MATEMATIK for 2g

Funktioner
Polynomier
Differentialregning

Kontakt: vestergaard@matematiksider.dk

Indholdsfortegnelse

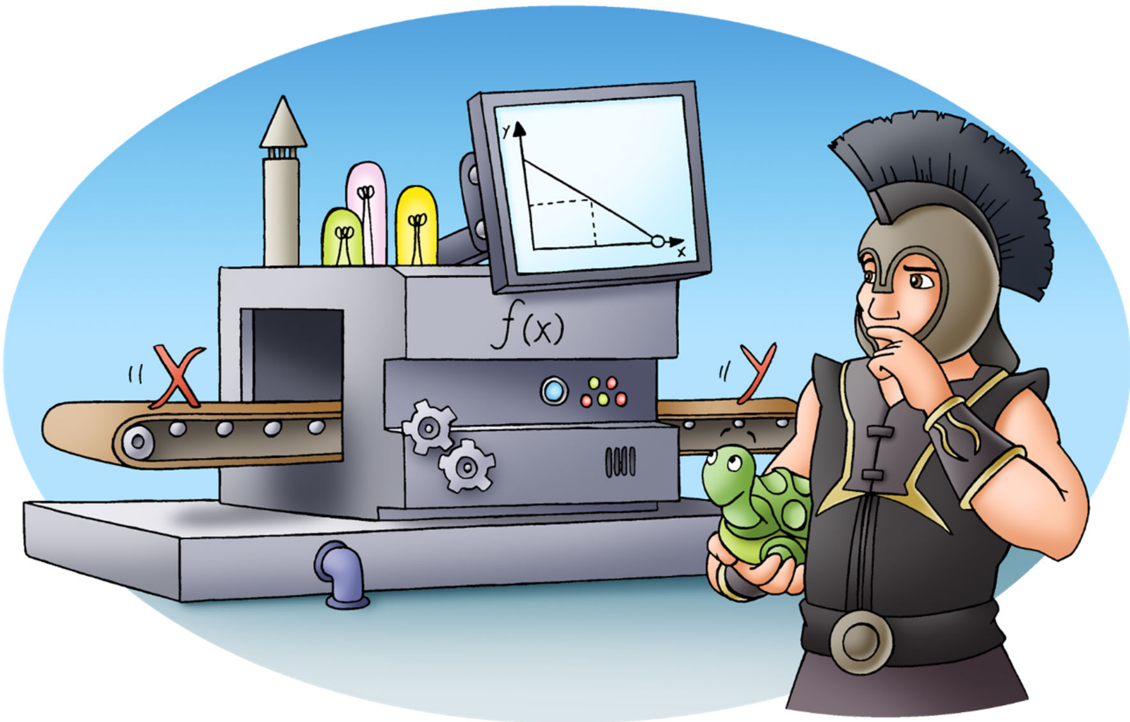
Forord

Med denne ebog har jeg haft fokus på at gøre materialet fleksibelt, overskueligt (også typografisk), logisk, præcist, visuelt, aktiverende og forhåbentligt spændende. Fleksibelt, så brugeren selv kan vælge stof og opgaver ud. Det er ikke tænkt, at bogen behøver læses i den rækkefølge materialet er præsenteret. Afsnit kan overspringes eller udskydes. Tanken er at samle ting, der naturligt hører sammen. Bogen skal være god at læse til eksamen til! Overskuelig, fordi det fremmer forståelsen. Matematik er desuden et systematisk fag. Logisk fordi matematik er et logisk fag. De forskellige begreber bør i vidt mulig omfang begrundes og sammenhængen fremhæves. Præcis fordi det er min erfaring, at løse og upræcise formuleringer ofte er til mere skade end gavn. Der er dog situationer, hvor man må nøjes med lidt løsere formuleringer, såsom i grænseværdibegrebet. Visuel fordi det hjælper på forståelsen. Derfor mange figurer, grafer og eksempler. Aktiverende derved at der er mange opgaver, hvoraf nogle har projektagtig karakter. Opgaver med en stjerne er vurderet til at være lidt sværere end de øvrige. Jeg har også forsøgt at gøre stoffet spændende med temaer, fx det gyldne snit.

Anvendelser af matematik er vigtige, men det er også vigtigt at fremhæve de matematiske regler og strukturer. Uden det vil man ikke kunne se på tværs af de konkrete anvendelser. Matematikkens natur er at skrælle alt uvæsentligt fra og komme ind til kernen i en konkret problemstilling, det være sig af teoretisk eller praktisk art, og måske komme frem til fælles principper, der gør sig gældende i tilsyneladende vidt forskellige anvendelser.

Erik Vestergaard
Haderslev, august 2017

1. Funktioner



1.1 Mængder

Før vi kan gå i gang med emnet funktioner, får vi brug for at vide en smule om mængdebegrebet. En *mængde* er en samling af objekter eller elementer. Begrebet forstås bedst ved at kigge på nogle eksempler. Vi vil også kigge på nogle operationer, man kan foretage på mængder.

Eksempel 1.1

Et eksempel er mængden N af alle kommuner i Nordjylland (pr. 2017). *Elementerne* er de enkelte kommuner i Nordjylland. Vi kan opskrive den endelige mængde ved at anbringe de enkelte elementer adskilt af kommaer og med krøllede parenteser omkring:

$$\begin{aligned} N \;=\; &\{\text{Aalborg, Hjørring, Frederikshavn, Thisted, Mariager Fjord, Jammerbugt,} \\ &\text{Vesthimmerland, Brønderslev, Rebild, Morsø, Læsø}\} \end{aligned}$$

Mængden har i alt 11 elementer. Hvis man skriver $\text{Thisted} \in N$ mener man, at elementet Thisted *tilhører* mængden N. Sagt med ord, så er Thisted en kommune i Nordjylland. Man har også et begreb, som hedder en *delmængde* af en mængde. Vi kunne for eksempel betragte mængden M af alle kommuner i Nordjylland, hvis navn starter M. Det er oplagt, at mængden kan skrives således:

$$M = \{\text{Mariager Fjord, Morsø}\}$$

Mængden M er altså en *delmængde* af mængden N. Matematisk skriver vi $M \subset N$. Det betyder, at ethvert element, som tilhører M også tilhører N. Som en tredje mængde kunne vi betragte mængden S af alle kommuner, hvori der pr. 2014 var mindst 100.000 indbyggere. Det giver os:

$$S = \{\text{København, Aarhus, Aalborg, Odense, Esbjerg, Vejle, Frederiksborg}\}$$

Fællesmængden mellem N og S består af alle de elementer, som er i *både* N og S. I dette tilfælde har denne mængde kun ét element:

$$N \cap S \;=\; \{\text{Aalborg}\}$$

Man kan også komme ud for, at fællesmængden slet ikke har nogen elementer. Hvis F repræsenterer mængden af alle kommuner på Fyn, så vil fællesmængden mellem N og F naturligvis være tom. Man skriver:

$$N \cap F = \varnothing$$

Den tomme mængde har sit helt eget symbol, som ligner et stort Ø. Når to mængder ikke har nogle fælles elementer, siger vi, at mængderne er indbyrdes *disjunkte*.

□

Normalt i Danmark, vil man med $A \subset B$ mene, at A skal være en *ren delmængde* af B, dvs. der skal findes ét eller flere elementer, som er i B, men ikke i A. Hvis man derimod skriver $A \subseteq B$, må A og B gerne være samme mængde. Det skal her tilføjes, at man nogle steder – især i udlandet – kan komme ud for at betegnelsen $A \subset B$ også tillader, at A og B gerne må være ens. Tegnene $\subset$ og $\subseteq$ kaldes *inklusionstegn*. Som eksempel 1 kan antyde, er mængder et meget generelt begreb. Vi skal imidlertid især arbejde med mængder af tal. Vi kigger på et eksempel og introducerer nogle nye mængdeoperationer.

Eksempel 1.2

Lad $A = \{-4, -3, 0, 1, 2, 8, 19\}$ og $B = \{-7, -3, 0, 2, 4, 19\}$. Fællesmængden består som nævnt af de elementer, som både er i A og B.

$$A \cap B = \{-3, 0, 2, 19\}$$

Foreningsmængden af mængderne A og B består af de elementer, som *enten* er i A eller B. Det giver os følgende mængde:

$$A \cup B = \{-7, -4, -3, 0, 1, 2, 4, 8, 19\}$$

Mængdedifferensen mellem A og B består af de elementer, som er i A, men *ikke* i B:

$$A \setminus B = \{-4, 1, 8\}$$

□

Eksempel 1.3

Mængder kan sagtens indeholde uendeligt mange elementer. Blandt dem har vi følgende standardmængder, som får deres helt eget symbol:

- N Mængden af de *naturlige* tal, dvs. alle positive hele tal.
- Z Mængden af *hele* tal, dvs. mængden af alle hele tal, både positive og negative samt 0.
- Q Mængden af *rationale* tal, dvs. mængden af alle tal, der kan skrives som brøker mellem hele tal.
- R Mængden af *reelle* tal, dvs. mængden af alle kommatal.
- C Mængden af *komplekse* tal.

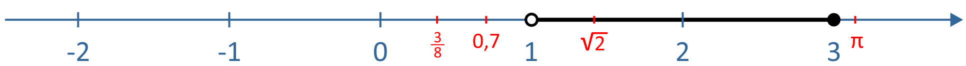
Visse steder i den matematiske litteratur har disse mængder endda fået tildelt helt specielle symboler, nemlig henholdsvis $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ og $\mathbb{C}$. Sidstnævnte mængde af komplekse tal skal vi forbi kort her, da emnet komplekse tal ligger udenfor denne bogs fremstilling. Grunden til, at mængden i det hele taget nævnes er, at man ved løsning af ligninger i CAS-programmer kan komme ud for at få angivet komplekse løsninger, dvs. løsninger på formen $a + ib$, hvor a og b er reelle tal. Størrelsen i er den såkaldte komplekse enhedsrod: $i = \sqrt{-1}$. Nok om det her. Mængden af reelle tal er den største talmængde, vi normalt vil beskæftige os med. Den indeholder samtlige kommatal, herunder også dem med uendeligt mange decimaler.

Mængden af naturlige tal kan skrives på formen $N = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$, idet de tre punktummer antyder, at systemet fra de forrige tal fortsætter. Tilsvarende kan mængden af hele tal skrives på formen $Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \ldots\}$, hvor ± 2 for eksempel betyder, at både -2 og 2 er med. Mængden af rationale tal kan faktisk godt stilles op på en række, da mængden er det, man kalder *tællelig*, dvs. man kan "nummerere alle elementerne i mængden med naturlige tal". Det er dog en smule tricky, så vi undlader det her. I stedet kan vi introducere en ny måde at skrive mængder op på:

$$Q = \left\{ \tfrac{a}{b} \,\middle|\, a, b \in Z \text{ og } b \neq 0 \right\}$$

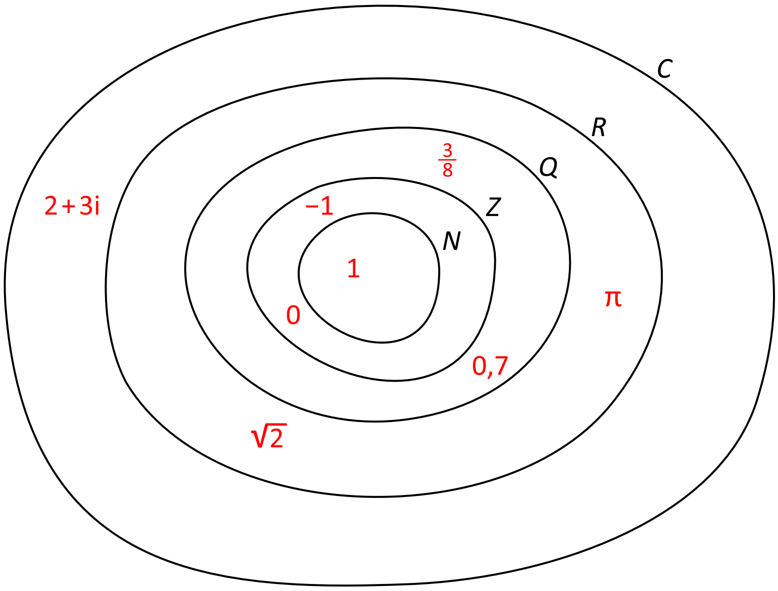
Det er en kompakt matematisk måde at opskrive følgende på: "Q er mængden af tal, som kan skrives som brøker, for hvilket der gælder, at både tæller og nævner er hele tal. Blot skal nævneren være forskellig fra 0". Den lodrette streg betyder altså: "for hvilket der gælder". Ønskede man at repræsentere mængden af alle ulige positive tal, kunne man skrive mængden på formen $\{1, 3, 5, 7, \ldots\}$ eller på formen $\{2n-1 \mid n \in N\}$. Lader man nemlig n gennemløbe alle naturlige tal, vil $2n-1$ gennemløbe alle positive ulige tal.

