# Differentialkvotienter og hastigheder

I dette lille tillæg skal vi kigge på, hvorfor begrebet *differentialkvotient* er så vigtigt i man­ge anvendelser i fysik, biologi, kemi, økonomi, etc. En differentialkvotient kan nem­­lig i en vis forstand opfattes som en *hastighed*. Lad os kigge på det mest oplagte til­fæl­de, hvor en bil kører ud ad en vej. Langs med vejen er der lagt et målebånd, så vi til et­­hvert tidspunkt *t* kan måle, hvor bilen er. Dette giver anledning til en funktion, som tra­­di­tionelt kaldes for *stedfunktionen* og betegnes . Hvis der for eksempel gælder at , så betyder det, at bilen befinder sig ud for 258 meter på målebåndet til tids­­punktet 12 sekunder – hvis vi for eksempel underforstår at tiden regnes i sekunder og afstand i meter.



Lad os sige, at vi kører en tur til Tyskland og at turen er på 50 km og tager 2 timer. Så ved de fleste, at så har gennemsnitshastigheden været . Det be­ty­­der dog ikke nødvendigvis, at bilen under hele turen har kørt med samme øje­blik­kelige hastighed. Sidstnævnte er hvad bilens speedometer viser. Vi skal have for­ma­li­se­ret be­greberne *gennemsnitshastighed* og *øjeblikshastighed* i det følgende. Lad os kalde bilens stedfunktion for . Grafen for den er vist på figuren herunder. Vi er ude på at de­finere, hvad der i det hele taget menes med udtrykket øjeblikshastigheden til tids­punk­tet *t*.



Til tidspunktet *t* er bilen på stedet angivet ved . Til tidspunktet  er bilen på stedet angivet ved . I løbet af tidsrummet  har bilen altså flyttet sig stykket , regnet med fortegn. *Gennemsnitshastigheden* er dermed givet ved:

(1) 

netop den størrelse, som vi plejer at kalde *differenskvotienten*. Rent geometrisk er det *hæld­­ningen af sekanten* igennem de to grafpunkter  og *P*.

|  |
| --- |
| Definition (Øjeblikshastighed) Hvis differenskvotienten  har en grænseværdi for , så siges sted­funk­tio­nen  at være *differentiabel* i punktet *t* med *differentialkvotient*  og den kal­des også for *øjeblikshastigheden til tidspunktet t*. og betegnes .  (2) |

Definitionen af begrebet øjeblikshastighed passer godt overens med den almindelige løse op­fat­tel­se af begrebet hastighed: Når tidsrummet  gøres mindre og mindre, så kan bilen ”ikke nå” at ændre ret meget hastighed i det givne tidsrum. Derfor vil gen­nem­snitshastigheden og hastigheden have en tendens til at blive mere og mere ens, når tids­rummet  nærmer sig 0. Rent geometrisk er øjeblikshastigheden lig med *hæld­nin­gen af tangenten i t*.

#### Eksempel 1

Nu er det sjældent, at en bils bevægelse kan beskrives ved nogen særlig pæn forskrift, men lad os antage, at stedfunktionen er givet ved følgende udtryk:



hvor *t* regnes i sekunder og strækningen i meter. Da fås hastigheden ved at differentiere sted­funktionen:



Vil man have (øjebliks-)hastigheden til tidspunktet  indsættes denne værdi blot i ud­­trykket for : . Til tidspunktet 3 sek. er hastigheden altså 1,96 m/s.

#### Eksempel 2

Mens man kan få en bil til at bevæge sig næsten som man ønsker ved at trykke mere eller mindre på speederen, så er der en anden bevægelse, som foregår helt af sig selv uden at man behøver at gøre noget: *Det frie fald*. Hvis man slipper en sten fra toppen af et højt tårn, så vil tyngdekraften trække i stenen og få den til at bevæge sig mod jorden. Den berømte fysiker *Galileo Galilei* (1564-1642) var den første til korrekt at beskrive dens bevægelse. Hvis man anbringer et målebånd fra toppen af tårnet og lader det pege nedad, så viser det sig, at stedfunktionen kan angives ved følgende formel:

(3) 

hvor *g* betegner *tyngdeaccelerationen*. I Danmark er tyngdeaccelerationen lig med 9,82 m/s2. Hvis vi underforstår SI-enheder, så kan vi altså skrive stedfunktionen for det frie fald som .

|  |  |
| --- | --- |
| Lad os sige, at en person dropper en sten fra top­pen af Rundetårn, som er 34,8 meter højt. vi gerne vil bestemme hastigheden af ste­nen lige før den rammer jorden.  *Løsning*: Først skal vi finde det tidspunkt, hvor stenen rammer jorden. Det gøres ved at løse ligningen :    Det tager altså 2,66 sekunder. Vi skal her­efter have fat i hastighedsfunktionen:    Indsættes  fås:    Stenens fart er altså 26,1 m/s lige før den rammer jorden. |  |