Andengradspolynomier

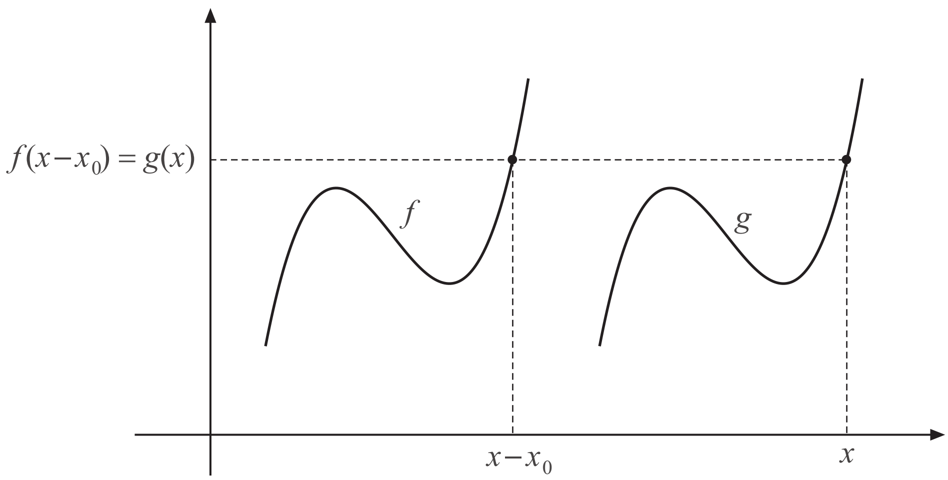
Et polynomium er en funktion på formen $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots a_1 x + a_0$, hvor $a_i \in R$ kaldes polynomiets *koefficienter*. *Graden* af et polynomium er lig med den højeste potens af *x*, for hvilket den tilhørende koefficient er forskellig fra 0. Ovenstående polynomium har altså grad *n* såfremt $a_n \neq 0$. I denne note skal vi især se på andengradspolynomier, men til sidst også lidt på polynomier af højere grad. Et andengradspolynomium er altså en funktion på formen $f(x) = ax^2 + bx + c$, hvor $a, b, c \in R$ og $a \neq 0$. Som et redskab til at studere graferne for andengradspolynomier vil vi se på parallelforskydning af grafer i næste afsnit.

1. Parallelforskydning

Antag, at vi parallelforskyder grafen for en funktion *f*. Spørgsmålet er, om vi kan bestemme en forskrift for funktionen hørende til den parallelforskudte graf? Svaret er bekræftende, som de følgende sætninger viser. I næste afsnit vil vi anvende denne viden til specielt at se på parallelforskydninger af grafer for andengradspolynomier. Sætningerne i dette afsnit gælder imidlertid for enhver funktion *f*.

Sætning 1
Parallelforskydes grafen for funktionen $f(x)$ med x_0 i *x*-aksens retning, så fås grafen for funktionen $g(x) = f(x - x_0)$. Forskriften for *g* fås altså ved i forskriften for *f* at udskifte alle forekomster af *x* med $x - x_0$.

Bevis:



Af figuren ser vi umiddelbart, at funktionsværdien for *g* i punktet *x* er lig funktionsværdien for f i punktet $x - x_0$, altså $g(x) = f(x - x_0)$.

Eksempel 2

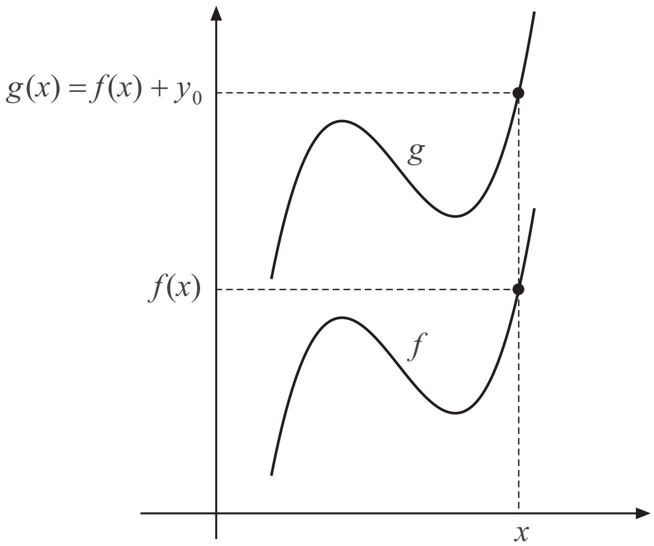
Givet funktionen $f(x) = (x+1) \cdot 2^x$. Hvis grafen for denne funktion parallelforskydes med 3 i x-aksens retning, så vil man få grafen for en funktion med følgende forskrift:

$$g(x) \;=\; f(x-3) \;=\; ((x-3)+1) \cdot 2^{x-3} \;=\; (x-2) \cdot 2^{x-3}$$

idet vi udskifter alle forekomster af x med $x-3$.

> **Sætning 3**
> Parallelforskydes grafen for funktionen f med y_0 i y-aksens retning, så fås grafen for funktionen $g(x) = f(x) + y_0$. Forskriften for g fås altså ved at lægge y_0 til i forskriften for f.

Bevis:



Alle y-værdier skal der lægges y_0 til, altså er $g(x) = f(x) + y_0$ en forskrift for den nye, parallelforskudte graf.