Vi er kommet til mængden af reelle tal. Man kan vise, at mængden af reelle tal *ikke* er tællelig. Det er med andre ord umuligt at stille dem op på en række. Derfor kan vi heller ikke opskrive elementerne med komma imellem og med krøllede parenteser om. Man kan tænke på mængden af reelle tal som punkterne på en ret linje, som er uendelig i begge retninger (den reelle tallinje). Punkterne svarende til de hele tal fordeler sig ud af tallinjen med større tal til højre for mindre tal og således, at der er en fast afstand mellem nabotal. På en tilsvarende systematisk måde fordeler tallene, der har decimaler efter kommaet, sig. Vi skal ikke gå i detaljer med det her.



Det bemærkes, at alle brøker kan skrives som kommatal, eventuelt med uendeligt mange decimaler. Dermed har vi følgende inklusion: $Q \subset R$. Der er imidlertid reelle tal, som ikke er rationale. De benævnes *irrationale* tal. Eksempler herpå er $\sqrt{2}$ og π. Ingen af disse tal kan skrives som brøker mellem hele tal. Det er ikke helt let at bevise, specielt ikke for tallet π. Når man skal angive alle reelle tal imellem to tal, så benyttes *intervaller*. Intervallet fra 1 til 3 er markeret på tallinjen ovenfor og det skrives $]1,3]$. I venstre side vender den firkantede parentes udad, hvilken betyder, at tallet 1 ikke er med i mængden (svarende til den åbne bolle i venstre ende af linjestykket). I højre side vender den firkantede parentes derimod indad, hvilket betyder, at tallet 3 er med (svarende til den lukkede bolle i højre ende af linjestykket). Hvis man for eksempel ønsker at angive mængden af alle tal, der er mindre end eller lig med 10, så skriver man $]-\infty,10]$, hvor vi har benyttet tegnet $-\infty$ for *minus uendelig*. Minus uendelig og plus uendelig er ikke tal, så her skal intervalparentesen altid vende udad. Det får os også frem til, at vi kan skrive mængden af alle reelle tal som et interval: $R =]-\infty, \infty[$.

En anden måde at afbilde mængder på er ved hjælp af såkaldte *Venn-diagrammer*. Mængder tegnes som cirkler eller lukkede kurver. Da $N \subset Z \subset Q \subset R \subset C$ ligger de tilsvarende lukkede kurver inde i hinanden:



□

Man har også et begreb, som hedder *komplementærmængden* til en given mængde A. Det kræver tilstedeværelsen af en *grundmængde* – den maksimale mængde G, man betragter i en given situation. Komplementærmængden til A er i dette tilfælde det samme som mængdedifferensen $G \setminus A$ og skrives A^c eller undertiden $\complement A$. Hvis vores grundmængde er de reelle tal er Q^c altså det samme som mængden af alle irrationale tal. En sidste ting, vi skal indføre, er begrebet en *klassedeling*. Klassedelingen (eller *partitionen*) af en mængde A er en familie af mængder, som er parvis disjunkte og hvis foreningsmængde er lig med A. De tre mængder $\left]-\infty, 0\right[$, $\{0\}$ og $\left]0, \infty\right[$ er således en klassedeling af R. På næste side kan du finde Venn-diagrammer over mange af de mængdeoperationer, vi har kigget på i dette afsnit.

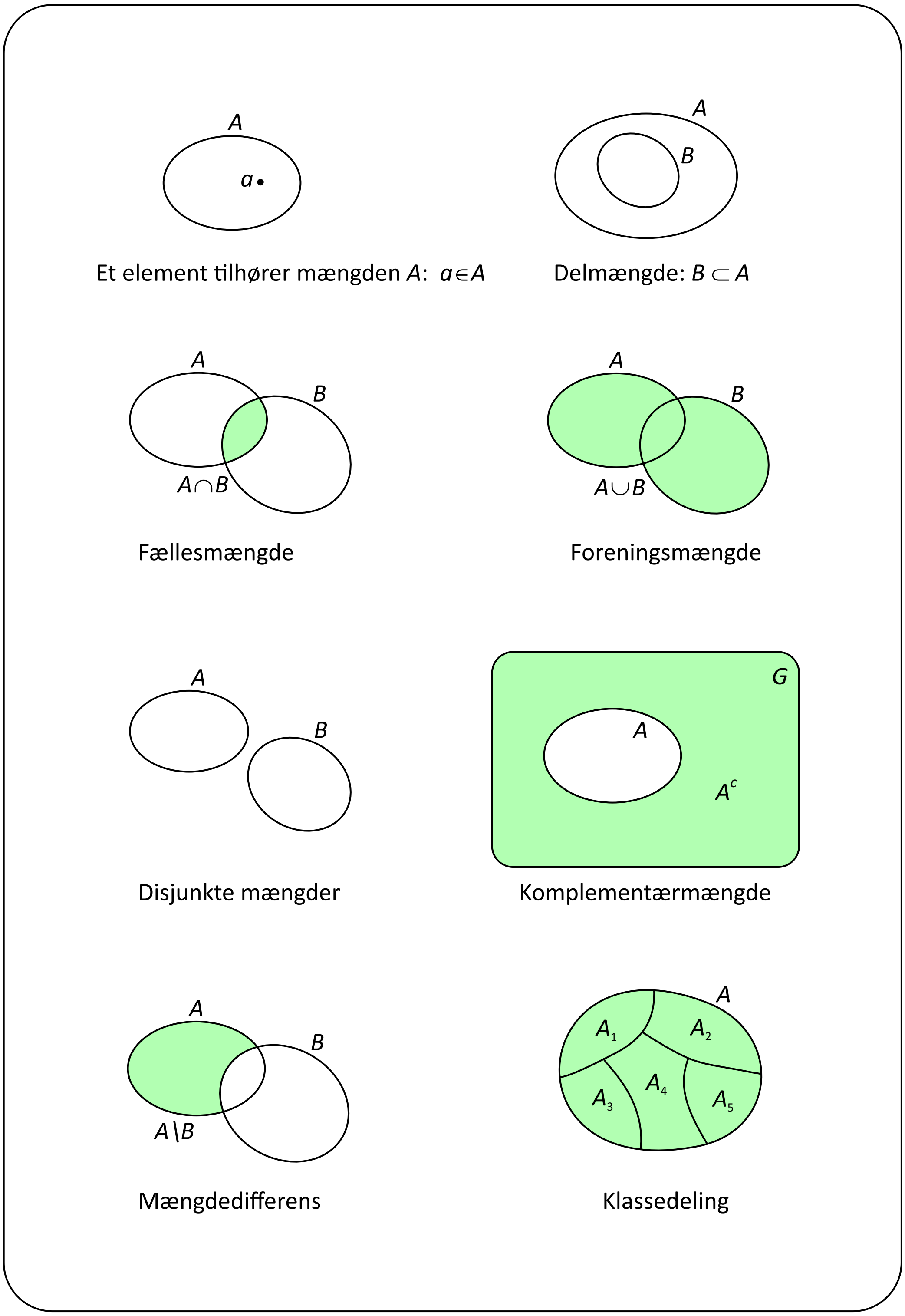
Eksempel 1.4

Der gælder en række regneregler for mængder. For eksempel gælder følgende:

$$A \cap (B \cup C) \;=\; (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Lad os prøve at vise dette. Man kan naturligvis tegne Venn-diagrammer for at indse dette, men det vil kræve opdeling i forskellige tilfælde, alt efter om mængderne overlapper eller ej. En anden effektiv metoder er at vise, at hvis et element tilhører venstresiden, så tilhører det også højresiden og omvendt. Lad os sige, at $x \in A \cap (B \cup C)$. Da har vi af definitionen på fællesmængde, at $x \in A \text{ og } x \in B \cup C$. At x tilhører foreningsmængden mellem B og C betyder, at x ligger i mindst én an mængderne. Vi deler op: Hvis $x \in B$ vil $x \in A \cap B$ og dermed vil x ligge i mængden på højre side. Hvis derimod $x \in C$, vil der gælde at $x \in A \cap C$, og i det tilfælde vil x også tilhøre mængden på højre side. Vi har dermed vist, at $A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Vi mangler at vise den modsatte vej, altså at inklusionen også kan vendes den anden vej: $A \cap (B \cup C) \supseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Hvis vi har, at $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$, må x ligge i mindst den ene af de to mængder indenfor parenteserne. Igen deles op: Hvis $x \in A \cap B$ har vi $x \in A$ *og* $x \in B$. Men da vil x også tilhøre mængden $B \cup C$. Dermed haves $x \in A \cap (B \cup C)$. Sådanne regneregler for mængder kan være meget nyttige i forskellige sammenhænge.

□



Eksempel 1.5

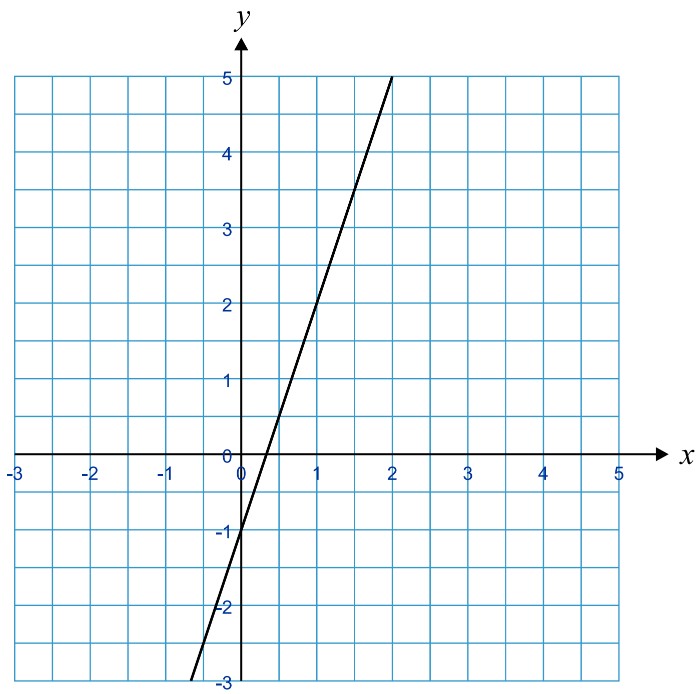
Det sidste vi skal kigge på i dette afsnit er produktmængder. Lad A og B være to mængder. Da består *produktmængden* $A \times B$ af alle de *par* af elementer, hvor den første komponent kommer fra mængden A, og den anden komponent kommer fra mængden B. Hvis for eksempel $A = \{1,2,3\}$ og $B = \{3,4\}$, så har vi:

$$A \times B = \{(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,3),(3,4)\}$$

Produktmængden har altså 6 elementer. Vi skal ofte gøre brug af produktmængder i forbindelse med reelle tal. $R \times R$, ofte forkortet til R^2, består altså af alle par af reelle tal. Vi kan opfatte denne mængde som punkter i den reelle plan. Vi kan støde på talmængder angivet på følgende form:

$$\{(x,y) \in R^2 \,|\, y = 3x - 1\}$$

Mængden består altså af alle de talpar, hvor anden koordinaten y er lig med 3 gange førstekoordinaten x minus 1. Punktmængden danner en linje i den reelle plan.



