henfalder i et lille tidsrum, er *proportional* med antallet at radioaktive kerner til det aktuelle tidspunkt. Som en grov sammenligning kan vi tænke på det som *popkorn*, der popper i en gryde: De upoppede majskorn svarer til ustabile kerner, som endnu ikke er henfaldet. Når et majskorn popper svarer det til, at en kerne henfalder. Vi kan nu godt følge tankegangen: mens der er mange upoppede majskorn, så popper der også mange ... senere, når der ikke er så mange majskorn tilbage, er "poppehastigheden" naturligt nok lavere. Det er ikke svært at acceptere påstanden, at "poppehastigheden" er proportional med antallet af (upoppede) majskorn. Det skal lige siges, at popkorn-modellen ikke er helt perfekt til at beskrive situationen med radioaktive kerner – overvej hvorfor poppehastigheden ikke nødvendigvis vil være proportional med antal upoppede majskorn i en gryde?



Da der er en bestemt sandsynlighed for at en bestemt kerne henfalder i et givet lille tidsrum og der er ufatteligt mange atomkerner tilstede, så siger *de store tals lov*, at tilfældighederne vil udjævne sig og en bestemt brøkdel eller procent af kernerne vil henfalde i et lille tidsrum. Sætning 10 træder derfor til og fortæller os, at udviklingen må være eksponentiel. Da henfaldshastigheden, også kaldet *aktiviteten*, *aftager*, er der tale om en *aftagende* eksponentiel udvikling. Aktiviteten til tiden t betegnes med $A(t)$.

Lad os i det følgende antage, at vi har at gøre med en Radon-222 kilde med en halveringstid på 3,8 dage.

a) Hvad er aktiviteten faldet til efter 5 dage, regnet i procent af startaktiviteten?
b) Hvornår er aktiviteten faldet *til* $1/10$ af det oprindelige niveau?
c) I fysik angives aktiviteten til tiden t normalt på formen $A(t) = A_0 \cdot e^{-k \cdot t}$, hvor A_0 er aktiviteten til tiden 0 og k er den såkaldte *henfaldskonstant*. Bestem k.

Løsning:

a) Da halveringskonstanten er kendt, kan vi med stor fordel benytte formen (19) i bemærkning 25 for den eksponentielle udvikling:

$$A(t) \;=\; A_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T_{½}}}$$

hvor A_0 er aktiviteten til tiden 0. Vi kender imidlertid ikke startaktiviteten og kalder den derfor blot for 100%.

$$A(5) \;=\; 100\% \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{5}{3,8}} \;=\; 40,2\%$$

så efter 5 dage er aktiviteten altså faldet til 40,2% af den oprindelige!

b) For at løse dette spørgsmål, skal vi løse en ligning:

$$10\% \;=\; 100\% \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{3,8}} \quad \Leftrightarrow \quad 0,10 \;=\; \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{3,8}} \quad \Leftrightarrow \quad \log(0,10) \;=\; \log\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{3,8}}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \log(0,10) \;=\; \frac{t}{3,8} \cdot \log(\tfrac{1}{2}) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\log(0,10)}{\log(\frac{1}{2})} \cdot 3,8 \;=\; t \quad \Leftrightarrow \quad t = 12,6$$

Andet trin: logaritmen er taget på begge sider. Tredje trin: logaritmeregel 3) er benyttet. Vi konkluderer, at det tager 12,6 dage for aktiviteten af aftage til 10%.

c) Hvis vi indsætter $t = T_{½}$ i udtrykket $A(t) = A_0 \cdot e^{-k \cdot t}$, så fås

$$\tfrac{1}{2} A_0 = A_0 \cdot e^{-k \cdot T_{½}} \quad \Leftrightarrow \quad \tfrac{1}{2} \;=\; e^{-k \cdot T_{½}} \quad \Leftrightarrow \quad \ln(\tfrac{1}{2}) = \ln(e^{-k \cdot T_{½}}) \quad \Leftrightarrow$$

$$\ln(\tfrac{1}{2}) = -k \cdot T_{½} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\ln(\frac{1}{2})}{-k} \;=\; T_{½} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\ln(2)}{k} \;=\; T_{½}$$

hvor vi i sidste trin har benyttet, at $\ln(½) = -\ln(2)$, som fås ved at benytte logaritmeregel 2) og udnytte at $\ln(1) = 0$ (Overvej!). Vi får altså:

$$T_{½} \;=\; \frac{\ln(2)}{k} \quad \Leftrightarrow \quad k \;=\; \frac{\ln(2)}{T_{½}} \;=\; \frac{\ln(2)}{3,8} \;=\; 0,1824$$

Da enheden er dage^{-1}, er henfaldskonstanten altså $0{,}1824\ \text{dage}^{-1}$.

Et par kommentarer til, hvordan specielt spørgsmål b) og c) kan løses på grafregneren:

b) I hovedskærmen indtastes `solve(Ø.1=Ø.5^(t/3.8),t)`. Det giver resultatet `t=12,6233`. Så det tager ca. 12,6 dage for strålingen at aftage til 10%.

c) Hvis y skal halveres, svarer det ifølge andet trin i punkt c) ovenfor til, at vi skal løse ligningen $e^{-k\cdot T_{½}} = \frac{1}{2}$. Det kan gøres ved i hovedskærmen at skrive:

```
solve(e^(-k*3.8)=Ø.5,k)
```

som giver `k=Ø,1824Ø7`. Altså er henfaldskonstanten lig med $0{,}1824\ \text{dage}^{-1}$.