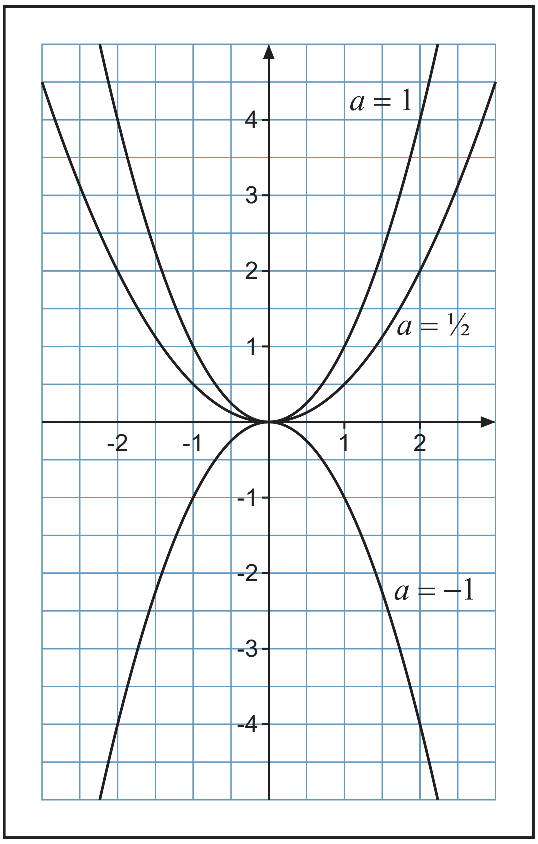
□

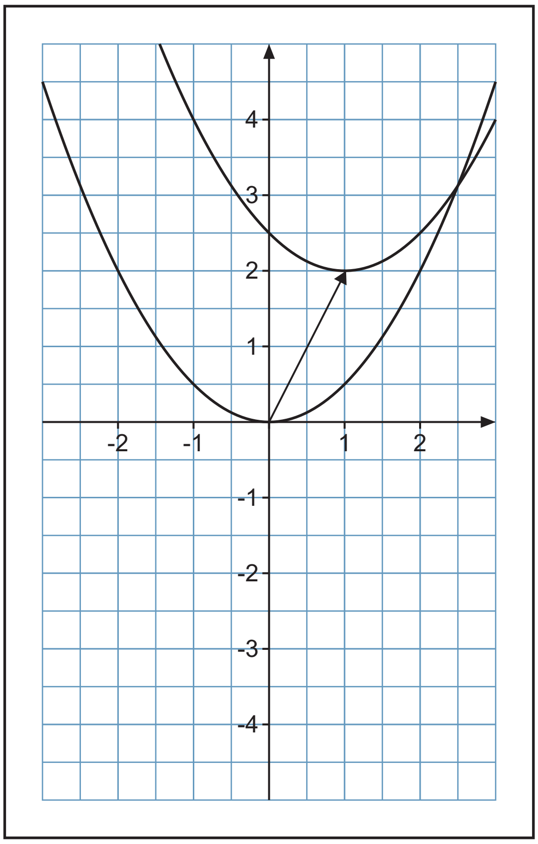
Lad os sammenfatte sætningerne 1 og 3 i én sætning:

> **Sætning 4**
> Parallelforskydes grafen for funktionen f med (x_0, y_0), dvs. med x_0 i x-aksens retning og med y_0 i y-aksens retning, så fås grafen for funktionen med forskrift $g(x) = f(x-x_0) + y_0$. Forskriften for g fås altså ved i forskriften for f at udskifte alle forekomster af x med $x-x_0$ samt til sidst at lægge y_0 til.

2. Grafen for et andengradspolynomium

Det mest simple andengradspolynomium, man kan tænke sig, er på formen $f(x) = ax^2$. Nedenfor til venstre er grafen for et sådant andengradspolynomium afbildet for tilfældene $a = 1$, $a = ½$ og $a = -1$. I alle tilfælde er grafen en *parabel* med toppunkt i $(0,0)$. Hvis a er positiv, vender "grenene" opad, mens de vender nedad, hvis a er negativ. Jo større a er numerisk set, jo stejlere er grenene.





Eksempel 5

På figuren ovenfor til højre er grafen for $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ blevet parallelforskudt med $(1,2)$. Ifølge sætning 4 er en forskrift for funktionen hørende til den parallelforskudte graf lig med $g(x) = f(x-1)+2 = \frac{1}{2}(x-1)^2 + 2 = \frac{1}{2}(x^2 - 2x + 1) + 2 = \frac{1}{2}x^2 - x + 2\frac{1}{2}$. Vi har altså at gøre med et andengradspolynomium med koefficienter $a = \frac{1}{2}, b = -1$ og $c = 2\frac{1}{2}$.

Udfra eksempel 5 er det ikke svært at overbevise sig om, at hvis man parallelforskyder grafen for et simpelt andengradspolynomium med forskrift $f(x) = ax^2$, så får man i alle tilfælde grafen for et andengradspolynomium. Spørgsmålet er, om vi kan gå den anden vej: Kan grafen for ethvert andengradspolynomium fås ved at parallelforskyde grafen for et simpelt andengradspolynomium med forskriften $f(x) = ax^2$? Svaret er bekræftende, som vi skal se i det følgende. Resultatet skal blandt andet benyttes til at udlede en formel for grafens (parablens) toppunkt.

Sætning 6
Lad $g(x) = ax^2 + bx + c$ og størrelsen $d = b^2 - 4ac$ betegne polynomiets såkaldte *diskriminant*. Grafen for g kan fås ved at parallelforskyde grafen for det simple andengradspolynomium $f(x) = ax^2$ med

(1) $$(x_0, y_0) = \left(-\frac{b}{2a}\,,\ -\frac{d}{4a}\right)$$

Specielt er koordinaterne til toppunktet for grafen for $g(x)$ givet ved ovenstående udtryk for (x_0, y_0).