1.2 Lidt om ligninger og åbne udsagn

I matematisk henseende er et *udsagn* en påstand, som man kan afgøre om er sand eller falsk. Eksempler herpå er: "Haderslev er en by i Sønderjylland" og "Køge er en by i Sønderjylland". Den første påstand er sand, mens den anden er falsk. Ikke overraskende skal vi dog især arbejde med udsagn, som vedrører tal. Her er $5 > 2$ og $6 = 4$ eksempler på udsagn. Igen er den første sand og det andet falsk.

Et *åbent udsagn* er en påstand, som indeholder en form for variabel. Indsættes en værdi for den variable, skal man kunne afgøre, om det fremkomne udsagn er sand eller falsk. Et eksempel er "Byen ligger i Sønderjylland". Den variable er her byen. Vi kan indsætte navnet på en by og afgøre, om det fremkomne udsagn er sand eller falsk. Indsætter vi Haderslev bliver udsagnet sand, mens det bliver falsk, hvis vi fx indsætter Køge. Et eksempel på et åbent udsagn med tal er $3x+5=8$. Hvis man indsætter 1 på x's plads, bliver udsagnet sand. For alle andre reelle værdier bliver det falsk. Vi kommer da naturligt ind på emnet *ligninger*, for når vi skriver:

$$3x+5=8 \;\Leftrightarrow\; 3x=3 \;\Leftrightarrow\; x=1$$

så menes, at de tre ligninger i linjen ovenfor har samme sandhedsværdi. Hermed menes, at udsagnene bliver sande for nøjagtigt den eller de samme værdier af x. Når det er tilfældet, skrives *biimplikationstegn* (ensbetydende) imellem de åbne udsagn. Et åbent udsagn kan sagtens bestå af flere dele, og her er specielle matematiske tegn nyttige: $\wedge$, som betyder *og* samt $\vee$, der betyder *eller*. Den såkaldte *nulregel* siger for eksempel, at hvis et produkt af to tal er 0, så er det ensbetydende med, at (mindst) et af tallene må være 0. Det kan smart udtrykkes:

$$a\cdot b=0 \;\Leftrightarrow\; a=0 \vee b=0 \quad \text{(nulregel)}$$

Vi kan altså slutte "begge veje": Hvis vi ved, at produktet af to tal er 0, så er mindst det ene tal nødt til at være 0. Hvis omvendt vi ved, at enten a eller b er lig med 0, så er produktet det også. Der findes imidlertid åbne udsagn, hvor der kun gælder implikationstegn imellem, ikke biimplikationstegn! Et eksempel er:

$$x=4 \;\Rightarrow\; x^2=16$$

Hvis venstresiden er sand for et bestemt x, så bliver højresiden det også – underforstået for det samme x. Derimod kan man ikke slutte modsat. Det åbne udsagn $x^2=16$ bliver sand for $x=-4$, mens venstresiden bliver falsk for denne værdi. Vil man gerne have en biimplikation, kan man ændre lidt i ovenstående linje:

$$x^2=16 \;\Leftrightarrow\; x=4 \vee x=-4$$

Man kan også have åbne udsagn, som har flere variable. For eksempel gælder følgende biimplikation, hvor $(x,y)\in R^2$:

$$x^2+y^2=0 \;\Leftrightarrow\; x=0 \wedge y=0$$

Med andre ord: Ligningen på venstre side er opfyldt hvis og kun hvis *både x og y* er 0. Dette er oplagt, da venstresiden vil være positiv med mindre netop x og y begge er 0.

Advarsel!

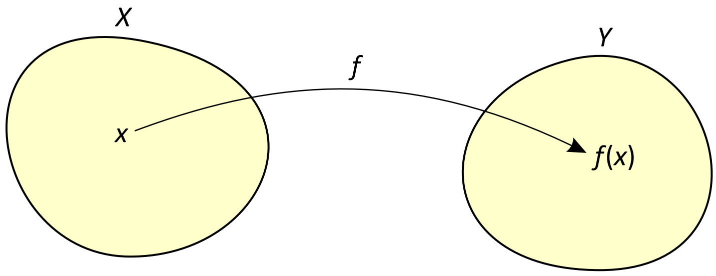
Man ser undertiden elever anbringe biimplikationstegn imellem matematiske *udtryk*. Følgende er således meningsløst: $\cancel{3x+x-5+1 \;\Leftrightarrow\; 4x-4}$, eftersom der på hver side af biimplikationstegnet ikke er et åbent udsagn. Det rigtige er her at bruge et lighedstegn imellem udtrykkene: $3x+x-5+1=4x-4$.

1.3 Funktionsbegrebet

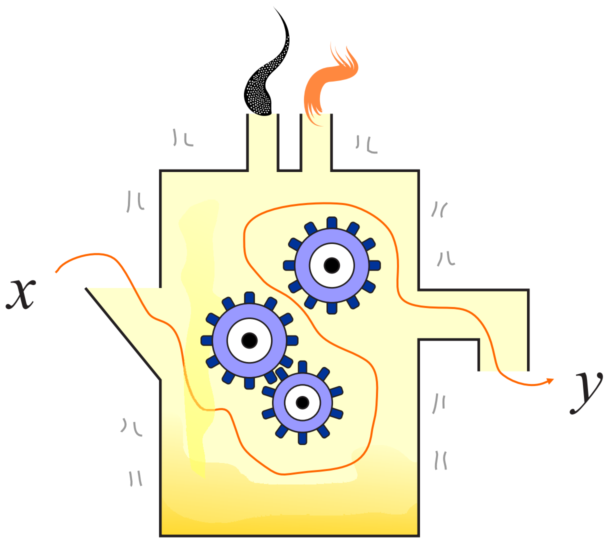
I dette afsnit skal vi introducere begrebet en *funktion*. Det viser sig at være uhyre nyttigt, og vi vil beskæftige os indgående med emnet i store dele af denne bog. Der er tale om et meget generelt begreb, som finder stor anvendelse i naturvidenskaben og andre fagområder, herunder økonomi. Lad os kaste os direkte ud i en definition.

Definition 1.6

Ved en *funktion* af en mængde X ind i en mængde Y forstås en tilordning, hvor der til ethvert $x \in X$ svarer et entydigt bestemt element $y \in Y$.



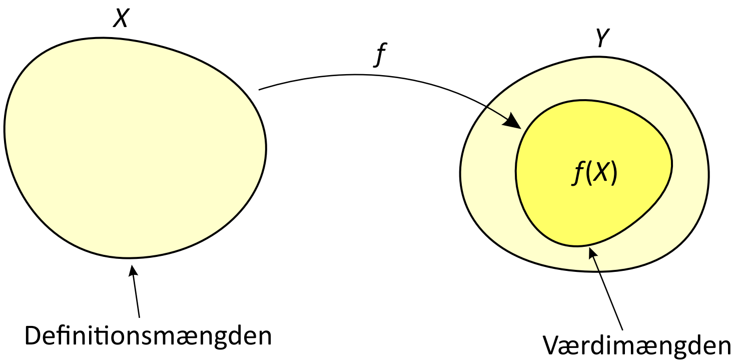
Til tider kaldes en funktion også for en *afbildning*. Elementet x fra mængden X *afbildes* i elementet y i mængden Y. Her kaldes y for *billedet* af x eller *funktionsværdien* i x og benævnes $f(x)$. Vi kalder x for den uafhængige variabel og y for den afhængige variabel. Man kan betragte en funktion som en slags maskine, der når den fodres med et element x spytter et andet (eller eventuelt samme) element ud. Vel at mærke på en måde, så hver gang maskinen fodres med det samme element, er det også det samme y, som spyttes ud. Det er det entydigheden går på. f siges at være *en funktion af* x.



$$x \xmapsto{f} y$$

Funktionen kan angives ved $f: X \to Y$ eller ved $X \xrightarrow{f} Y$. Mængden X kan i princippet være næsten hvad som helst, men meget ofte vil det være de reelle tal eller en delmængde heraf. Det samme med mængden Y. Hvis Y er lig med R eller en delmængde heraf, kaldes funktionen for en *reel funktion*.

Definitionsmængden $Dm(f)$ for funktionen f er mængden X, dvs. alle de elementer, der har et billede. *Værdimængden* $Vm(f)$ er mængden af alle funktionsværdier. Den kan være lig med Y eller være en delmængde heraf. Der kan altså godt være elementer i mængden Y, som ikke "rammes" af noget element fra X.

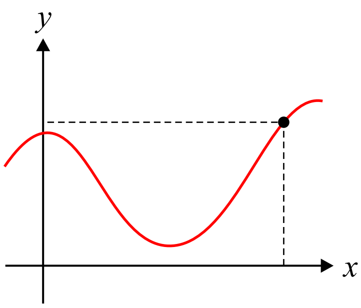


Forskriften for en funktion er den "opskrift", som angiver de y-værdier de forskellige x-værdier afbildes i. Forskrifter ser ofte meget konkrete ud, for eksempel $f(x) = x^2 + 1$. Man indsætter blot en x-værdi i forskriften og får den tilhørende y-værdi. For eksempel afbildes 2 i 5, som følgende viser: $f(2) = 2^2 + 1 = 5$. Funktionsværdien i $x = 2$ (eller blot i 2) er altså 5.

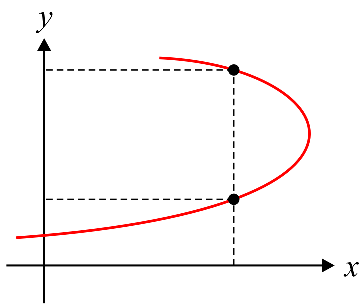
Grafen for en funktion f er mængden af punkter (x, y), hvor $x \in X$ og $y = f(x)$. Med terminologien fra de forrige afsnit, kan det mere formelt udtrykkes som punktmængden

$$\{(x, y) | x \in X \wedge y = f(x)\}$$

Som tidligere omtalt vil de funktioner, vi især skal beskæftige os med, have mængder X og Y, som er de reelle tal eller delmængder deraf. I dette tilfælde kan man nemt *tegne grafen* i et koordinatsystem med x-værdien henad 1. aksen, og den tilhørende funktionsværdi $y = f(x)$ opad 2. aksen. Det giver et meget godt overblik over funktionens forløb og egenskaber.



Grafen for en funktion:
Hver x-værdi har kun én y-værdi



Ikke grafen for en funktion:
En *x*-værdi har to *y*-værdier

Advarsel!

Det giver ikke mening at sige ~~"tegne funktionen"~~ (hvorfor teksten er streget over). Det rigtige er at sige: "tegne grafen for funktionen".

Det er efterhånden på tide med nogle eksempler.