Appendiks A. Udvidelse af potensbegrebet

Vi skal have udvidet potensbegrebet til at omfatte alle reelle tal som mulige eksponenter. I princippet kunne vi vælge at definere de nye potenser præcist som vi har lyst til, for eksempel hvad 5^0 eller 5^{-2} skal betyde. Der er imidlertid kun én intelligent måde at gøre det på, og det er ved at foretage udvidelsen, så potensreglerne 1) - 5) gælder, også for de nye potenser. Og som vi skal se, fastlægger disse krav præcist, hvordan potenserne skal defineres. Lad os starte med a^0:

$$a^0 \cdot a^1 = a^{0+1} = a^1 \quad \Leftrightarrow \quad a^0 \cdot a = a \quad \Leftrightarrow \quad a^0 = \frac{a}{a} = 1 \tag{20}$$

Dette viser, at vi er nødsaget til at definere $a^0 = 1$, hvis vi vil have potensregel 1 til at gælde. Denne regel er anvendt i første lighedstegn. Nu til a^{-x}:

$$a^{-x} = a^{0-x} = \frac{a^0}{a^x} = \frac{1}{a^x} \tag{21}$$

som viser, at vi må definere $a^{-x} = 1/a^x$, hvis vi vil have potensregel 2) til at gælde. Den er anvendt i andet lighedstegn. Næste skridt er at definere potenser, hvor eksponenten er en brøk: Hvordan skal $z = a^{p/q}$ defineres?

$$z^q = \left(a^{p/q}\right)^q = a^{(p/q)\cdot q} = a^p \quad \Leftrightarrow \quad z = \sqrt[q]{a^p} \tag{22}$$

Vi ser også her, at det er vigtigt, at forlange, at a er positiv, så også a^p er positiv og der dermed netop er en løsning z til ligningen $z^p = a^p$. Vi kan altså definere potenser med eksponenter, som er brøker, ved at sætte:

$$a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p} \tag{23}$$

Det sidste skridt i udvidelsen består i at definere potenser, hvor eksponenten er et vilkårligt reelt tal. Dette er kompliceret at gøre helt stringent. Derfor vil vi være lidt løse her: Det viser sig, at man på en veldefineret måde kan definere a^x som en *grænseværdi* for potenser med rational eksponent. Idéen lader sig nemmest illustrere ved et eksempel.

Lad os sige, at vi ønsker at tillægge $3^{\sqrt{2}}$ en talværdi. Da $\sqrt{2} = 1{,}41421356\ldots$ som bekendt ikke er et rationalt tal, så kan vi ikke bruge ovenstående definitioner direkte. Men vi kan tilnærme eksponenten $\sqrt{2}$ ved hjælp af en følge af rationale tal:

$$1;\ \ 1{,}4;\ \ 1{,}41;\ \ 1{,}414;\ \ 1{,}4142;\ \ 1{,}41421\ \ \ldots$$

eller

$$1;\ \ \frac{14}{10};\ \ \frac{141}{100};\ \ \frac{1414}{1000};\ \ \frac{14142}{10000};\ \ \frac{141421}{100000}\ \ \ldots$$

Hvis vi opløfter 3 i ovenstående rationale eksponenter får vi ifølge (23):

$$3^1 = 3;\quad 3^{\frac{14}{10}} = \sqrt[10]{a^{14}} = 4{,}655536722\ldots;\quad 3^{\frac{141}{100}} = \sqrt[100]{a^{141}} = 4{,}706965002\ldots;\quad \text{osv.}$$

Lad os opskrive i en tabel:

x	3^x
1	3
1,4	4,655536722...
1,41	4,706965002...
1,414	4,727695035...
1,4142	4,728733930...
1,41421	4,728785881...
1,414213	4,728801466...
1,4142135	4,728804064...
1,41421356	4,728804375...

Vi ser, at tallene 3^x i højre søjle ser ud til at nærme sig til et tal, idet flere og flere cifre bliver ens jo nærmere vi tilnærmer $\sqrt{2}$ med x. Dette viser sig at være tilfældet, og det er derfor nærliggende at definere $3^{\sqrt{2}}$ som det tal, som tallene i højre kolonne nærmer sig til, dvs. 4,728804375... Dette er netop det man gør! Til slut skal det lige nævnes, at man kan vise, at hvis man udvider potensbegrebet som beskrevet overfor, så gælder potensreglerne i alle tilfælde!

□

Appendiks B. Enkeltlogaritmisk koordinatsystem

Ifølge definitionen af enkeltlogaritmisk papir, kan sætning 19 bevises ved at vise, at når man afbilder $\log(y)$ som funktion af x, så får man en lineær sammenhæng, hvis og kun hvis f er en eksponentiel funktion.

Sætning 29
f er en eksponentiel udvikling $\Leftrightarrow$ $\log(y)$ er en lineær funktion af x.