Bevis: Lad os starte med at parallelforskyde grafen for $f(x) = ax^2$ med (x_0, y_0), og så først senere afgøre, hvad x_0 og y_0 skal sættes lig med, for at man får grafen for g. Ifølge sætning 3 haves:

(2) $$\begin{aligned} g(x) &= f(x - x_0) + y_0 = a(x - x_0)^2 + y_0 = a(x^2 - 2x_0 x + x_0^2) + y_0 \\ &= ax^2 - 2ax_0 x + ax_0^2 + y_0 = ax^2 + (-2ax_0)x + (ax_0^2 + y_0) \end{aligned}$$

Husk, at det er x, som er den *variable*, mens a, x_0 og y_0 skal betragtes som konstanter. Vi har altså et andengradspolynomium, hvor koefficienten til andengradsleddet er a, koefficienten til førstegradsleddet er $-2ax_0$ og nultegradsleddet er lig med $ax_0^2 + y_0$. Dette andengradspolynomium er lig med $ax^2 + bx + c$ hvis og kun hvis koefficienterne til de forskellige potenser af x er ens. Koefficienten til x^2 er allerede a, så det stemmer. Derudover kræves altså, at:

(3) $$-2ax_0 = b \quad \text{og} \quad ax_0^2 + y_0 = c$$

Første ligning kan opfyldes, hvis vi sætter $x_0 = -b/2a$. Den anden ligning kan opfyldes ved at vælge følgende værdi for y_0:

(4) $$\begin{aligned} y_0 &= c - ax_0^2 = c - a\cdot\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 = c - a\cdot\frac{b^2}{4a^2} = c - \frac{b^2}{4a} \\ &= \frac{4ac}{4a} - \frac{b^2}{4a} = \frac{4ac - b^2}{4a} = -\frac{-(4ac - b^2)}{4a} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{d}{4a} \end{aligned}$$

hvor vi i andet lighedstegn har indsat udtrykket for x_0. I femte lighedstegn har vi forlænget første led med $4a$, så der skabes en fælles nævner. I syvende lighedstegn har vi ganget med –1 i tælleren og samtidigt ganget hele brøken med –1. I ottende lighedstegn er minusparentesen hævet og leddenes rækkefølge byttet rundt. Alt i alt viser ovenstående, at grafen for $g(x) = ax^2 + bx + c$ fremkommer ved at parallelforskyde grafen for $f(x) = ax^2$ med vektoren givet ved udtrykket (1). Påstanden om toppunktet for g's graf er herefter en simpel konsekvens af, at toppunktet for grafen for f er $(0,0)$: Under parallelforskydningen vil $(0,0)$ flyttes hen i punktet givet ved (1).

□

Bemærkning 7

Indsættes udtrykkene for x_0 og y_0 fra sætning 6 i $g(x) = a(x - x_0)^2 + y_0$, kan vi se, at et generelt andengradspolynomium kan omskrives på følgende måde:

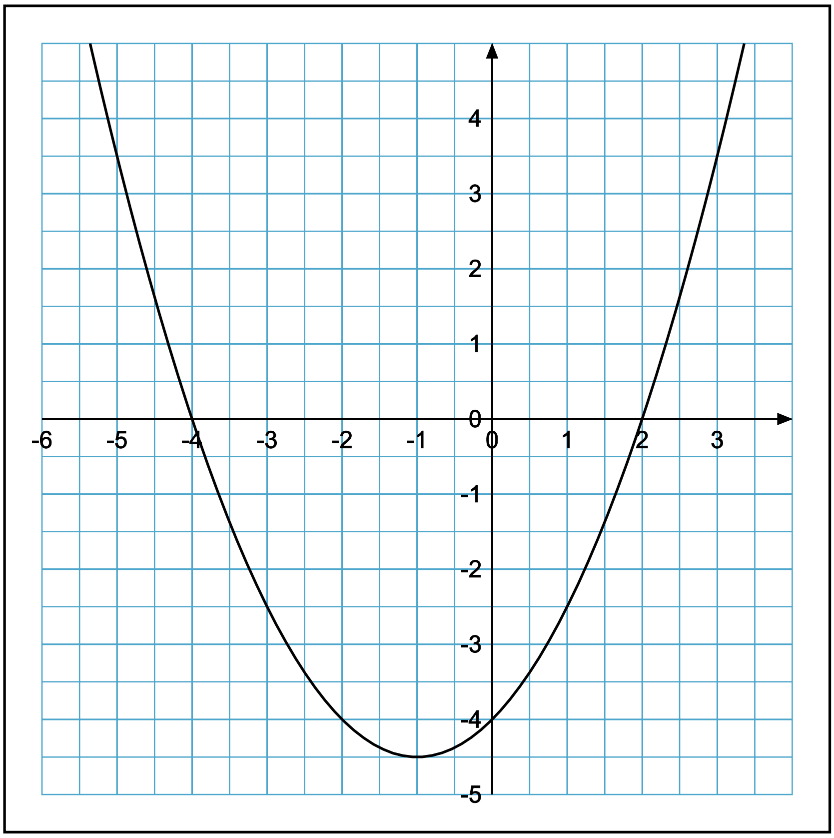
(5) $$ax^2 + bx + c \;=\; a \cdot \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{d}{4a}$$

Eksempel 8

Betragt andengradspolynomiet $g(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - 4$. Toppunktet for polynomiets graf fås ved hjælp af formel (1) i sætning 6, idet $d = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot (-4) = 9$:

$$(x_0, y_0) \;=\; \left(-\frac{b}{2a},\; -\frac{d}{4a}\right) \;=\; \left(-\frac{1}{2 \cdot \frac{1}{2}},\; -\frac{9}{4 \cdot \frac{1}{2}}\right) \;=\; (-1, -4\tfrac{1}{2})$$

Det ses at stemme med grafen nedenfor:



3. Andengradsligninger

En andengradsligning er en ligning på formen $ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$. Man skal altså finde eventuelle *x*-værdier, som tilfredsstiller ligningen. Løsningerne til andengradsligningen betegnes i øvrigt også som *rødderne* til andengradspolynomiet ax^2+bx+c.

Sætning 9
Givet andengradsligningen $ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$. Idet $d=b^2-4ac$ haves følgende løsninger til andengradsligningen:

Hvis $d<0$: Der er ingen løsninger

Hvis $d=0$: Der er netop én løsning: $x=-\dfrac{b}{2a}$

Hvis $d>0$: Der er netop to løsninger: $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{d}}{2a}$

Bevis: Problemet med andengradsligninger er, at man ikke, som i tilfældet med ligninger af 1. grad, nemt kan *isolere x* på den ene side af lighedstegnet. Man kan ikke umiddelbart samle leddene med *x*, fordi de har forskellig potens i *x*. Heldigvis kan det alligevel gøres med et trick: Man omskriver ligningen, så man får kvadratet på en toleddet størrelse, hvori *x* indgår. Da *x* derved kun kommer til at stå et sted i ligningen, kan den efter omskrivningen ret nemt løses. Den omtalte omskrivning er faktisk bare den, som vi har i formel (5) i bemærkning 7.