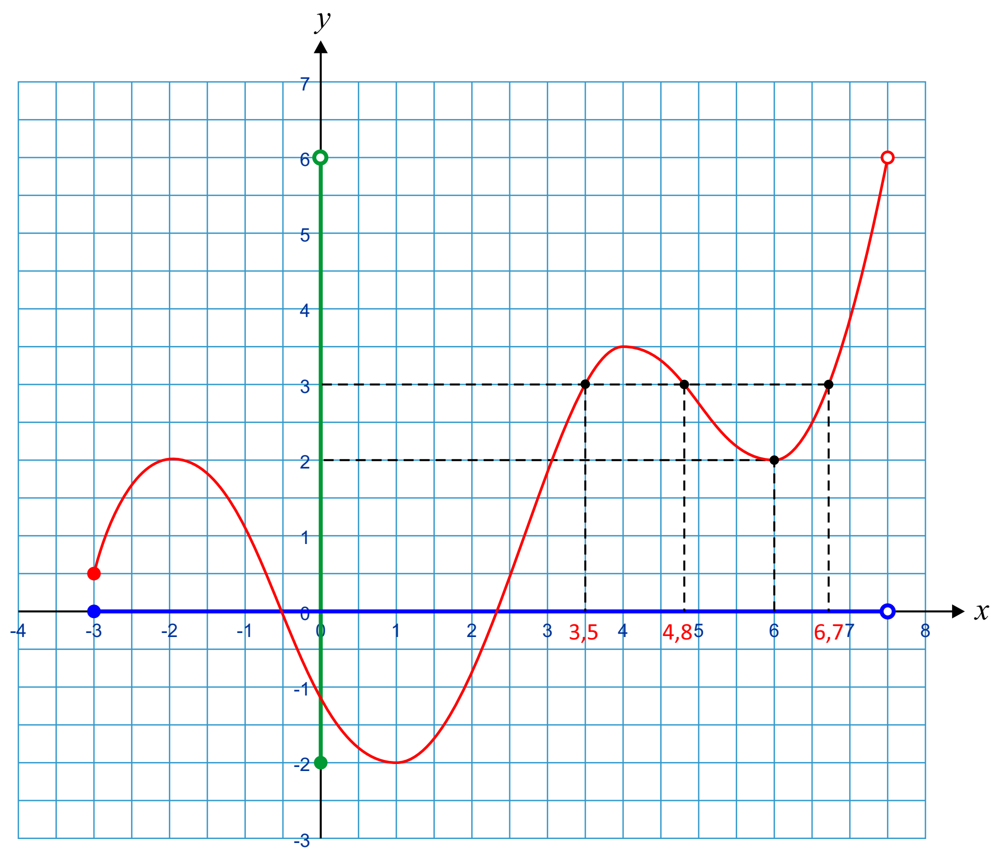
Eksempel 1.7

Nedenfor er vist grafen for en funktion f. Følgende ønskes løst grafisk:

a) Bestem funktionens definitionsmængde og værdimængde.

b) Bestem funktionsværdien i $x = 6$.

c) Løs ligningen $f(x) = 3$.



Løsninger:

a) Vi finder definitionsmængden ved at projicere grafen ned på x-aksen. Derved fås mængden af x-værdier, som har et billede. Der er en åben bolle i enden af grafen, så punktet $(7{,}5; 6)$ er ikke med på grafen. Det er derimod punktet $(-3; 0{,}5)$, da bollen her er lukket. Dermed er definitionsmængden følgende interval: $Dm(f) = [-3; 7{,}5[$. Værdimængden er som bekendt mængden af alle mulige y-værdier. Den fås ved at projicere grafen ind på y-aksen. Vi ser, at vi opnår alle værdier fra -2 til 6. Tallet -2 er med, da det er funktionsværdien i $x = 1$. Derimod er tallet 6 ikke med, eftersom der ikke er nogen x-værdi, som afbildes i 6. Altså haves $Vm(f) = [-2, 6[$.

b) $f(6)=2$ som markeret med stiplede linjer på grafen.

c) Vi kender altså y og skal finde x. Der er tre x-værdier, som afbildes i 3, nemlig 3,5; 4,8 og 6,7 (så godt vi nu kan aflæse). Aflæsningerne er markeret på grafen. Man kan skrive resultatet på én af to måder:

$$f(x)=3 \;\Leftrightarrow\; x=3{,}5 \;\vee\; x=4{,}8 \;\vee\; x=6{,}7$$

$$f(x)=3 \;\Leftrightarrow\; L=\{3{,}5;\,4{,}8;\,6{,}7\}$$

Førstnævnte opskrivning: Vi har brugt *eller*-tegnet $\vee$ imellem de åbne udsagn. NB! Det vil være forkert at skrive et *og*-tegn imellem, for et givet tal kan ikke både være lig med 3,5; 4,8 og 6,7 på samme tid! Sidstnævnte opskrivning: Her angives løsningsmængden bestående af de tre elementer (tal) 3,5; 4,8 og 6,7.

□

Bemærkning 1.8

Hvis der er kommatal i en mængde, er det almindeligt at anbringe semikolon imellem kommatallene, for at der ikke opstår tvetydighed. Benytter man CAS-værktøj med engelsk notation, vil det nok være mest naturligt at angive "kommatallene" med punktum som decimal-separator og i øvrigt adskille tallene med et komma! Den anden skrivemåde overfor vil dermed blive til: $f(x)=3 \;\Leftrightarrow\; L=\{3.5,\,4.8,\,6.7\}$. Noget helt andet er, at man naturligvis også kan skrive resultatet med ord: Løsningerne til ligningen $f(x)=3$ er 3.5, 4.8 og 6.7 (eller tal med komma).

Eksempel 1.9

Allerede i 1g betragtede vi i princippet funktioner. Det blev blot ofte kaldt en *variabelsammenhæng*. Ligningen $y=2x+1$ beskriver således en *lineær sammenhæng*. Forskriften for funktionen er altså $f(x)=2x+1$. Skal man tegne grafen for en funktion manuelt, vil man typisk først lave en *støttepunktstabel*, ofte omtalt løst som et "sildeben", indeholdende en række passende x-værdier med tilhørende funktionsværdier. Er der tilstrækkeligt mange støttepunkter, kan man herefter tegne grafen for f i et koordinatsystem ved (som oftest) at tegne en blød kurve igennem punkterne angivet i støttepunktstabellen. I tilfældet med en lineær funktion, vil det naturligvis kun være nødvendigt med to støttepunkter, for at man kan tegne grafen, som er en linje. Det kunne være:

x	-2	8
y	-3	15

Hvis der ikke står anført nogen specifik mængde, som funktionen skal betragtes i, så underforstås definitionsmængden altid at være den størst mulige mængde indenfor de reelle tal. Derfor er $Dm(f)=R$ her, da ethvert reelt tal kan indsættes i forskriften. Ethvert reelt tal kan "rammes" af en x-værdi, så værdimængden er ligeledes mængden af alle reelle tal: $Vm(f)=R$. Enten kan man argumentere ud fra grafen, eller også kan man indse det ved at indsætte y på $f(x)$ plads i forskriften og isolere x:

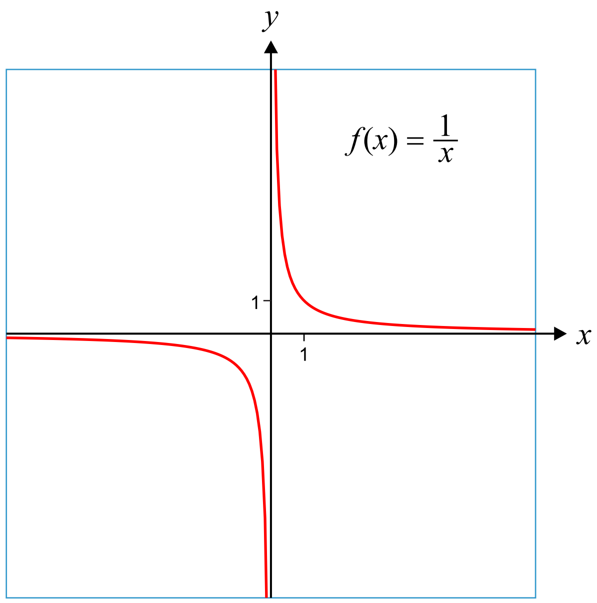
$$y = 2x + 1 \;\Leftrightarrow\; y - 1 = 2x \;\Leftrightarrow\; \frac{y-1}{2} = x$$

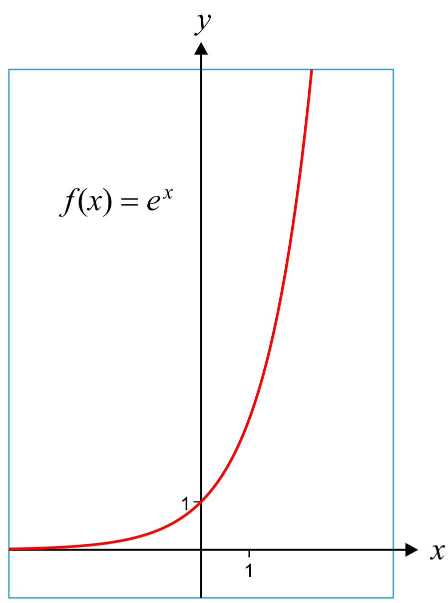
Den sidste ligning fortæller direkte hvilket *x*, som afbildes i *y*, og *y* kan være hvad som helst. Tallet 4421 er således billedet af $x = (4421-1)/2 = 2210$. Har man rådighed over et CAS-værktøj, vil man typisk kunne få grafen tegnet lynhurtigt med en *plot* kommando. Her vil man dog være nødsaget til at angive et endeligt interval at tegne grafen i – med mindre man lader CAS-værktøjet vælge for én.

□

Eksempel 1.10

Funktionen $f(x) = k/x$, hvor *k* er en konstant forskellig fra 0, kaldes for en *omvendt proportionalitet*. Vi skal se på tilfældet, hvor $k = 1$. Grafen bliver som vist på figuren til venstre. Da man ikke må dividere med 0, er dette tal ikke med i definitionsmængden. Til gengæld kan vi indsætte alle andre reelle tal. Derfor haves: $Dm(f) = R \setminus \{0\}$. Men hvilke funktionsværdier forekommer? Grafen antyder allerede, at rigtig mange *y*-værdier "rammes" af et *x*. Men det er kun muligt at afbilde grafen i et område svarende til et lille rektangel, så man må argumentere nøjere for at bestemme værdimængden. I dette tilfælde er det muligt at anvende teknikken fra eksempel 1.9, altså udskifte $f(x)$ med *y*, og derefter isolere *x*: $y = 1/x \;\Leftrightarrow\; y \cdot x = 1 \;\Leftrightarrow\; x = 1/y$. Vi kan indsætte ethvert $y \neq 0$. Altså er $Vm(f) = R \setminus \{0\}$. Grafen er i øvrigt en såkaldt *hyperbel*. Grafen har desuden asymptoter. Mere om det i afsnit 1.7.





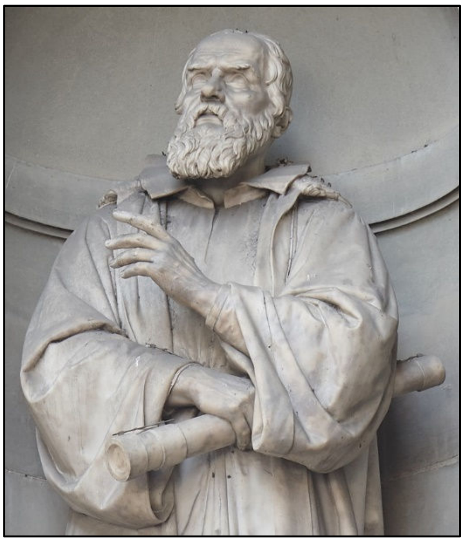
Grafen til højre er grafen for den naturlige eksponentialfunktion $f(x) = e^x$ med grundtallet $e = 2{,}7182818...$. Vi kan indsætte alle reelle tal, så $Dm(f) = R$. Værdimængden er endvidere alle positive reelle tal, dvs. $Vm(f) = \left]0, \infty\right[$. En nærmere begrundelse for denne påstand undlader vi, da en forklaring ligger ret dybt begravet i selve konstruktionen af eksponentialfunktionen. Påstanden stemmer fint overens med grafen til højre. Funktionsværdien vil nærme sig 0, jo større negativ *x*-værdi man indsætter.