Bevis: Lad os først vise $\Downarrow$: Det antages, at f er en eksponentiel udvikling, dvs. at funktionen kan skrives på formen: $y = b \cdot a^x$ med $a,b \in R_+$. Hvis vi tager logaritmen på begge sider af lighedstegnet og udnytter logaritmereglerne fås:

(24) $$\log(y) = \log(b \cdot a^x) = \log(b) + \log(a^x) = \log(a) \cdot x + \log(b)$$

Heraf ser vi, at logaritmen til y er en lineær funktion af x, med hældningskoefficient $\log(a)$ og konstantled $\log(b)$.
Lad os dernæst slutte den anden vej, $\Uparrow$: Det antages, at $\log(y)$ er en lineær funktion af x, dvs. vi har $\log(y) = cx + d$ for to konstanter $c,d \in R$. Vi tager antilogaritmen på begge sider og får:

(25) $$y = 10^{cx+d} = 10^{cx} \cdot 10^d = (10^c)^x \cdot 10^d$$

hvor to potensregler er benyttet. Vi ser, at vi har at gøre med en eksponentiel udvikling med grundtal $a = 10^c$ og $b = 10^d$.

□

Opgaver

Opgaverne er nummereret således, at det første ciffer angiver det afsnit, opgaven hører til. Opgave 4 er således en opgave hørende til afsnit 4.

Opgave 10

Reducer nedenstående potensudtryk.

a) $a \cdot b^2 \cdot a^{-3} \cdot b^4$ b) $(2x)^3 \cdot x$ c) $(ab^{-2})^2 \cdot a^{-2}$

d) $\dfrac{a \cdot (2ab)^2}{a^3 b}$ e) $\left(\dfrac{2a}{b}\right)^{-1} \cdot a^3 \cdot b^{-1}$ f) $a \cdot \dfrac{a^2 \cdot b}{(ab)^3}$

Opgave 11

Reducer nedenstående potensudtryk.

a) $\dfrac{(2\sqrt{x})^3}{2x}$ b) $\dfrac{(2a)^2 \cdot \sqrt{a} \cdot}{2a^3}$ c) $\dfrac{x \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x}}{x^2}$

d) $8b^2 \cdot \left(\dfrac{2^{-1} \cdot a}{\sqrt{b}}\right)^3$ e) $\sqrt{\dfrac{x}{12y}} \cdot \dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{3} \cdot x}$ f) $\left(\dfrac{2b}{a}\right)^2 \cdot \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{2a^2 b}}$

Opgave 20

Et hus stiger på 6 år i værdi fra 1,6 mill. kr. til 2,4 mill. kr.

a) Hvor mange procent er husets værdi vokset med i hele perioden?

b) Hvor meget er den gennemsnitlige årlige procentvise stigning? Benyt renteformlen.

Opgave 21

Benyt grafregneren til at tegne graferne for nedenstående eksponentielle funktioner. Hvis du ikke kan huske, hvordan det gøres på grafregneren, så kan du tage et kig på eksempel 27 i afsnit 8.

a) $y = 3 \cdot 1{,}4^x$

b) $y = 1{,}5 \cdot 0{,}67^x$

c) $y = 0{,}34 \cdot 2{,}56^x$

Opgave 22

Lad $y = 67 \cdot 2{,}6^x$. Hvad skal y-værdien fremskrives med, hvis:

a) x øges med 1 b) x øges med 2 c) x øges med 2,5 d) x mindskes med 1

Opgave 23

a) Lad $y = 34{,}1 \cdot 1{,}023^x$. Hvor meget fremskrives y med, hvis x øges med 4?

b) Lad $y = 0{,}64 \cdot 0{,}92^x$. Hvor meget fremskrives y med, hvis x øges med 0,7?

c) Lad $y = 5 \cdot 1{,}7^x$. Hvor meget skal x øges med, for at y fremskrives med 3?

d) Lad $y = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$. Hvor meget fremskrives y med, hvis x øges med 4,5?

Opgave 24

Lad $y = 8 \cdot 1{,}12^x$.

a) Hvor meget øges y med i procent, hvis x øges med 1?

b) Hvor meget øges y med i procent, hvis x øges med 2,8?

c) Hvor meget reduceres y med i procent, hvis x reduceres med 1,5?

d) Hvor meget skal x øges med, for at y øges med 50%?

Opgave 25

Lad $y = 23 \cdot 0{,}84^x$.

a) Hvor meget reduceres y med i procent, hvis x øges med 1?

b) Hvor meget reduceres y med i procent, hvis x øges med 1,65?

c) Hvor meget skal x øges med, for at y reduceres med 75%.

Opgave 26

Bestem forskrifterne for de eksponentielle funktioner, hvis graf går igennem følgende punkter:

a) $(0,3)$ og $(1,6)$.

b) $(-2,6)$ og $(5,32)$

c) $(7,67)$ og $(10,8)$

d) $(-3{,}7;\, 5{,}6)$ og $(8{,}1;\, 30{,}7)$

e) $(-5{,}2;\, 6{,}9)$ og $(4{,}87;\, 24{,}2)$

f) $(4{,}56;\, 0{,}983)$ og $(18{,}7;\, 0{,}0764)$

Opgave 27

En eksponentiel funktion opfylder $f(1{,}7) = 23{,}8$ og $f(5{,}1) = 102{,}5$. Bestem forskriften for f blandt andet ved hjælp af sætning 11.