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c &= 0 \\ &\Updownarrow \\ a\cdot\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{d}{4a} &= 0 \\ &\Updownarrow \\ a\cdot\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{d}{4a} \\ &\Updownarrow \\ \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{d}{4a^2} \end{aligned} \tag{6}$$

For at komme videre må vi splitte op i tre tilfælde, afhængig af værdien af *d*:

$\underline{d<0}$: Nævneren på højre side af den sidste ligning i (6) er positiv, da *a* står i anden potens. Når diskriminanten *d* er negativ, vil hele højresiden derfor være negativ. Venstresiden er en parentes i anden potens; den vil derfor være ≥ 0. Ligningen kan dermed ikke opfyldes. Løsningsmængden er derfor den *tomme mængde*: Vi skriver $L=\varnothing$.

$\underline{d=0}$: I så fald er højresiden lig med 0. Den eneste mulighed for at et udtryk i anden potens kan være lig med 0 er, at udtrykket selv er lig med 0. Det giver netop én løsning:

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x+\frac{b}{2a} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{b}{2a}$$

$\underline{d>0}$: I dette tilfælde er både tæller og nævner i højresiden $d/(4a^2)$ positive. Sidste ligning i (6) kan dermed omskrives til:

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{d}{4a^2} \quad \Leftrightarrow \quad \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{d}}{2a}\right)^2$$

Den eneste måde, hvorpå to udtryk i 2. potens kan være ens er, hvis udtrykkene er ens, eller det ene udtryk er lig med minus det andet udtryk:

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{d}}{2a}\right)^2 \quad \Leftrightarrow \quad x+\frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{d}}{2a} \quad \vee \quad x+\frac{b}{2a} = -\frac{\sqrt{d}}{2a}$$

$$\Leftrightarrow \quad x = -\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{d}}{2a} \quad \vee \quad x = -\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{d}}{2a} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{-b\pm\sqrt{d}}{2a}$$

Hvor vi i sidste ensbetydende har sat på fælles brøkstreg. I dette tilfælde er der altså to løsninger. Sætningen er dermed bevist.

□

Bemærkning 10

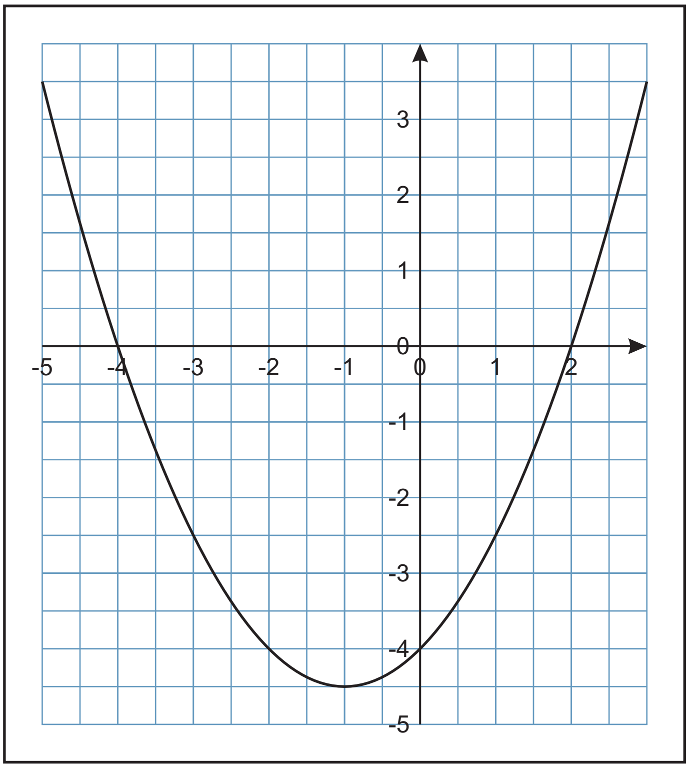
Man observerer, at formlen $x = \dfrac{-b\pm\sqrt{d}}{2a}$ egentlig også kan benyttes til tilfældet $d=0$. Indsættes $d=0$, får man korrekt løsningen $-\dfrac{b}{2a}$ både når $+$ og $-$ anvendes i formlen. Løsningen kaldes da også for en *dobbeltrod* til det aktuelle polynomium.

Eksempel 11

Lad os bestemme løsningerne til følgende 2. gradsligning: $\frac{1}{2}x^2+x-4=0$. Andengradsligningens koefficienter er: $a=\frac{1}{2}, b=1$ og $c=-4$. Dette giver følgende diskriminant: $d=b^2-4ac=1^2-4\cdot\frac{1}{2}\cdot(-4)=9$. Da d er positiv fås de to løsninger

$$x = \frac{-b\pm\sqrt{d}}{2a} = \frac{-1\pm\sqrt{9}}{2\cdot\frac{1}{2}} = \frac{-1\pm 3}{1} = \begin{cases} 2 \\ -4 \end{cases}$$