□

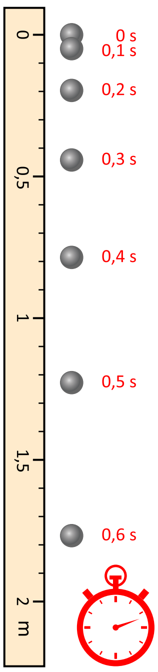
Bemærkning 1.11

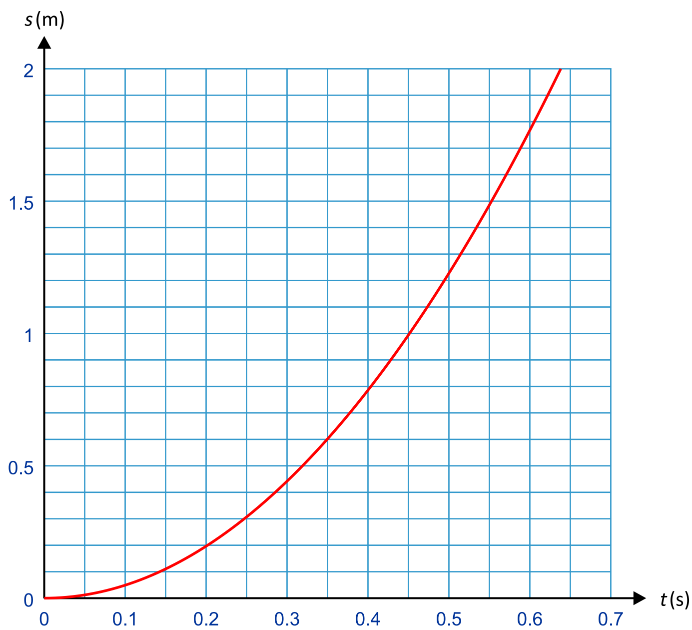
Der er nogen uenighed i den matematiske litteratur, hvorvidt man skal skrive den naturlige eksponentialfunktion med e i kursiv eller ej. Langt de fleste udenlandske og nogle danske kilder bruger bogstavet i kursiv: *e*. Derfor har jeg også valgt at gøre det. Man skal dog være opmærksom på, at ved anvendelse i et CAS-værktøj skal programmet vide, at der er tale om det konkrete tal $e = 2,7182818...$ og ikke bare en vilkårlig ny variabel, man har kaldt *e*. Undersøg manualen her! I øvrigt kan man altid bruge den alternative skrivemåde for den naturlige eksponentialfunktion: $\exp(x)$.

Eksempel 1.12



Den italienske fysiker og astronom *Galileo Galilei* (1564-1642) betragtes i dag ofte som den moderne videnskabs fader. Gennem forsøg og matematiske argumenter nåede han frem til sine fysiske love. På trods af, at der på den tid ikke eksisterede nøjagtige ure, var han ved hjælp af eksperimenter og snedige argumenter i stand til af fremsætte den såkaldte *faldlov*, som i moderne notation vil se således ud: $s = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$. Her er s den tilbagelagte strækning, g er tyngdeaccelerationen og t er den tid, der er gået siden legemet (fx en kugle) er sluppet i tyngdefeltet. Specielt er faldtiden uafhængig af massen! I dag kan vi tænke os et eksperiment, hvor vi slipper en kugle fra en vis højde og via en lodretstående lineal, som peger nedad, samt et nøjagtigt ur, måler sammenhørende værdier af strækningen s og tiden t. Det giver anledning til en funktion, som vi kan skrive som $s(t) = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$.





Grafen for funktionen er vist til højre på figuren på forrige side. At betragte strækningen som en funktion af tiden viser sig meget frugtbar. I et senere kapitel om differentialregning skal vi se, hvorledes det sætter os i stand til at bestemme *hastigheden* af kuglen til et vilkårligt tidspunkt.

□

Bemærkning 1.13

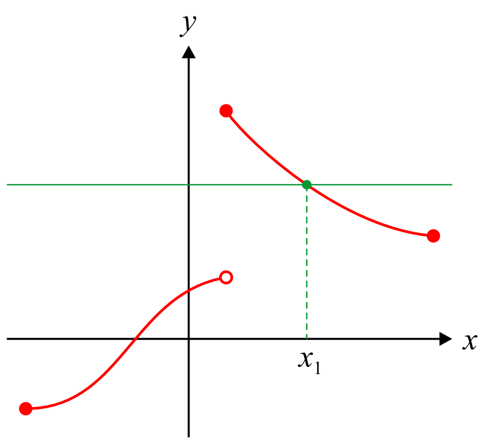
I forrige eksempel så vi, at en funktion ikke behøver at hedde f, ligesom den uafhængige variabel ikke behøver hedde x. I mange anvendelser er den uafhængige variable tiden, så det vil være naturligt at kalde den t. I øvrigt gør det ikke noget forskel, hvad man kalder den variable. Således repræsenterer forskriften $f(x)=\frac{1}{2}\cdot g\cdot x^2$ den samme funktion som forskriften $f(t)=\frac{1}{2}\cdot g\cdot t^2$. En funktion er en "regel", som fortæller hvilken funktionsværdi, der er knyttet til en given værdi. I begge tilfælde siger reglen, at man skal tage den aktuelle værdi, opløfte den i 2. potens og gange med $\frac{1}{2}g$. Det er altså ligegyldig, hvad man kalder den uafhængige variabel. Man kan også fint indsætte et udtryk på x's plads, fx $2t+1$, bare man så på højre side af forskriften ligeledes udskifter alle forekomster af x med $2t+1$: $f(2t+1)=\frac{1}{2}\cdot g\cdot(2t+1)^2=\frac{1}{2}\cdot g\cdot(4t^2+4t+1)$. Men betragter man udtrykket på højre side som en funktion af t, har man at gøre med en ny funktion. Den kan betragtes som en ny, såkaldt *sammensat funktion*. Vi kommer til dette tema i afsnit 1.5.

□

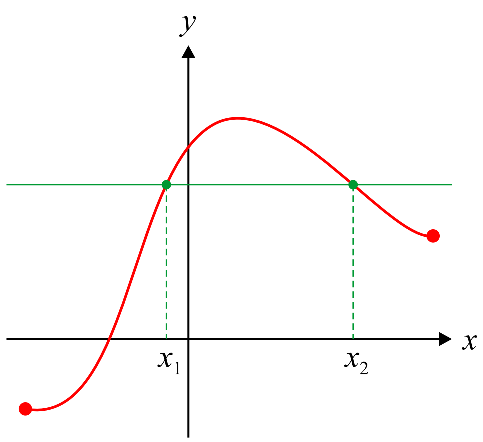
I eksempel 1.9 og 1.10 benyttede vi en teknik med at udskifte $f(x)$ med y i forskriften for funktionen og derefter isolere x i ligningen – med henblik på at kunne sige noget om funktionens værdimængde. Denne teknik er ikke altid mulig. For det første er det ret ofte svært at isolere x, og for det andet kan der sagtens være flere x-værdier, som "rammer" den samme y-værdi. I de to omtalte tilfælde var vores funktion det, man kalder *injektiv*, hvilket vil sige, at forskellige x-værdier altid afbildes i forskellige y-værdier:

(1) $$x_1 \neq x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1)\neq f(x_2)$$

Grafmæssigt betyder det, at *enhver* vandret linje højst vil ramme grafen i ét punkt. Den gode nyhed er, at vi får nye redskaber til at bestemme værdimængden, når vi kommer til differentialregningen!

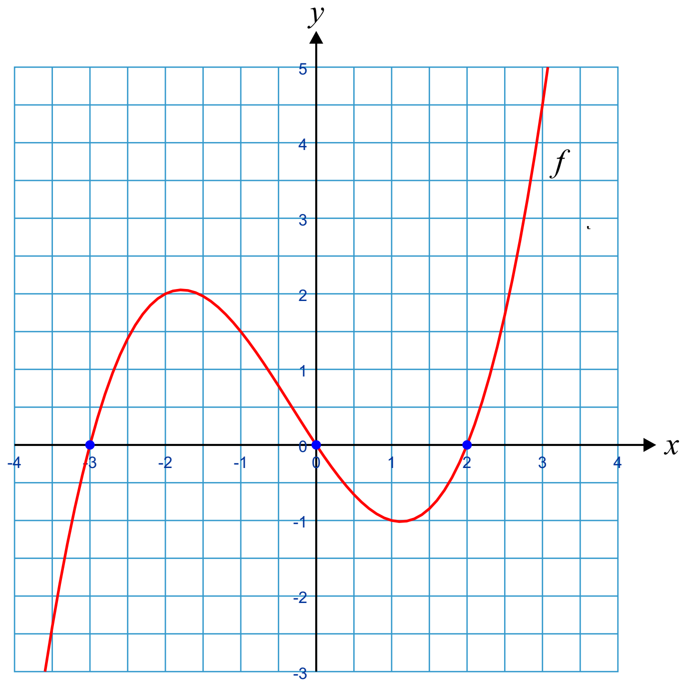


Injektiv funktion



Ikke injektiv funktion

Lige en sidste ting, før vi går videre til næste afsnit: tallet a kaldes for et *nulpunkt* for f, såfremt $f(a)=0$. At bestemme en funktions nulpunkter svarer altså til at løse ligningen $f(x)=0$. Det kan resultere i ingen løsning, én eller flere løsninger eller i princippet uendeligt mange løsninger. Rent grafisk skal man lede efter de steder på x-aksen, hvor grafen skærer x-aksen. Funktionen f med grafen nedenfor har således tre nulpunkter: -3, 0 og 2. Vi kan skrive $f(x)=0 \;\Leftrightarrow\; x=-3 \vee x=0 \vee x=2$.



Bemærkning 1.14

Spørges man om nulpunkterne for en funktion, skal man kun svare med x-værdierne. Hvis man derimod bliver spurgt om at bestemme grafens skæringspunkter med x-aksen, så skal der svares med koordinatpar. I eksemplet ovenfor er grafens skæringspunkter med 1. aksen således $(-3,0)$, $(0,0)$ og $(2,0)$.

□

1.4 Monotoniforhold og ekstrema

Hvis funktionen repræsenterer fortjenesten i en virksomhed som funktion af den valgte stykpris for varen, så kan det være interessant at undersøge, under hvilke forhold fortjenesten vokser, aftager eller topper. Eller hvis funktionen repræsenterer den højde en kastet bold har over jordoverfladen som funktion af afstanden fra kastestedet, så kan det være nyttigt at bestemme boldens maksimale højde eller bestemme kastelængden, etc. Sådanne betragtninger fører os naturligt frem til, at det vil være hensigtsmæssigt at kunne tale om voksende og aftagende funktioner samt om maksima eller minima for funktioner. Vi har brug for nogle klare definitioner.

Definition 1.15 (Monotoniforhold)

En funktion *f* siges at være *voksende* i et interval *I*, såfremt der for vilkårlige $x_1, x_2 \in I$ gælder følgende:

(2) $$x_2 > x_1 \quad \Rightarrow \quad f(x_2) > f(x_1)$$

På tilsvarende vis siges en funktion *f* at være *aftagende* i intervallet *I*, såfremt der for vilkårlige $x_1, x_2 \in I$ gælder følgende:

(3) $$x_2 > x_1 \quad \Rightarrow \quad f(x_2) < f(x_1)$$

En funktion *f* siges i øvrigt at være *voksende* (uden angivelse af interval), hvis (2) gælder for vilkårlige $x_1, x_2 \in Dm(f)$. Tilsvarende med *aftagende* funktion. At en funktion f er voksende kan altså lidt løst sagt karakteriseres ved at hvis man går en tur mod højre langs *x*-aksen, så vil man opleve, at de tilhørende *y*-værdier bliver større og større. For en aftagende funktion vil *y*-værdierne derimod blive mindre og mindre. Vi tager lige et par definitioner mere, før vi kigger på et eksempel.

Definition 1.16 (Ekstrema)

Et tal *M* siges at være *størsteværdi* eller *maksimum* for funktionen *f*, såfremt der findes et $x_0 \in Dm(f)$, så $f(x_0) = M$ og så $f(x) \le M$ for alle $x \in Dm(f)$. Man siger endvidere, at størsteværdien *antages* i punktet x_0.