Opgave 28

En eksponentiel funktion opfylder $f(-4{,}5) = 408$ og $f(20{,}6) = 0{,}250$. Bestem forskriften for f blandt andet ved hjælp af sætning 11.

Opgave 29

Nedenfor er nogle tabeller over funktionsværdier for nogle eksponentielle funktioner. Udfyld de tomme felter og opskriv forskriften for funktionerne. Prøv at gøre det uden at bruge formlen for a.

a)

x	0	1	2	3	4
y	2	3			

b)

x	–1	0	1	2	3
y			3	6	

c)

x	–2	–1	0	1	2
y			3		$^{16}\!/_3$

Opgave 30

Løs følgende ligninger ved brug af logaritmereglerne og simple lommeregnerfunktioner, men *uden* `solve`-funktionen:

a) $\log(x) = 2$
b) $\log(x) = 1{,}94$
c) $\log(x+5) = -1$
d) $\log(x^2) = 1{,}5$
e) $\log(x) + 11 = 7$
f) $2 \cdot \log(x^3) - 1 = 0$
g) $\log(x^2 + 5x - 4) = 1$

Opgave 31

Løs følgende ligninger ved brug af potens- og logaritmeregler og simple lommeregnerfunktioner, men *uden* `solve`-funktionen:

a) $2^x = 8$
b) $1{,}8^x = 300$
c) $34 \cdot 0{,}872^x = 67$
d) $2 \cdot 4^{x-4} = 32$
e) $9^x = -8$
f) $3^x \cdot 2^x = 48$
g) $12^x = 135 \cdot 6^x$

Opgave 32

Løs følgende ligninger ved brug af logaritmereglerne og simple lommeregnerfunktioner, men *ikke* `solve`:

a) $4\cdot 10^{2x-1} = 5^x$

b) $\left(\tfrac{1}{2}\right)^{x+3} = 2^{1-x}\cdot 8$

Opgave 33

Forsøg først at løse disse ligninger uden brug af de avancerede funktioner på grafregneren. Derefter kan du løse dem ved hjælp af `solve`.

a) Lad $y = 0{,}7\cdot 2{,}7^x$. Løs $y = 100$.

b) Lad $y = 8{,}201\cdot 0{,}867^x$. Løs $y = 6$.

c) Lad $y = 89\cdot 3{,}21^x \;;\; x\in[-3;8]$. Bestem værdimængden.

d) Lad $y = 2\cdot 0{,}378^x$. Værdimængden er $[3;20[$. Bestem definitionsmængden?

Opgave 34

Et jordskælv har styrken 6,7 på Richter-skalen. Se definitionerne i eksempel 16.

a) Hvor meget seismisk energi er udløst ved jordskælvet?

b) Hvor mange gange mere energi udløses ved et jordskælv, som er 1 højere på Richter-skalen?

Opgave 35

Ved et jordskælv udløses en energi på $9{,}4\cdot 10^{16}\ \mathrm{J}$. Hvor stærk er Jordskælvet målt i Richter-tal? Se definitionerne i eksempel 16.

Opgave 36 (pH-værdi)

I kemi har man begrebet *pH-værdi* til at beskrive om et stof er en syre eller base. Hvis vi har at gøre med en syre, så kan vi abstrakt betegne den med symbolet HA, hvor A står for syreresten. Hvis man opløser syren i vand, opstår der en ligevægt, som kan udtrykkes ved: $\mathrm{HA} \rightleftarrows \mathrm{H}^+ + \mathrm{A}^-$. For en stærk syre er ligevægten forskudt mod højre, for en svag syre er den forskudt mod venstre. Brintjon-koncentrationen afgør, hvor stærk en syre, der er tale om. Helt præcis definerer man pH-værdien på følgende måde:

$$\text{pH} = -\log\left[H^+\right]$$

hvor $\left[H^+\right]$ betegner brintjon-koncentrationen målt i mol.

a) Fremstiller man en 0,05 molær opløsning af HCl (saltsyre), kan man regne med, at $\left[H^+\right]=0,05$. Bestem opløsningens pH-værdi.
b) Bestem brintjon-koncentrationen i en opløsning med en pH-værdi på 3,6.
c) Som bekendt er den *neutrale* pH-værdi lig med 7, som fx i rent vand. Hvor stor er brintjon-koncentrationen her?