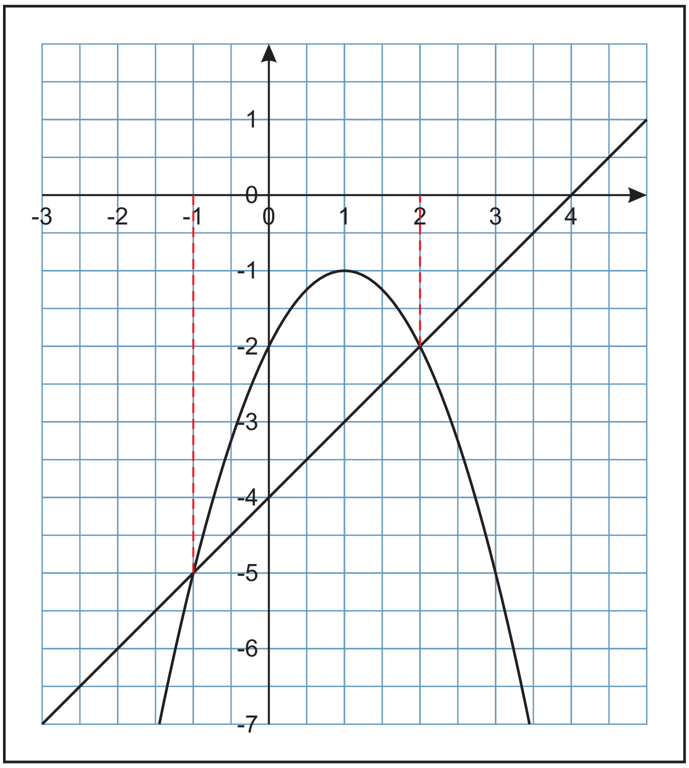
Tegner man grafen for polynomiet $p(x)=\frac{1}{2}x^2+x-4$, så ser man som forventet, at grafen skærer x-aksen i –4 og 2:



Eksempel 12

Løs ligningen $-x^2+2x-2=x-4$ grafisk og ved beregning.

Løsning: Nedenfor er graferne for $f(x)=-x^2+2x-2$ og $g(x)=x-4$ tegnet. Ligningens løsninger fås som x-koordinaterne til grafernes skæringspunkter: $x=-1 \;\vee\; x=2$.



Ligningen kan løses ved beregning ved at isolere alt på venstre side, således, at der kun er et 0 på højre side:

$$-x^2+2x-2=x-4 \quad \Leftrightarrow \quad -x^2+x+2=0$$

Vi har altså at gøre med en andengradsligning: $d=b^2-4ac=1^2-4\cdot(-1)\cdot 2=9$. Der er altså to løsninger:

$$x \;=\; \frac{-b\pm\sqrt{d}}{2a} \;=\; \frac{-1\pm\sqrt{9}}{2\cdot(-1)} \;=\; \frac{-1\pm 3}{-2} \;=\; \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$$

Det stemmer overens med vore aflæsninger på forrige side.

□

4. Faktorisering af andengradspolynomium

I dette afsnit skal vi se, at hvis et andengradspolynomium har mindst én reel rod, så kan det faktoriseres til et produkt af to førstegradspolynomier.

Sætning 13

Givet et andengradspolynomium $f(x)=ax^2+bx+c$. Hvis diskriminanten $d\geq 0$, så kan polynomiet faktoriseres på følgende måde:

(7) $$f(x) \;=\; ax^2+bx+c \;=\; a(x-x_1)(x-x_2)$$

hvor x_1 og x_2 er rødderne i andengradspolynomiet. Hvis $d=0$ og der dermed kun er én rod, så bruges denne rod som både x_1 og x_2.

Bevis: Som nævnt i bemærkning 10, så holder udtrykkene for rødderne i sætning 9 når $d>0$, dvs.

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{d}}{2a} \quad \wedge \quad x_2=\frac{-b-\sqrt{d}}{2a}$$

egentligt også når $d=0$. Ved indsættelse af $d=0$ heri ser vi nemlig, at vi får den korrekte rod $-b/2a$, godt nok to gange. Vi kan altså bare checke sætningen ved at indsætte disse udtryk for rødderne i højresiden i (7) og se, om det holder.

(8) $$a\cdot(x-x_1)(x-x_2) \;=\; a\cdot[x^2 \;-\; (x_1+x_2)\cdot x \;+\; x_1\cdot x_2]$$

(9) $$x_1+x_2=\frac{-b+\sqrt{d}}{2a} \;+\; \frac{-b-\sqrt{d}}{2a} \;=\; \frac{-2b}{2a} \;=\; -\frac{b}{a}$$

(10)
$$\begin{aligned} x_1 \cdot x_2 &= \left(\frac{-b+\sqrt{d}}{2a}\right)\cdot\left(\frac{-b-\sqrt{d}}{2a}\right) = \left(\frac{-b}{2a}+\frac{\sqrt{d}}{2a}\right)\cdot\left(\frac{-b}{2a}-\frac{\sqrt{d}}{2a}\right) \\ &= \left(\frac{-b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{d}}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{d}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2-4ac}{4a^2} \\ &= \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a} \end{aligned}$$

Vi har i det tredje lighedstegn i (10) benyttet formlen for *to tals sum gange to tals differens*! Indsættes (9) og (10) i (8) fås:

(11)
$$\begin{aligned} a\cdot(x-x_1)(x-x_2) &= a\cdot\left[x^2 - \left(-\frac{b}{a}\right)\cdot x + \frac{c}{a}\right] \\ &= a\cdot\left[x^2 + \frac{b}{a}\cdot x + \frac{c}{a}\right] = ax^2+bx+c \end{aligned}$$

□

Eksempel 14

Sætning 13 er nyttig i forskellige sammenhænge. Antag for eksempel, at vi ønsker at konstruere et andengradspolynomium, som har rødderne $x_1=-6$ og $x_2=2$. Der er frit valg for a. lad os sætte den til 1. Et polynomium med de ønskede egenskaber er da:

$$\begin{aligned} a(x-x_1)(x-x_2) &= 1\cdot(x-(-6))\cdot(x-2) = (x+6)\cdot(x-2) \\ &= x^2+6x-2x-12 = x^2+4x-12 \end{aligned}$$

□

Eksempel 15

Reducér udtrykket $\dfrac{2x^2+9x-5}{2x+10}$; $x \neq -5$.