Et tal *m* siges at være *mindsteværdi* eller *minimum* for funktionen *f*, såfremt der findes et $x_0 \in Dm(f)$, så $f(x_0) = m$ og så $f(x) \ge m$ for alle $x \in Dm(f)$. Man siger da, at mindsteværdien *antages* i punktet x_0.

Maksimum og minimum hedder i flertal henholdsvis maksima og minima, og under ét kalder vi dem for *ekstrema*. Bemærk at ekstrema sagtens kan antages i flere punkter, ja i princippet i uendeligt mange. Vi får brug for en lokal udgave af begreberne også:

Definition 1.17 (Lokale ekstrema)

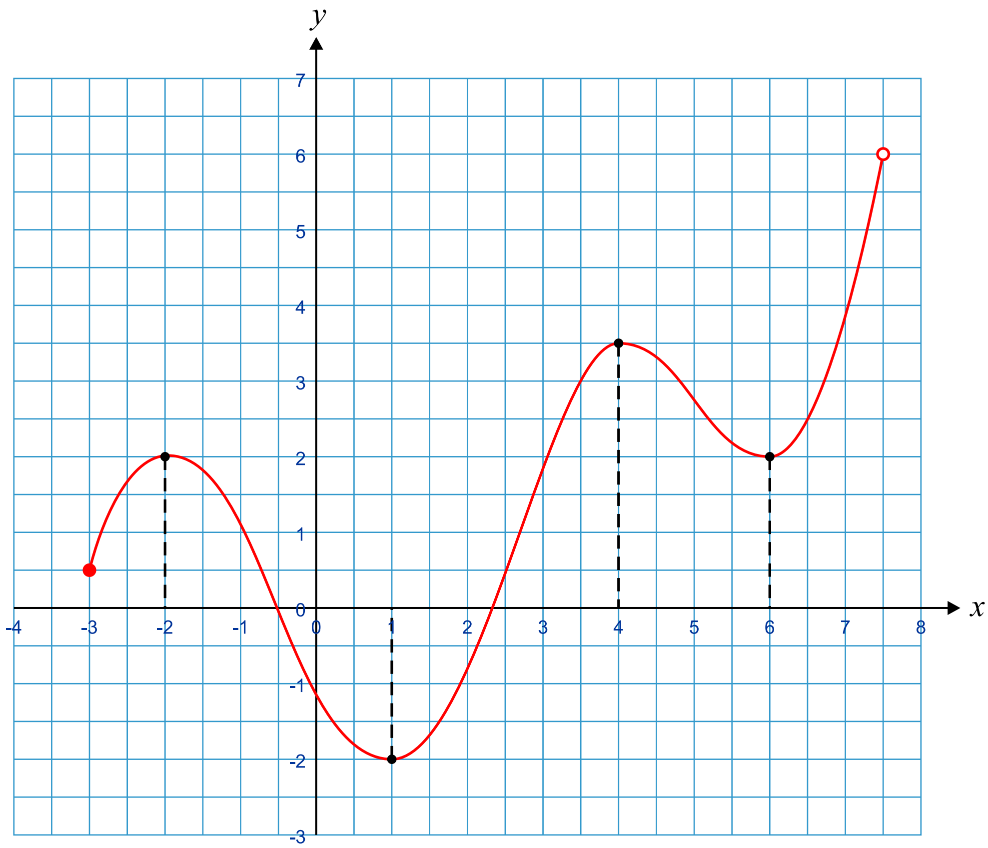
En funktion siges at have *lokalt maksimum* i punktet x_0, såfremt der findes et nok så lille åbent interval $I \subseteq Dm(f)$, indeholdende x_0, så $f(x) \le f(x_0)$ for alle $x \in I$. Tilsvarende siges en funktion at have et *lokalt minimum*, hvis der findes et lille åbent interval $I \subseteq Dm(f)$, så $f(x) \ge f(x_0)$ for alle $x \in I$.

Hvis funktionen har et maksimum eller et minimum, når man indskrænker definitionsmængden til et åbent interval, så taler man altså om et lokalt maksimum henholdsvis et lokalt minimum. Vi skal se et eksempel. Hvis et lokalt maksimum også er et maksimum, så tilføjer man undertiden ordet *globalt* til det. Samme med lokalt minimum.

Eksempel 1.18

Betragt den samme funktion som i eksempel 1.7: Når vi foretager en tur på x-aksen fra venstre mod højre, kan vi se, at de tilhørende y-værdier vokser mellem –3 og –2. Derfor siger vi, at f er voksende i intervallet i $\left[-3,-2\right]$. Herefter aftager funktionen i intervallet $\left[-2,1\right]$, etc. Bemærk at det ikke er nogen fejl, at tallet –2 figurerer i begge intervaller. Det at en funktion er voksende eller aftagende, er nemlig ikke nogen punktegenskab, men kræver, at funktionens forløb kendes i et interval. Dog kan en x-værdi aldrig tages med, hvis funktionen ikke er defineret i denne x-værdi. Alt i alt har vi:

$$\begin{array}{l} f \text{ er voksende i } \left[-3,-2\right], \text{ i } \left[1,4\right] \text{ og i } \left[6;7,5\right[\\ f \text{ er aftagende i } \left[-2,1\right] \text{ og i } \left[4,6\right] \end{array}$$



Angående lokale og globale ekstrema, så haves:

f har et lokalt maksimum i $x=-2$ og $x=4$ med værdier henholdsvis 2 og 3,5.
f har et lokalt minimum i $x=6$ med værdi 2.
f har et lokalt og globalt minimum i $x=1$ med værdi –2.

Derimod har funktionen ikke noget maksimum. Der forekommer funktionsværdier vilkårligt tæt på 6, men værdien 6 antages ikke noget sted.

□

Først når vi kommer til Differentialregningen, vil vi for alvor blive i stand til at analysere funktioners monotoniforhold og lokale og globale ekstrema uden bare at kigge på en graf.

1.5 Operationer på funktioner

Matematikere har altid forsøgt at systematisere teorier. Derfor er det ikke overraskende, at de også har fundet på at foretage operationer på funktioner. De mest oplagte er at lægge funktioner sammen, hvorved der fås en ny funktion. Eller at subtrahere, multiplicere eller dividere funktioner. Det mest naturlige er at definere omtalte funktioner således:

Sumfunktion: $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$

Differensfunktion: $(f-g)(x) = f(x)-g(x)$

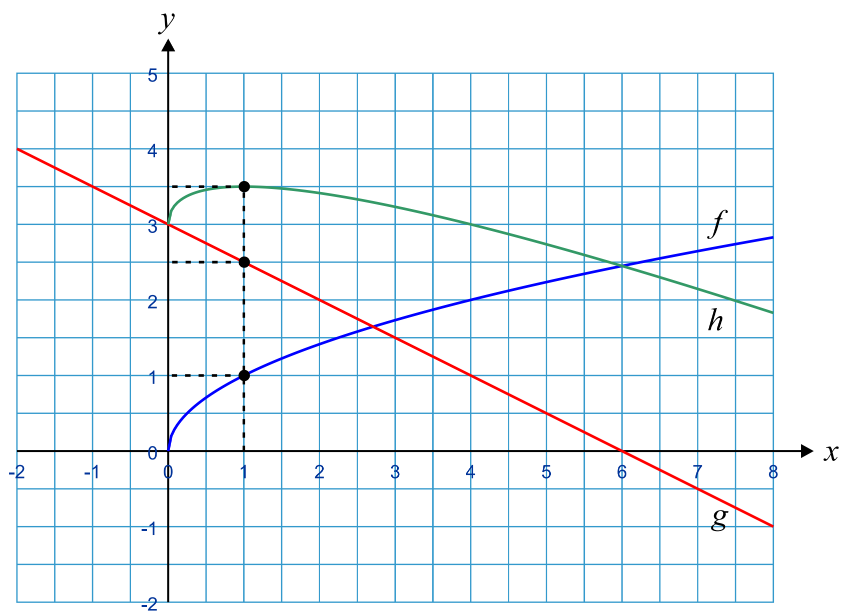
Produktfunktion: $(f \cdot g)(x) = f(x)\cdot g(x)$

Kvotientfunktion: $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$

Definitionsmængderne for de nye funktioner $f+g$, $f-g$ og $f \cdot g$ vil da naturligt være fællesmængden af definitionsmængderne for de to funktioner. I tilfældet med kvotientfunktionen må man dog tillige fjerne de tal, hvor $g(x)$ er 0.

Eksempel 1.19

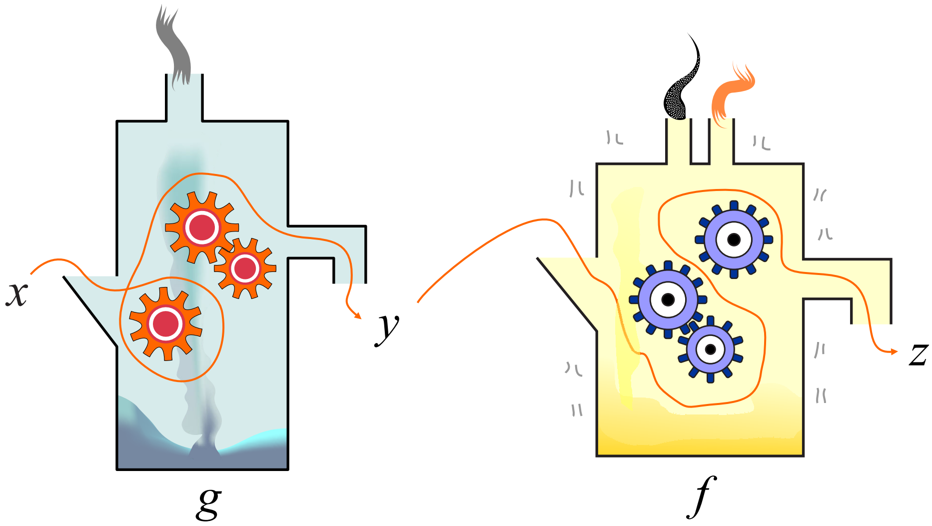
Lad der være givet de to funktioner $f(x)=\sqrt{x}$ og $g(x)=-0.5\cdot x+3$. Sumfunktionen vil da være givet ved $h(x)=(f+g)(x)=f(x)+g(x)=-0.5x+3+\sqrt{x}$. Her har vi tilladt os at kalde sumkurven for *h* for simpelheds skyld. Rent grafmæssigt er det også nemt at forestille sig, for man lægger bare funktionsværdierne for *f* og *g* sammen i hvert punkt; så har man funktionsværdien for sumfunktionen. I $x=1$ funktionsværdierne for *f* og *g* henholdsvis 1 og 2,5. Derfor er funktionsværdien for *h* lig med $1+2,5=3,5$ i $x=1$. Bemærk i øvrigt, at definitionsmængden for *h* bliver $[0,\infty[$, da *f* kun er defineret her.



□

Sammensat funktion

Vi skal kigge på en anden og endnu mere interessant operation, nemlig *sammensætning af funktioner*. Her er analogien af en funktion som værende en slags "maskine" nyttig: Hver funktion har dens egen maskine. Et x smides ind i den første maskine, y spyttes ud, og denne værdi smides videre ind i den næste maskine, som spytter z ud. Men kunne vi ikke lave en maskine, som klarer det hele på en gang, dvs. tager x ind og spytter z ud?