Opgave 37 (En stjernes størrelsesklasse)

Allerede i det antikke Grækenland inddelte man stjerner i klasser efter, hvor klart de lyste. De klareste stjerner fik størrelsesklasse 1, mens de, der lige netop kunne anes med det blotte øje, fik tildelt størrelsesklasse 6. I dag er man lidt mere præcis med definitionerne. Man arbejder med en såkaldt *tilsyneladende størrelsesklasse*, *m*, som løst sagt er den størrelsesklasse stjernen observeres med fra Jorden. Desuden tildeles stjernen en *absolut størrelsesklasse*, *M*, som er den tilsyneladende størrelsesklasse, som stjernen ville have haft, hvis den befandt sig i en ganske bestemt afstand fra Jorden, nemlig 10 parsec. Vi skal ikke gå nærmere ind i detaljerne her, men derimod postulere en sammenhæng mellem en stjernes tilsyneladende størrelsesklasse, *m*, dens absolutte størrelsesklasse, *M*, samt stjernens afstand til Jorden, *d*, regnet i enheden parsec:

$$m - M = 5\cdot\log(d) - 5$$

En stjernes absolutte størrelsesklasse kan vurderes ved at studere dens spektrum , altså fordelingen af det lys, som stjernen udsender.

a) For Polarstjernen er $m = 2,3$ og $M = -4,6$. Bestem afstanden *d* til Polarstjernen, regnet i parsec.
b) En meget klar stjerne er *Rigel*, som befinder sig i stjernebilledet Orion. Den har tilsyneladende størrelsesklasse 0,12. Afstanden fra Jorden til Rigel er vurderet til omkring 237 parsec. Bestem den absolutte størrelsesklasse for Rigel.
c) Solens absolutte størrelsesklasse er 4,8 og befinder sig $4,85\cdot 10^{-6}$ parsec borte fra Jorden. Bestem Solens tilsyneladende størrelsesklasse. Det skal i øvrigt nævnes, at Rigel lyser ca. 40.000 gange så kraftigt som Solen – det er en *super gigant*!

NB! Billedet viser *Andromeda*-galaksen.

Opgave 38 (Lydstyrke)

Et andet område, hvor man benytter logaritmer er ved definitionen af *lydstyrke*, der som bekendt regnes i *decibel*. En af grundene til at definere lydstyrke via en logaritmefunktion er, at øret sådan omtrent "opfatter logaritmisk". Det menneskelige øre kan således skelne forholdsvis små forskelle i lydintensitet i den lave ende af skalaen, mens tilsvarende forskelle i den høje ende ikke vil kunne skelnes. Lyd udbreder sig ved at luftmolekyler sættes i svingninger og støder til hinanden. Derved transporteres energi. *Intensiteten* af en lydbølge defineres som den energi, som pr. sekund passerer igennem et areal på 1 kvadratmeter anbragt vinkelret på udbredelsesretningen. Intensitet regnes derfor i enheden W/m^2. Den svageste lyd, som det menneskelige øre kan høre, er på $I_0 = 10^{-12}\ \text{W/m}^2$. Lydstyrken L, svarende til en lydintensitet på I, er defineret på følgende måde og dens enhed er decibel (dB):

$$L = 10 \cdot \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

a) Hvad er den mindste lydstyrke, som det menneskelige øre kan høre? (Sæt $I = I_0$).
b) En lydbølge har en intensitet på $4 \cdot 10^{-5}\ \text{W/m}^2$. Hvor stor er lydstyrken?
b) Almindelig tale svarer til 60 dB. Hvor stor er lydintensiteten her?
c) Samme spørgsmål for meget høj musik ved 130 dB?
d) Blandt musikeksperter er det velkendt, at lydstyrken vokser med ca. 3 dB, når effekten fordobles. Kan du eftervise dette? (Når effekten fordobles, fordobles også intensiteten).

Opgave 40

Foretag nedenstående omskrivninger.

a) Omskriv funktionen $y = 2 \cdot 4{,}5^x$ til formen $y = b \cdot e^{k \cdot x}$.
b) Omskriv funktionen $y = 65 \cdot 0{,}532^x$ til formen $y = b \cdot e^{k \cdot x}$.
c) Omskriv funktionen $y = 0{,}13 \cdot e^{-2{,}38 \cdot x}$ til formen $y = b \cdot a^x$.

Opgave 41

Løs nedenstående ligninger, først uden brug af grafregnerens `solve`-funktion.

a) $2{,}3 \cdot e^{1{,}75 \cdot x} = 67$

b) $58 \cdot e^{-9{,}8 \cdot x} = 0{,}042$

c) $12 \cdot e^{0{,}04 \cdot x} = 451 \cdot e^{-0{,}23 \cdot x}$

Opgave 42

Man kan vise, at logaritmefunktioner med forskellige grundtal alle er *proportionale*. Det er således logaritmen $\ln(x)$ med grundtal e, og logaritmen $\log(x)$ med grundtal 10 dermed også. Benyt logaritmereglerne for $\ln(x)$ samt (10) til at vise, at der gælder følgende: $\ln(x) = 1/\log(e) \cdot \log(x)$.

Opgave 50

a) Foretag følgende multiplikationer og divisioner ved hjælp af logaritme- og antilogaritmetabel:

$$49,71 \cdot 82,35\,; \quad 1356 \cdot 778,5\,; \quad \frac{23,7}{2,872}\,; \quad \frac{4,214}{0,03421}$$

b) Overvej hvordan man nemt kan udføre potensopløftning ved hjælp af logaritmer: Anvend logaritmeregel 3) fra sætning 14 og find en metode á lá den i eksemplet gennemgået i afsnit 5. Afslut med at anvende metoden til at bestemme

$$3,562^5, \quad \sqrt[3]{4,578}, \quad 5^{2,407}.$$

c) Kombiner metoderne fra a) og b) og udregn $\dfrac{3,871 \cdot 3,6^4}{\sqrt{8,976}}$.