Løsning: Rødderne i andengradspolynomiet i tælleren bestemmes via sætning 9 til at være –5 og $\frac{1}{2}$. Ifølge sætning 13 kan vi derfor faktorisere tælleren:

$$\frac{2x^2+9x-5}{2x+10} = \frac{2(x-(-5))(x-\frac{1}{2})}{2(x+5)} = \frac{2(x+5)(x-\frac{1}{2})}{2(x+5)} = x-\tfrac{1}{2}$$

Da $(x+5)$ er en fælles faktor i tæller og nævner, kan den forkortes væk, og vi ender med et langt enklere udtryk.

□

5. Andengradsuligheder og andet godt

I dette afsnit skal vi se på løsninger til andengradsuligheder samt se på ligninger, som viser sig at være *skjulte* andengradsligninger.

Eksempel 16

Løs fjerdegradsligningen $x^4 + x^2 - 6 = 0$.

Løsning: Der findes faktisk en generel formel, der kan angive løsningerne til en vilkårlig fjerdegradsligning. Da der imidlertid kun er led med *lige* potenser af x, kan vi reducere problemet til en simpel andengradsligning via *substitutionen* $t = x^2$, hvormed $x^4 = (x^2)^2 = t^2$. Hermed fås følgende ligning:

$$t^2 + t - 6 = 0$$

Ved brug af formlen for andengradsligningen ser vi, at det giver følgende løsninger:

$$t = 2 \quad \vee \quad t = -3 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 2 \quad \vee \quad x^2 = -3 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm\sqrt{2}$$

Bemærk, at ligningen $x^2 = -3$ ingen løsninger har, så der er ikke fire løsninger her, kun to løsninger. En 4. gradsligning kan højst have fire løsninger!

Eksempel 17

Løs ligningen $\sqrt{x+1} = 3x - 7 \;\;, x \geq -1$.

Løsning: Vi foretager substitutionen

$$t = \sqrt{x+1} \quad \Leftrightarrow \quad t^2 = x + 1 \;\; (t \geq 0) \quad \Leftrightarrow \quad t^2 - 1 = x \;\; (t \geq 0)$$

Indsættes dette i ligningen fås $t = 3(t^2 - 1) - 7 \;\Leftrightarrow\; 3t^2 - t - 10 = 0$. Sidstnævnte ligning har løsningerne $t = 2$ og $t = -\frac{5}{3}$. Da $t \geq 0$ giver sidstnævnte mulighed ikke anledning til nogen løsninger. Derimod fås $t = 2 \;\Rightarrow\; x = t^2 - 1 = 3$. Altså er $x = 3$ den eneste løsning til den oprindelige ligning.

Eksempel 18

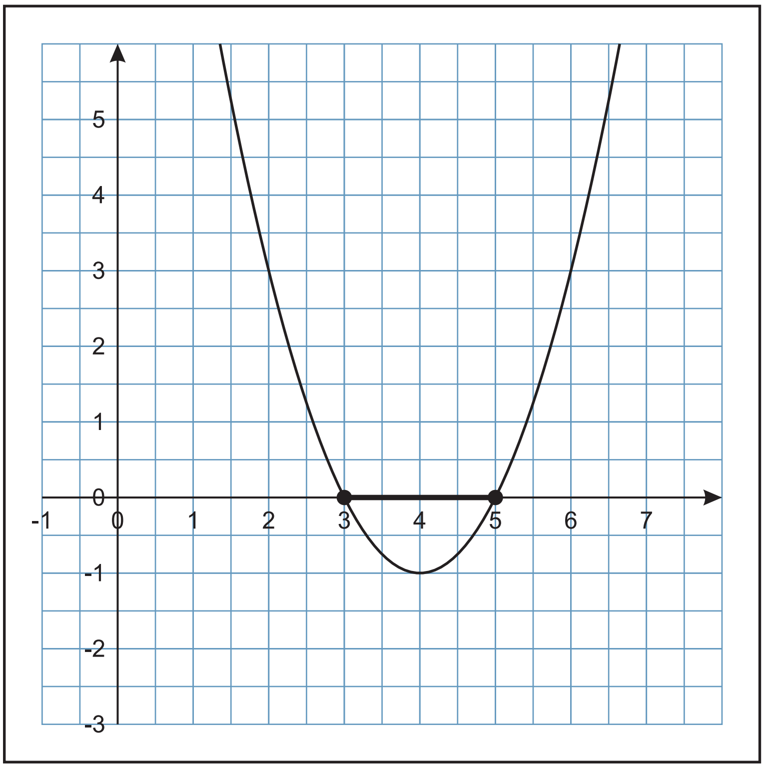
Det oplyses, at 2. gradsligningen $p(x) = 4x^2 - 12x + c$, hvor c er et tal, netop har én løsning. Bestem værdien af konstanten c.

Løsning: En opgave af denne type kaldes undertiden for en parameteropgave, idet en af koefficienterne er en ukendt *parameter*. Vi får følgende udtryk for diskriminanten: $d = b^2 - 4ac = (-12)^2 - 4 \cdot 4 \cdot c = 144 - 16c$. Da der er netop en løsning, skal diskriminanten være lig med 0. Det giver $d = 0 \;\Leftrightarrow\; 144 - 16c = 0 \;\Leftrightarrow\; c = 9$.

Eksempel 19

Løs andengradsuligheden $x^2 - 8x + 15 \leq 0$.

Løsning: Først løses ligningen $x^2 - 8x + 15 = 0$. Man finder rødderne 3 og 5. Koefficienten til x^2 er 1. Da det er en positiv værdi, vender parablens grene opad, som vist på figuren nedenfor. Derfor ligger parablen under x-aksen imellem rødderne. Løsningsmængden til uligheden er dermed alle tallene imellem 3 og 5, inklusive endepunkterne. Vi angiver løsningsmængden som et interval: $L = [3,5]$.



Opgaver

Opgaverne er nummereret, så det første ciffer angiver afsnittets nummer. Opgave 32 angiver således opgave 2 i afsnit 3.