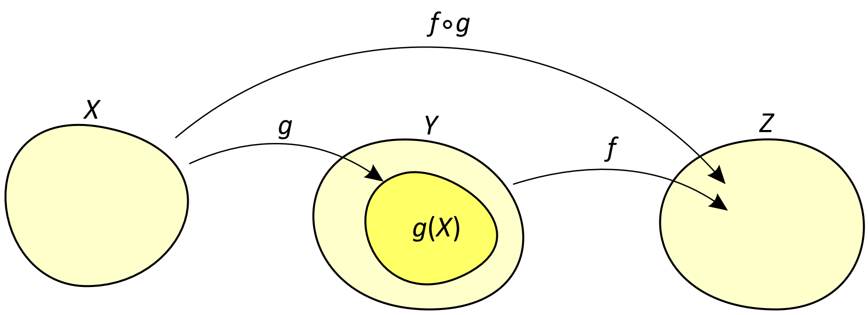


$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, mapsto, "g"] \arrow[rr, bend left, "f\circ g"] & y \arrow[r, mapsto, "f"] & z \end{tikzcd}$$

Udtrykt i matematisk sprog søger vi en funktion, som afbilder x i z. Men $y = g(x)$, så vi kan indsætte $g(x)$ på x's plads i forskriften for den anden funktion f. Den sammensatte funktion betegnes med $f \circ g$ (læs: "f bolle g"), og den opfylder:

(4) $$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

Hvis værdimængden for g er en delmængde af Y, som vist på figuren nedenfor, så er der ikke noget problem. Så vil definitionsmængden for den sammensatte funktion være X. Er dette ikke tilfældet, må man indskrænke definitionsmængden for $f \circ g$ til en delmængde af X, nemlig mængden af de $x \in X$, hvor $g(x) \in Y$.



Eksempel 1.20

Lad $f(x)=x^2+x+2$ og $g(x)=x+3$. Vi vil bestemme forskriften for $f\circ g$. Af pædagogiske årsager skriver vi $f(y)=y^2+y+2$ og indsætter derefter $y=g(x)=x+3$:

$$(f\circ g)(x) \;=\; f(g(x)) \;=\; (x+3)^2+(x+3)+2 \;=\; x^2+7x+14$$

hvor vi tillige af æstetiske årsager har reduceret udtrykket i sidste lighedstegn. Man kunne også finde på at sammensætte funktionerne i den modsatte rækkefølge, altså bestemme forskriften for $g\circ f$. Her skriver vi så $g(y)=y+3$ og $y=f(x)=x^2+x+2$:

$$(g\circ f)(x) \;=\; g(f(x)) \;=\; (x^2+x+2)+3 \;=\; x^2+x+5$$

Vi opdager samtidigt, at $f\circ g \neq g\circ f$. Det er faktisk også det normale, altså at det normalt *ikke* er ligegyldigt hvilken rækkefølge der sammensættes i. Der er i øvrigt ingen problemer med definitionsmængderne her, da begge funktioner er defineret på *R*.

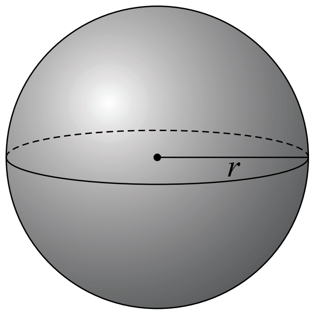
□

Bemærkning 1.21

I udtrykket $f\circ g$ kalder man ofte *g* for den *indre funktion* og *f* for den *ydre funktion*. Vi kommer til at stifte meget mere bekendtskab med dette, når vi kommer til differentialregningen et par kapitler længere fremme.

Eksempel 1.22

Rumfanget af en kugle er givet ved formlen $V=\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot r^3$, hvor *r* er kuglens radius. Massen af en genstand med rumfang *V* og massefylde ρ er givet ved $m=\rho\cdot V$. Bestem en forskrift for massen af en jernkugle som funktion af radius. Det oplyses, at massefylden for jern er 7,88 g/cm³.



$$r \xmapsto{\;g\;} V \xmapsto{\;f\;} m$$

Løsning: Vi kan betragte det som sammensætningen af to funktioner, nemlig *f*, som givet en kuglens radius giver dens volumen og funktionen *g*, som givet volumen giver massen: $f(V)=7{,}88\cdot V$ og $g(r)=\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot r^3$. Vi underforstår her radius regnet i cm, rumfanget i cm³ og massen i gram. Da radius må være positiv, har vi definitionsmængden R^+. Vi har nu:

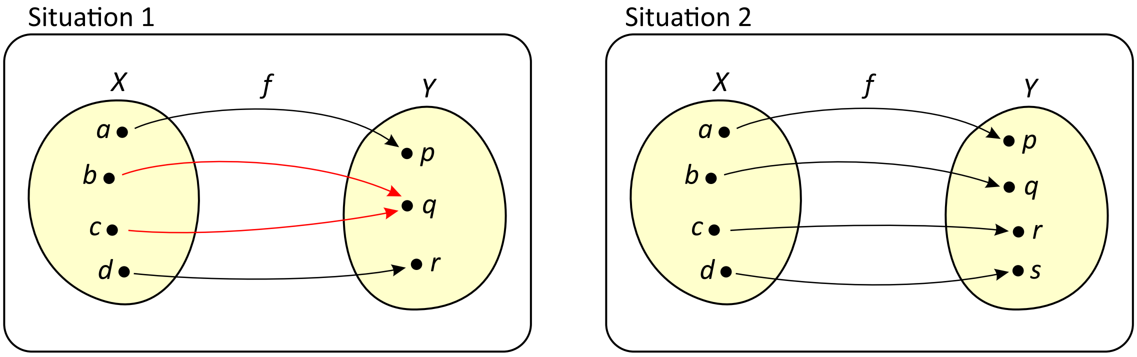
$$(f\circ g)(r)=f(g(r))=7{,}88\cdot(\tfrac{4}{3}\cdot\pi\cdot r^3)=33{,}0\cdot r^3$$

□

Invers funktion

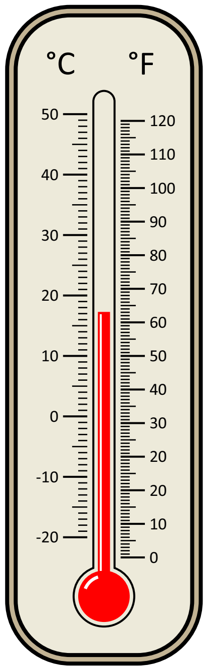
Den sidste ting, vi skal kigge på i dette afsnit er begrebet en *omvendt* eller en *invers* funktion til en given funktion. Idéen er, at man i visse tilfælde gerne vil kunne "ophæve virkningen" af en funktion *f* ved efterfølgende at anvende den omvendte funktion, som betegnes f^{-1}, således at man kommer tilbage til udgangspunktet. Hvis funktionen for eksempel svarer til at gange med 5, dvs. $f(x)=5x$, så vil det omvendte være at dividere med

5, så $f^{-1}(x) = \frac{1}{5}x$. Men lad os se lidt mere abstrakt på sagen. Hvis vi skal gøre os forhåbninger om at finde en invers funktion, kan vi ikke have situation 1 vist på venstre del af figuren nedenfor. Hvis funktionen afbilder to tal b og c i det samme tal q, så skulle en eventuel invers funktion afbilde q i både b og c. Men så har vi ikke at gøre med en funktion! Derfor må vi nødvendigvis kræve situation 2, hvor hvert tal i definitionsmængden for f afbildes i *forskellige* tal i Y. Det er det samme, som vi udtrykte matematisk i (1) side 20. Funktionen skal altså være *injektiv*.



Eksempel 1.23

I USA anvendes oftest Fahrenheit-skalaen til at angive temperaturer, mens man i det meste af Europa bruger Celsius-skalaen. Man kan oversætte temperaturer angivet i Celsius-skalaen til Fahrenheit via følgende funktion: $f(x) = 1{,}8x + 32$. Spørgsmålet er, hvordan man omregner temperaturer den anden vej? Svaret fås ved at bestemme den inverse funktion til f. Vi lader:



x : Temperaturen i °C
y : Temperaturen i °F

Metoden er at isolere x i forskriften: $y = 1{,}8x + 32 \;\Leftrightarrow\; \dfrac{y-32}{1{,}8} = x$.

Dermed har vi $f^{-1}(y) = \dfrac{y-32}{1{,}8}$.

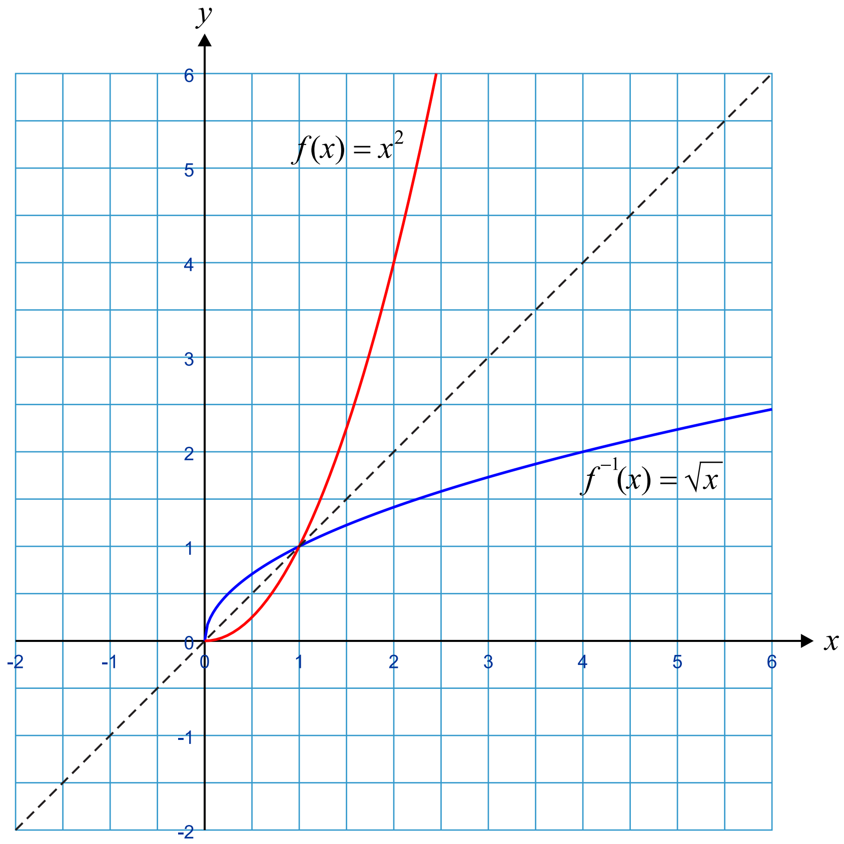
Ifølge Bemærkning 1.13 er det underordnet, hvad vi kalder variablen, så man kan lige så godt angive den som: $f^{-1}(x) = \dfrac{x-32}{1{,}8}$.

□

Eksempel 1.24

Vi er vant til, at når vi bruger lommeregneren, så er det omvendte af at opløfte til anden potens via tasten $\boxed{x^2}$, at uddrage kvadratroden via tasten $\boxed{\sqrt{x}}$, men der er en problematik her. Funktionen $f(x) = x^2$ er nemlig ikke injektiv. Et tal og dets tilsvarende negative tal giver nemlig det samme, når man opløfter. Således er $2^2 = (-2)^2 = 4$. Hvis vi imidlertid indskrænker definitionsmængden for f til $\left[0,\infty\right[$, så er alt fint, og f er injektiv.

Bemærk en anden ting: Grafen for den inverse funktion fås ved at spejle grafen for den oprindelige funktion i linjen $y = x$. Dette gælder for alle funktioner!