Kontrollér eventuelt resultaterne på lommeregneren.

Opgave 51

Brug Erlang C's fircifrede logaritmetabeller til at foretage følgende udregninger:

$$2,860 \cdot 1,533\,; \quad 0,00372 \cdot 145\,; \quad 4,067 \cdot 6,870\,; \quad 25,92 \cdot 58,91\,; \quad 4,981 \cdot 365,9$$

$$\frac{7,201}{3,277}\,; \quad 3,876^2\,; \quad \sqrt{46,82}\,; \quad 8921 \cdot \sqrt[3]{461,3}\,; \quad \frac{7,43}{\sqrt{13,98}} \cdot 3,8^3$$

$$\sqrt{\frac{6,210}{23,78}}, \quad 6,592^3.$$

Opgave 60

a) Benyt grafregneren til først at tegne grafen for funktionen $y = 3 \cdot 2^x$.

Vi kan imitere brugen af enkeltlogaritmisk koordinatsystem ved at tage logaritmen til y-værdierne: De nye y-værdier, kaldet y_1, er altså givet ved $y_1 = \log(y) = \log(3 \cdot 2^x)$.

b) Benyt grafregneren til at afbilde y_1 som funktion af x og verificer, at grafen er retlinet, som forudsagt i sætning 19.

Opgave 70

Bestem forskrifterne for de eksponentielle funktioner $y = b \cdot a^x$, som opfylder nedenstående. Tænk evt. på, om du kan bruge oplysningerne til at skabe to punkter på grafen!

a) Grafen for funktionen går igennem punktet $(-2;6)$ og funktionsværdien fremskrives med 2,5 hver gang x øges med 1.

b) Grafen for funktionen går igennem punktet $(2;5,6)$ og funktionsværdien bliver 4 gange så stor, hver gang x øges med 3.

c) $f(-4) = 3,2$ og funktionsværdien øges med 13%, hver gang x øges med 1.

d) $f(5) = 0,065$ og funktionsværdien øges med 50% hver gang x øges med 2.

e) $f(4) = 2$ og funktionsværdien mindskes med 20% hver gang x øges med 2.

f) $f(4) = 30$ og fordoblingskonstanten er 0,7.

g) $f(70) = 23,89$ og halveringskonstanten er 10.

h) $f(0,0023) = 23,66$ og fordoblingskonstanten er 0,6.

Opgave 71

Bestem fordoblingskonstanten/halveringskonstanten for følgende funktioner:

a) $f(x) = 38 \cdot 1,11^x$.

b) $f(x) = 1,65 \cdot 1,00678^x$

c) $f(x) = 70 \cdot 0,87^x$

d) $y = 800 \cdot 0,72^x$

e) $y = 0,67 \cdot e^{0,24 \cdot x}$

f) $y = 78,3 \cdot e^{-2,56 \cdot x}$

Opgave 72

Et beløb indsættes på en konto og bliver fordoblet på 9 år. Hvor stor har den gennemsnitlige procentvise stigning været?

Opgave 73

Bevis sætning 24 ved blandt andet at imitere beviset for sætning 21. Du skal her benytte den naturlige logaritme i stedet for titalslogaritmen.

Opgave 74

En eksponentiel funktion har halveringskonstant 14,2. Bestem grundtallet a.

Opgave 80

En bakteriekultur udvikler sig i løbet af 2,5 timer som vist i tabellen nedenfor.

t (min)	0	15	30	45	60	75
Antal	328	575	920	1420	2416	4300

t (min)	90	105	120	135	150
Antal	6615	11500	17930	31145	49300

a) Påvis, at udviklingen tilnærmelsesvist er eksponentiel ved at indtegne datapunkterne på enkeltlogaritmisk papir. Bestem desuden a og b i $y = b \cdot a^x$.
b) Hvor mange bakterier vil der være tilstede efter 3 timer og 30 minutter, hvis tendensen fortsætter?
c) Hvornår var bakteriekulturen oppe på 25.000 bakterier?
d) Hvor stor er fordoblingstiden?
e) Hvor mange procent vokser bakteriekulturen med hvert minut?
f) Hvor mange procent vokser bakteriekulturen med for hver 5 minutter?
g) Løs a) – c) ved hjælp af grafregneren. Start med at foretag eksponentiel regression!

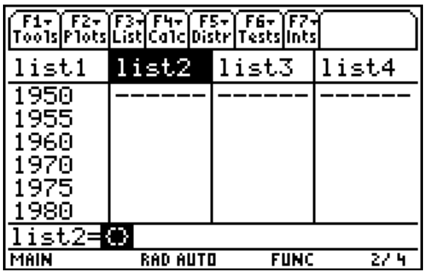
Opgave 81 (Udviklingen af indbyggertallet i en storby)

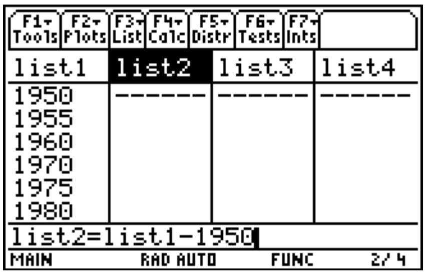
Nedenfor er givet udviklingen af indbyggertallet i en storby i årene fra 1950 til 1990.

