Om at differentiere funktioner

I dette lille tillæg skal vi kigge på regler for, hvordan man differentierer funktioner i hånden. Der er desuden en række opgaver til at øve sig på.

Regneregler for differentiation
(1) $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$
(2) $(k \cdot f)'(x) = k \cdot f'(x)$
(3) $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
(4) $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x) = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$
(5) $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Samt følgende tabel over differentialkvotienter for elementære funktioner:

$f(x)$	$f'(x)$
k	0
x	1
x^2	$2x$
$a \cdot x + b$	a
x^a	$a \cdot x^{a-1}$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$\dfrac{1}{x}$	$-\dfrac{1}{x^2}$

$f(x)$	$f'(x)$
a^x	$\ln(a) \cdot a^x$
e^x	e^x
$\ln(x)$	$\dfrac{1}{x}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\tan(x)$	$\tan^2(x) + 1$

Eksempel 1

Vi skal differentiere funktionen $f(x) = 4x^2 \cdot \ln(x)$.

Løsning: Vi vil bruge reglen for, hvordan man differentierer et produkt af to funktioner. Det er oplagt, at vi lader den ene funktion være $4x^2$ og den anden $\ln(x)$. Lidt underforstået sagt med ord skal vi ifølge regel (3) differentiere den første funktion og lade den anden stå og derefter lade den første funktion stå og differentiere den anden:

$$\begin{aligned}\left(4x^2 \cdot \ln(x)\right)' &= (4x^2)' \cdot \ln(x) \;+\; 4x^2 \cdot (\ln(x))' \\ &= 8x \cdot \ln(x) \;+\; 4x^2 \cdot \frac{1}{x} \\ &= 8x \cdot \ln(x) \;+\; \frac{4x^2}{x} \\ &= 8x \cdot \ln(x) \;+\; 4x\end{aligned}$$

Bemærk at vi allerede efter andet lighedstegn i princippet er færdig med at differentiere. De sidste to ulighedstegn går blot ud på at *omskrive* resultatet til noget kønnere!

Eksempel 2

Vi skal differentiere funktionen $f(x) = \sqrt{x^2+8}$.

Løsning: Vi bruger her regel (5), der udtaler sig om, hvordan man differentierer en *sammensat* funktion. Løst sagt så differentierer man den ydre funktion og indsætter den indre funktion samt ganger med den indre funktion differentieret. Den *ydre funktion* er $\sqrt{y}$, mens den *indre funktion* er $y = x^2 + 8$.

Den ydre funktion differentieret: $\dfrac{1}{2\sqrt{y}}$ og med den indre funktion indsat: $\dfrac{1}{2 \cdot \sqrt{x^2+8}}$.

Den indre funktion differentieret: $2x$.

I alt fås: $f'(x) = \left(\sqrt{x^2+8}\right)' = \dfrac{1}{2 \cdot \sqrt{x^2+8}} \cdot 2x = \dfrac{2x}{2 \cdot \sqrt{x^2+8}} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+8}}$

Læg mærke til, at de sidste to lighedstegn kun er omskrivninger af differentialkvotienten, som sker for at reducere den færdige differentialkvotient.

Eksempel 3

Vi skal differentiere funktionen $f(x) = x \cdot \sqrt{x}$.

Løsning: Vi kunne i princippet benytte produktreglen for differentiation, men i dette tilfælde har vi at gøre med et tilfælde, hvor det er mest fornuftigt at *omskrive funktionen før differentiation*. $f(x) = x \cdot \sqrt{x} = x \cdot x^{\frac{1}{2}} = x^{1+\frac{1}{2}} = x^{\frac{3}{2}}$. Herefter fås:

$f'(x) = (x^{\frac{3}{2}})' = \frac{3}{2} \cdot x^{\frac{3}{2}-1} = \frac{3}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2} \cdot \sqrt{x}$

Opgaver

Opgave 1

Differentier nedenstående funktioner.

a) $f(x) = 2x^2 + 5x$ b) $f(x) = 3x^{-2}$ c) $f(x) = x^8 - 6x^2 + 7$

d) $f(x) = 5x + 4x^{-1}$ e) $f(x) = 6$ f) $f(x) = 4 \cdot \sqrt{x} + 5x$

g) $f(x) = \sin(x) + 8x$ h) $f(x) = \dfrac{4}{x}$ (i) $f(x) = \ln(x) - x$

Opgave 2

Benyt produktreglen for differentiation (3) til at differentiere følgende funktioner:

a) $f(x) = x \cdot \sin(x)$ b) $f(x) = x \cdot e^x$ c) $f(x) = (3x+1) \cdot \ln(x)$

d) $f(x) = \sin^2(x)$ e) $f(x) = 2x^3 \cdot \cos(x)$ f) $f(x) = 4x^3 \cdot 2^x$

Opgave 3

Benyt reglen for differentiation af sammensat funktion (5) til at differentiere følgende funktioner, idet du først afgør, hvad der er den indre funktion og hvad, der er den ydre funktion:

a) $f(x) = \sin(x^3)$ b) $f(x) = \sqrt{2x+9}$ c) $f(x) = e^{3x-5}$

d) $f(x) = \dfrac{1}{4x^2 + 3}$ e) $f(x) = (3x^2 - 6)^{10}$ f) $f(x) = \exp(1/x)$

Opgave 4

Blandede opgaver. Bestem differentialkvotienterne til nedenstående funktioner.

a) $f(x) = 1 - \dfrac{1}{x}$ b) $f(x) = 3x^5 - 4x^3 - 8x$ c) $f(x) = \dfrac{x+7}{x}$

d) $f(x) = x^2 \cdot \sqrt{x}$ e) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ f) $f(x) = \sqrt{\sin(x)}$

g) $f(x) = \ln(2x^2)$ h) $f(x) = \exp(7x)$ (i) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x}}$