Opgave 11

Nedenfor parallelforskydes grafen for en funktion *f* med (x_0, y_0), så man får grafen for en funktion *g*. Bestem en forskrift for $g(x)$. Reducer udtrykket om muligt.

a) Grafen for $f(x) = x^2$ parallelforskydes med $(x_0, y_0) = (0,6)$.

b) Grafen for $f(x) = x^2$ parallelforskydes med $(x_0, y_0) = (2,0)$.

c) Grafen for $f(x) = 2x^2$ parallelforskydes med $(x_0, y_0) = (-1,4)$.

d) Grafen for $f(x) = 2x - 5$ parallelforskydes med $(x_0, y_0) = (2,-4)$.

e) Grafen for $f(x) = (x+2)\cdot 0,8^x$ parallelforskydes med $(x_0, y_0) = (-2,10)$.

f) Grafen for $f(x) = x^2 - 4x$ parallelforskydes med $(x_0, y_0) = (-3,3)$.

Opgave 12

Grafen for $g(x) = 2/(x-5)+4$ kan opfattes som værende en parallelforskydning af grafen for en noget simplere funktion. Hvilken funktion er det, og angiv parallelforskydningen.

Opgave 21

Bestem toppunkterne for nedenstående andengradspolynomier.

a) $f(x) = 2x^2 - 12x + 23$

b) $f(x) = -x^2 - 8x + 4$

c) $f(x) = 2x^2 - 6x + 5$

d) $f(x) = 4x^2 - 6x$

e) $f(x) = 3x^2 - 9x + 2$

f) $f(x) = 1,8x^2 - 5,2x + 2,7$

Opgave 22

Bestem toppunkterne for følgende andengradspolynomier og skitser deres grafer:

a) $f(x) = x^2 + 2x - 3$

b) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 2x - 3$

c) $f(x) = -2x^2 + 4$

Opgave 23

Tegn graferne for følgende andengradspolynomier:

a) $p(x) = x^2 + 2x + 5$

b) $p(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4$

Opgave 31

Løs følgende andengradsligninger:

a) $x^2 - 5x - 6 = 0$

b) $2x^2 + 7x - 4 = 0$

c) $4x^2 - x + 3 = 0$

d) $x^2 - 4x + 4 = 0$

e) $x^2 - 4x = 0$

f) $\frac{1}{2}x^2 + 5x + 12 = 0$

g) $2x^2 - 11\frac{1}{2}x + 14 = 0$

h) $2{,}6x^2 - 10{,}7x - 5{,}9 = 0$

Opgave 32

Løs følgende andengradsligninger:

a) $4x^2 + 29x - 24 = 0$

b) $x^2 - 4x + 4 = 0$

c) $2x^2 - 14x + 30 = 0$

d) $x^2 - 7x = 0$

e) $2x^2 + 5 = 0$

f) $x^2 + 4x - 12 = 0$

Opgave 33

Bestem løsningerne til andengradsligningen $\frac{1}{2}x^2 - 3x + 4 = 0$. Hvor kan disse løsninger aflæses på grafen?

Opgave 34

I et rektangel er den længste side 2 meter længere end den korteste side og rektanglets areal er 17 m^2. Bestem sidelængderne i rektanglet.

Opgave 35

Løs nedenstående ligninger: (Husk grundmængder!)

a) $(2x+1)^2 = 16$

b) $x^2 - 5x + 7 = 2x - 3$. Løs den også grafisk.

c) $4x^3 - 12x = 0$

d) $\dfrac{2x^2}{x-4} = -3$

e) $\dfrac{7x+5}{2x} = x - 6$

f) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2x-2} = 1$

Opgave 36 (Det gyldne snit)

Definition: Givet et linjestykke AB. Punktet P imellem A og B siges da at dele linjestykket AB i det *gyldne snits forhold*, såfremt forholdet mellem længden af hele linjestykket og længden af det lange stykke er lig med forholdet mellem længderne af det lange og det korte stykke.

a) Forklar hvorfor x og y skal tilfredsstille: $\dfrac{x+y}{x} = \dfrac{x}{y}$.

b) Indfør det gyldne snits forhold som $z = \dfrac{x}{y}$. Vis, at der må gælde $1 + \dfrac{1}{z} = z$.

c) Sidste ligning i b) er en andengradsligning. Løs den med hensyn til z. Angiv både den eksakte værdi og et kommatal med 4 decimaler.

d) Vis, at $1/z$ er eksakt lig med $(\sqrt{5}-1)/2$ og udregn værdien i kommatal med 4 decimaler. Sammenlign med kommatallet for z: Hvad observerer du?

Opgave 37

Givet andengradsligningen $3x^2 + bx - 12 = 0$, hvor b er en fast parameter. Bestem b således at –6 er rod i polynomiet. Hvad er den anden rod?

Opgave 38

Givet andengradsligningen $ax^2 - 20x + 25 = 0$, hvor a er en fast parameter. Bestem a, idet det oplyses, at ligningen netop har en løsning. Hvilken rod er der tale om?

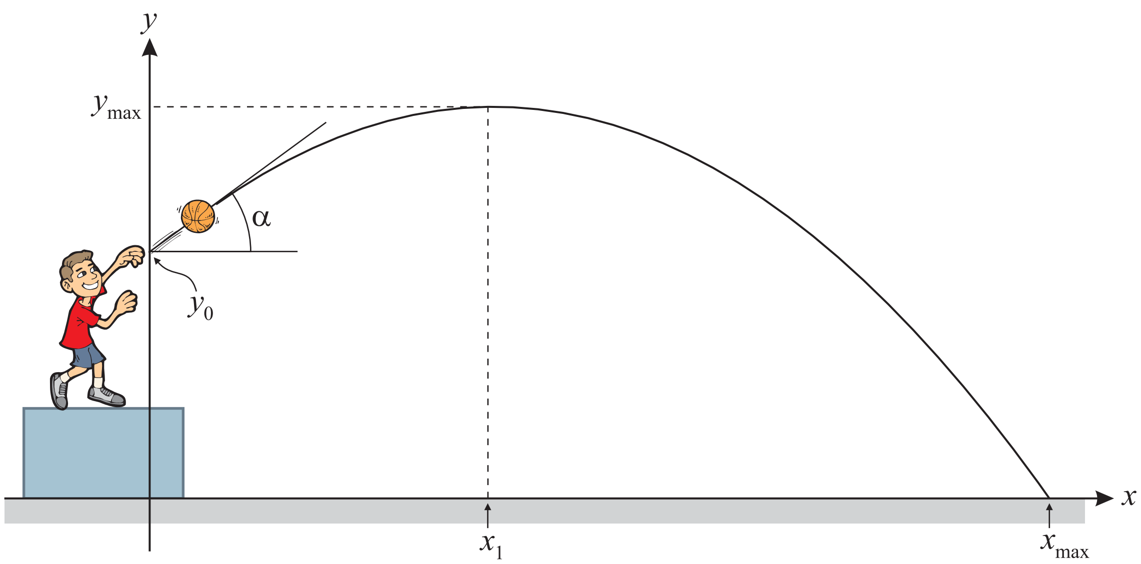
Opgave 39 (Kasteparabel)