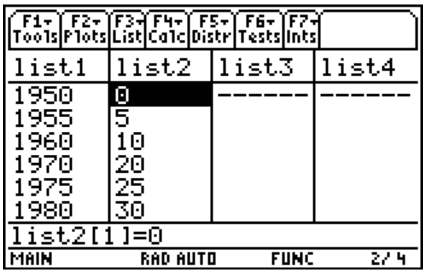
År	1950	1955	1960	1970
Indbyggertal	518.000	635.000	767.000	1.160.000

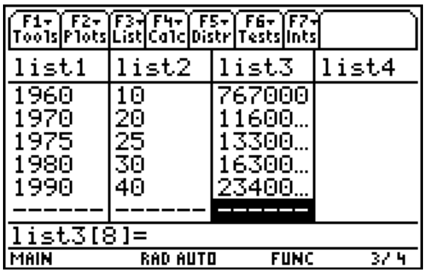
År	1975	1980	1990
Indbyggertal	1.330.000	1.630.000	2.340.000

a) Det skal ved brug af grafregneren undersøges, om der er tale om en tilnærmelsesvist eksponentiel udvikling i den 40-årige periode. For ikke at komme til at arbejde med en helt uhyrlig værdi for b, så skal du *ikke* afbilde indbyggertallet som funktion af årstallet, men derimod indbyggertallet som funktion af *antal år efter 1950*. Man skal altså trække 1950 fra alle årstallene for at få de nye x-værdier. I stedet for at gøre det manuelt i før brug af grafregneren, kan det gøres smart i `Stat/List-editoren` ved at lave en ekstra søjle: Indtast først årstallene i `List1`. Flyt så cursoren op på `List2` og tryk ÷. Du skal herefter i indtastningslinjen kommer til at stå `list2=list1-195Ø`. Herefter indtastes indbyggertallene i søjle 3. Det hele er vist på figurerne herunder:

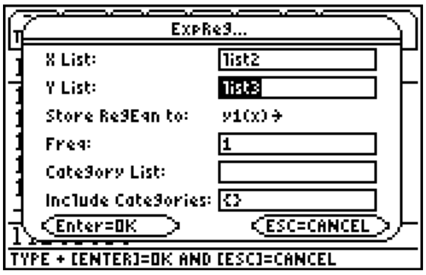








Når du foretager eksponentiel regression, så skal du huske i boksen `ExpReg...` at du kommer til at afbilde søjle 2 og 3, *ikke* søjle 1 og 2:



b) Foretag en prognose for, hvor stor befolkningen i byen vil være i år 2010, hvis udviklingen fortsætter som hidtil.

c) Hvornår vil befolkningen være nået 8 millioner, hvis udviklingen fortsætter.

d) Nu kan man jo aldrig vide, om den eksponentielle udvikling vil fortsætte på samme vis. Angiv nogle faktorer, som kan betyde, at udviklingen måske *ikke* vil fortsætte efter denne eksponentielle model.

e) Hvad er den *gennemsnitlige* årlige procentvise stigning i befolkningen i storbyen?

f) Hvor mange procent stiger befolkningens størrelse i gennemsnit med for hver 10 år?

g) Hvor mange procent steg befolkningens størrelse rent faktisk med fra 1970 til 1980? Hvorfor behøver dette tal ikke nødvendigvis stemme overens med resultatet fra spørgsmål f)?

h) Hvor mange procent vil befolkningen i gennemsnit stige med hvert halve år?

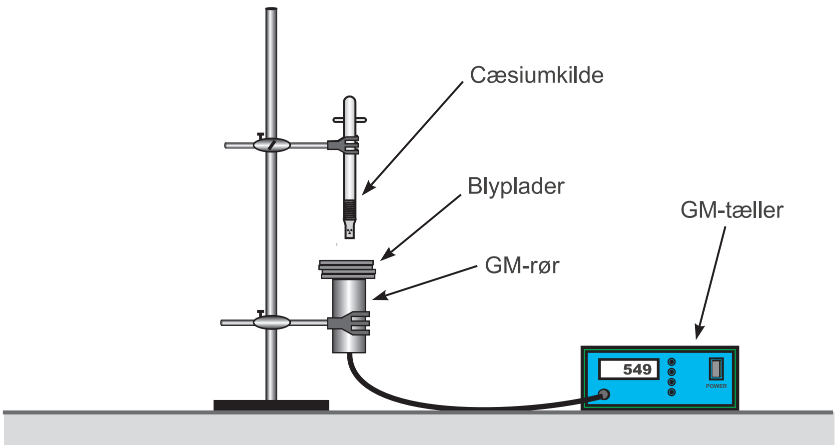
Opgave 82

Benyt grafregneren til at vise, at der er en eksponentiel sammenhæng mellem x og y:

x	-4,5	-2,7	1,1	2,7	3,8	4,3	6,9	8,3
y	1,3	3,5	24,8	52,7	102	117	487	972

Opgave 83 (Absorption af gammastråling i bly)