Ved kast i tyngdefeltet vil en genstand følge en parabelbane, hvis man kan se bort fra luftmodstand. Lad os sige, at vi kaster en bold skråt op i luften med en vinkel på α. Starthøjden lige i det øjeblik, hvor bolden forlader hånden, betegner vi y_0 og starthastigheden, betegner vi v_0. Vi indlægger et koordinatsystem i boldens baneplan, således at x-aksen er langs jorden og har værdien 0 lige under personens hånd, mens y-aksen er lodret og går igennem personens hånd. Det er hensigtsmæssigt at regne afstande i meter (m), hastigheder i m/s og tiden i sekunder.
Man kan vise, at bolden i ovennævnte koordinatsystem vil have følgende koordinater til tiden t, hvor g betegner tyngdeaccelerationen $(g = 9{,}82\ \text{m/s}^2)$:

(12)
$$\begin{aligned} x(t) &= v_0 \cdot \cos(\alpha) \cdot t \\ y(t) &= -\tfrac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 + v_0 \cdot \sin(\alpha) \cdot t + y_0 \end{aligned}$$

Hvis man ikke ønsker positionerne som funktion af tiden, men kun banekurven, så kan den fås af følgende udtryk:

(13)
$$y = -\frac{g}{2 \cdot v_0^2 \cdot (\cos(\alpha))^2} \cdot x^2 + \tan(\alpha) \cdot x + y_0$$



En bold kastes op i luften i en vinkel på 40°. Bolden slippes i en højde af 3,2 m og har en starthastighed på 12 m/s. Til at besvare følgende spørgsmål må du *ikke* benytte solve-funktionen på grafregneren:

a) Benyt (12) til at bestemme boldens koordinater til tidspunktet 1,3 sek.
b) Til hvilket tidspunkt er bolden 1 m over jorden?

c) Benyt (13) til at bestemme hvor langt bolden når ud, før den rammer jorden, altså bestem $x_{\max}$.
d) Benyt (13) til at bestemme den maksimale højde, $y_{\max}$.
e) Benyt (12) til at bestemme til hvilket tidspunkt den maksimale højde opnås.

Nu får du lov til at benytte grafregnerens graf-faciliteter:

f) Indtast funktionen i (13) med de aktuelle parameter-værdier ovenfor. Tegn grafen for parabelbanen i et passende vindue og løs herefter spørgsmålene c) og d) igen.

Formel (12) kan vi ikke umiddelbart udlede, da der skal nogle fysiske overvejelser til. Formel (13) kan derimod ret let udledes udfra (12):

g) Isoler t i den første ligning i (12) og indsæt udtrykket for t i den anden ligning i (12). Reducer det fremkommende udtryk og vis, at det giver (13).

De følgende tre opgaver er *frivillige*:

h) Måske er du træt af at skulle foretage de samme beregninger, hver gang du skal bestemme den maksimale højde, som bolden opnår: Vis, ved at benytte de generelle udtryk, at der gælder:

$$y_{\max} = \frac{v_0^2 \cdot (\sin(\alpha))^2}{2g} + y_0$$

i) Den generelle formel for kastelængden $x_{\max}$ er meget uskøn, men i specialtilfældet, hvor $y_0 = 0$ bliver den relativ simpel. Benyt symmetrien i parablen til at vise, at i dette tilfælde gælder:

$$x_{\max} = \frac{2 \cdot \cos(\alpha) \cdot \sin(\alpha) \cdot v_0^2}{g} \qquad (\text{hvis } y_0 = 0)$$

Hjælp: Tænk på, at toppunktet ligger midt mellem …

j) Lad os sige, at $y_0 = 0$. Benyt da formlen under spørgsmål i) til at vise, at den vinkel α, som giver den største kastelængde, er 45°. *Hjælp*: Her skal du benytte grafregneren: Du skal finde maksimum for $x_{\max}$ med hensyn til α.

Opgave 41

Konstruer et andengradspolynomium, som har følgende rødder:

a) -1 og 6   b) $\frac{2}{3}$ og 4

Opgave 42

Reducer følgende udtryk:

a) $\dfrac{2x^2+3x-5}{x-1}$ b) $\dfrac{x^2+5x-14}{x^2+7x}$

Opgave 51

Løs følgende ligninger:

a) $x^4-11x^2+18=0$ b) $x^3+9x^2-10x=0$ c) $x^4-3x^2-4=0$

Opgave 53

Løs nedenstående ligninger:

a) $\dfrac{5x+1}{2x-4} = x+5$

b) $\sqrt{3x+14} = 10-9x$

c) $\dfrac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x} = 3$

d) $\sqrt{x^2+2} = x+4$

d) $2x-\sqrt{x} = 3$

Opgave 54

Løs følgende andengradsuligheder:

a) $x^2-10x+16 \geq 0$

b) $8x^2+18x-5 < 0$

c) $-\frac{1}{2}x^2+9x-16 \leq 0$

d) $x^2+10x+60 \geq 15-4x$

e) $-2x^2+28x-66 > 0$