Som bekendt benyttes blyafskærmning på hospitaler under røntgenundersøgelser. Gammastråling er også elektromagnetisk stråling og den er faktisk endnu mere energirig end røntgenstråling. Man kan vise, at den gammastråling, som slipper igennem et lag af et givet materiale, aftager eksponentiel med lagets tykkelse. Bly er et af de mest effektive materialer til at absorbere stråling. I forsøget vist på figuren er en cæsium-kilde sat op i et stativ. En række blyplader er anbragt ovenpå et Geiger-Müller-rør (GM-rør), som er tilsluttet en GM-tæller. GM-tælleren giver et tælletal, som efter korrektion for blandt andet baggrundsstråling, kan antages at være proportional med det rigtige antal gamma-fotoner, som slipper igennem blylaget.



x (mm)	0	1,3	2,6	3,9	5,2	6,5
Korrigeret tælletal	8399	6111	5293	4593	3864	3353

x (mm)	7,8	9,1	10,4	11,7	13,0
Korrigeret tælletal	2747	2288	2080	1805	1473

a) Vis, at det korrigerede tælletal som funktion af blylagets tykkelse er tilnærmelsesvist eksponentiel aftagende, og bestem forskriften $y = b \cdot a^x$.
b) Bestem halveringstykkelsen for den pågældende stråling i bly.
c) Hvor tyk skal blylaget være, for at det strålingen reduceres *til* 5%?
d) Hvor mange procent reduceres strålingen med for hver ekstra millimeter bly?

Opgave 84

Der er en lov, som kaldes ”Moores Law”. Søg på Internettet og forklar, hvad den går ud på. Hvad har den med eksponentielle funktioner at gøre?

Opgave 85 (Trykket i atmosfæren)

Jordens atmosfære er kun omkring 100 km tyk, selv om det kan være svært at angive en konkret afgrænsning af den. Atmosfæren inddeles i en række forskellige lag: Fra neden har vi *Troposfæren*, *Stratosfæren*, *Mesosfæren* og *Termosfæren*. I Troposfæren viser det sig, at man omtrent kan regne trykket som værende eksponentielt aftagende med højden. Det oplyses, at halveringshøjden er omtrent 5500 m. Trykket ved Jordens overflade sætter vi til 1 atmosfære (1 atm.).

a) Hvor stort er trykket i højden 500 m over jordoverfladen? Samme spørgsmål for 10.000 meters højde.
b) Hvor højt skal man op i Troposfæren for at trykket er reduceret til 0,8 atm?
c) Hvor meget aftager trykket med i procent for hver km's opstigning?

Opgave 86 (Kulstof-14-metoden)

Kulstof-14-metoden er en metode til at bestemme alderen af arkæologiske fund. Der er kulstof i både muskelvæv og knogler. En lille brøkdel af dette kulstof er den radioaktive isotop C-14 (kulstof–14). I atmosfæren sker der hele tiden en dannelse af C-14 samtidigt med, at noget C-14 henfalder. Derved er der opstået en ligevægt mellem dannelse og henfald af C-14 i atmosfæren. Da C-14 har de samme kemiske egenskaber som den ikke-radioaktive kulstof-isotop C-12, indgår den på lige fod med C-12. Som følge heraf er der i alle levende organismer en *fast* brøkdel af kulstoffet, som er isotopen C-14. Når organismen dør, vil brøkdelen mindskes, eftersom organismen ikke længere optager nyt kulstof, mens henfaldet af C-14 i organismen fortsætter. Eftersom halveringstiden for C-14 er 5730 år, vil brøkdelen af C-14 efter 5730 år kun være halvt så stor i den døde organisme, som den var oprindeligt i den levende organisme. Da kulstof-14-metoden i 1949 blev indført af den amerikanske fysik-kemiker Willard Frank Libby antog man, at indholdet af C-14 i atmosfæren – og dermed i levende planter og dyr var uforandret igennem tiderne. Det har dog siden vist sig ikke at holde stik. Heldigvis har man ved undersøgelser af årringe i træer, specielt den amerikanske børstekoglefyr, som kan blive utrolig gammel, fundet en meget nøjagtigt værdi for C-14 indholdet i levende planter i de sidste 8000 år. Herved har man kunnet foretage korrektioner af de tidligere C-14-dateringer. Selv om metoden således er blevet meget mere pålidelig, må man alligevel regne med en usikkerhed på mindst 100 år i C-14-dateringer.

Grauballemanden er det mest velbevarede moselig i verden. Han blev fundet i en mose nær Grauballe ved Silkeborg i 1952, liggende ca. én meter under overfladen. Han er så velbevaret, så hår, negle og skægstubbe er bevaret. På billedet ovenfor ser du hans hånd. Antag, at man i 1952 målte en prøve fra Grauballemanden til et gennemsnitstælletal på 12,2 tællinger i minuttet pr. gram carbon, efter korrektion for baggrundsstråling. Hvornår døde Grauballemanden, hvis gennemsnitstælletallet for et levende menneske på den tid var 16,0 tællinger pr. minut?