□

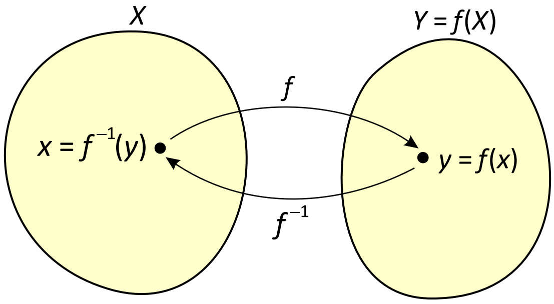
Bemærkning 1.25

Hvis X rammer hele Y under funktionen f, dvs. hvis $f(X) = Y$ og f i øvrigt er injektiv, så siges afbildningen f at være *bijektiv* eller en *bijektion*. Det betyder, at elementerne så at sige er "parret to og to" gennem f. Vi har dermed:

(5) $$f^{-1}(f(x)) = x \text{ for alle } x \in X$$

(6) $$f(f^{-1}(y)) = y \text{ for alle } y \in Y$$

Udtrykt på en anden måde: De sammensatte funktioner $f^{-1} \circ f$ og $f \circ f^{-1}$ er identiteter på henholdsvis X og Y, dvs. de afbilder et tal i sig selv. I eksempel 1.24 ovenfor bliver dette til $\sqrt{x^2} = x$ for alle $x \in [0,\infty[$ og $(\sqrt{x})^2 = x$ for alle $x \in [0,\infty[$.



□

1.6 Grænseværdi og kontinuitet


Augustin Louis Cauchy (1789-1857)

Ligesom al anden forskning, så udvikler den matematiske forskning sig heller ikke ad perfekte lige veje. Nogle teorier går i glemmebogen, fordi de med tiden viser sig ufrugtbare. Andre teorier tilpasses eller tilrettes af andre, fordi man finder bedre, mere logiske og stringente måder at forklare tingene på. I matematikbøger til undervisning bliver man således som oftest præsenteret for finpudsede teoriopbygninger, der har stået deres prøve i årtier eller århundreder. En række prominente matematikere havde i 1600-tallet og 1700-tallet arbejdet med at beregne tangenter til forskellige kurver. Hertil opfandt man blandt andet metoder til at regne med "uendeligt små størrelser". De forskellige metoder fungerede, når man anvendte dem i praksis, men grundlaget var tvivlsomt. Ifølge [1] udtrykte den franske matematiker d'Alembert det således (oversat):

Indtil nu har man beskæftiget sig mere med at udvide bygningsværket end med at oplyse indgangsdøren; med at bygge det højere i stedet for at styrke fundamentet.

Især den franske matematiker *August Louis Cauchy* (1789-1857) satte sig for at give den gryende differentialregning et solidt fundament via grænseværdibegrebet. I 1821, mens Cauchy var professor på det berømte *L'École Polytecnique* beliggende tæt ved Paris, udgav han en lærebog, som vandt stor udbredelse. Cauchy, som levede i en tumultagtig periode efter den franske revolution, var uddannet ingeniør, men blev efterhånden mere og mere tiltrukket af den rene og abstrakte matematik.

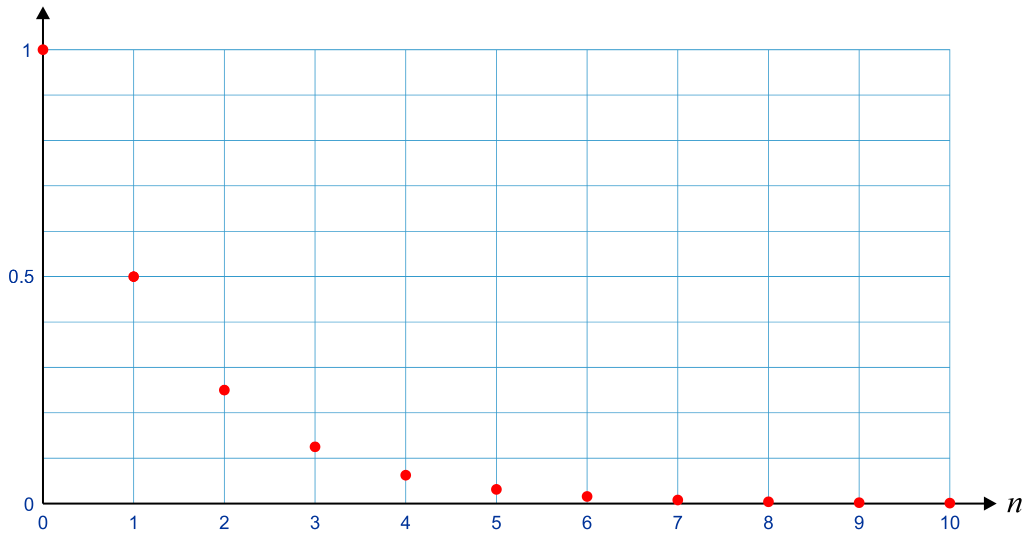
Med disse ord vil vi vende os mod grænseværdibegrebet. Først i kapitlet *Differentialregning* vil vi dog for alvor se rækkevidden af dette begreb.

Uendelige talfølger

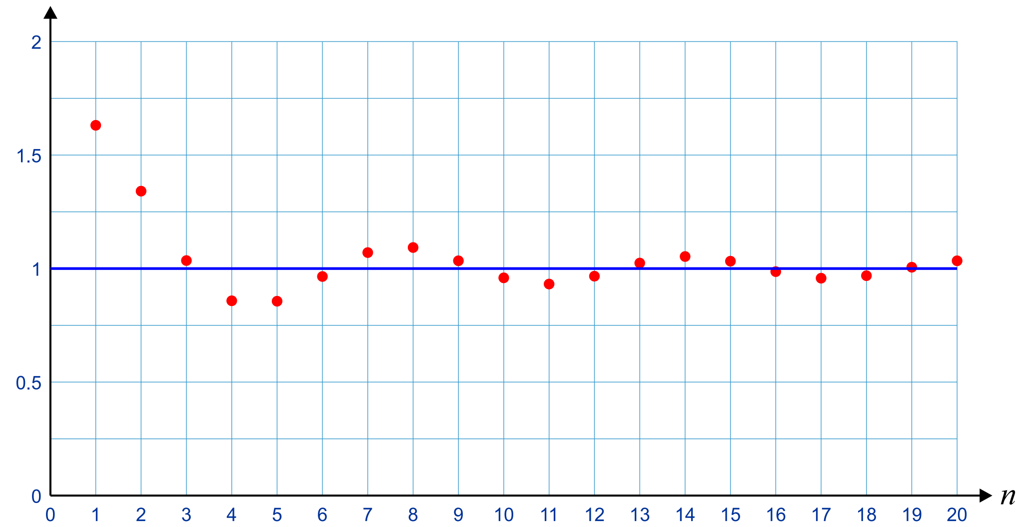
Talfølger er som ordet siger en følge af tal. Det interessante i den forbindelse er hvorvidt tallene nærmer sig til et tal eller ej, altså har en grænseværdi. Lad os for eksempel kigge på følgende uendelige talfølge:

(7) $$1,\ \tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{4},\ \tfrac{1}{8},\ \tfrac{1}{16},\ \ldots,\ \left(\tfrac{1}{2}\right)^n, \ldots$$

Det er ikke svært at se systemet: Det næste element er halvt så stort som det forrige. Vi kan afbilde situationen i et koordinatsystem, som vist på næste side.



Vi ser at tallene bliver mindre og mindre og at tallene kommer vilkårligt tæt på 0. Det er derfor naturligt, at vi må forlange af grænseværdibegrebet, at grænseværdien af talfølgen skal være 0. Situationen er dog lidt mere tvivlsom i tilfældet med talfølgen afbildet her:



Godt nok er "hovedtendensen", at tallene i følgen nærmer sig 1, når n bliver større og større, men man kan se elementer længere ude i følgen, der er længere væk fra 1 end visse elementer tidligere i følgen. I øvrigt kan den sidste talfølge skrives som:

(8) $$\left\{1+\frac{3\cdot\sin(n)}{4n}\right\}_{n\in N}$$

Det sidste er ikke så vigtigt her. Meningen var blot at problematisere, at grænseværdibegrebet ikke er helt så enkelt, som man skulle tro. Definitionen af grænseværdi skal nemlig kunne tage højde for alle mulige tænkelige talfølger på en meningsfuld måde. Selve definitionen af grænseværdi vil vi imidlertid springe over, da det ligger i den mere tekniske ende, og fordi vi som regel kan klare os med den mere intuitive fornemmelse af hvad det vil sige at en følge af tal nærmer sig til et bestemt tal eller eventuelt til ∞ (uendelig). Den mere avancerede og interesserede læser kan studere en præcis definition i opgave 142.

Det kan røbes, at med det eksisterende grænseværdibegreb for en talfølge har talfølgen (8) virkelig en grænse, og at den er 1. Hvis vi kalder det *n*'te element i talfølgen for a_n, kan vi udtrykke at grænseværdien er 1 på følgende måde:

(9) $$a_n \to 1 \text{ for } n \to \infty$$

Det læses: "a_n går mod 1 for *n* gående imod uendelig". En alternativ måde er:

(10) $$\lim_{n\to\infty} a_n = 1$$

som læses "Grænseværdien for a_n, for *n* gående mod uendelig, er 1". Betegnelsen "lim" kommer af det latinske "limes", som betyder "grænse".

Uendelige rækker

Der er også et begreb, som kaldes en *uendelig række*. Vi skal kun kommentere det flygtigt. En uendelig række ser således ud:

(11) $$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$

Der er anvendt det store græske bogstav Sigma, som i denne sammenhæng kaldes for et *summationstegn*. Venstresiden er blot en kort skrivemåde for det, der står på højre side: man *summerer* alle *a*'erne med indices fra 1 og fremefter. Man plejer kun at skrive de første elementer, hvorefter tre punktummer indikerer, at sådan fortsætter det. Nogle gange vil man lige anføre det *n*'te element. Men hvordan skal grænseværdi forstås her? Svaret er, at man vælger at gøre brug af det grænseværdibegreb, som vi antager allerede er kendt fra uendelige talfølger. Betragt den række, som er (11) afskåret efter det *k*'te element:

(12) $$s_k = \sum_{n=1}^{k} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_k$$

For hver værdi af *k*, vil den give et tal, som man kan regne ud. Der er ingen problemer, fordi der er tale om en *endelig* række. Vi kan nu betragte talfølgen af alle disse tal, som også betegnes *afsnitsfølgen*:

(13) $$\{s_k\}_{k \in N}$$

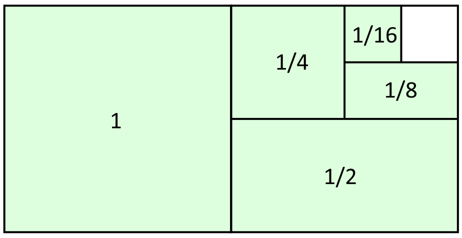
Man definerer da, at den oprindelige uendelige række har en grænseværdi (kaldes at rækken er *konvergent*) hvis og kun hvis afsnitsfølgen (13) har en grænseværdi. Den uendelige rækkes grænseværdi er i så fald afsnitsfølgens grænseværdi.

Eksempel 1.26

Man kunne måske tro, at når man lægger uendelig mange tal sammen, så får man noget uendeligt stort. Det behøver ikke være tilfældet. Betragt den uendelige række:

(14) $$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\tfrac{1}{2}\right)^n = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \ldots + \left(\tfrac{1}{2}\right)^n + \ldots$$

I dette tilfælde kan vi bruge et smart geometrisk argument med henblik på at vise, at rækken er konvergent med værdien 2. Ifølge (12) og (13) skal vi se på afsnitsfølger: Den første afsnitsfølge er 1, den næste $1+\frac{1}{2}$, den næste $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$, den næste $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$ osv. Vi kan tænke på det som kvadratiske lagkager: En person tager hele den første lagkage, den anden tager halvdelen af den næste, den tredje tager halvdelen af hvad, der er tilbage, etc. Det er her oplagt, at jo flere der tager et stykke lagkage, jo mindre vil der være tilbage af lagkage nummer 2. Faktisk vil det, der er tilbage, nærmer sig til 0, når antallet af personer går mod uendelig.



Dermed har vi vist, at $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 2$.

□

Det er langt fra altid, at det går så nemt som i eksempel 1.26. Faktisk udgør teorien om de uendelige rækker en fascinerende og eksotisk verden. Som et eksempel gælder:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \tag{15}$$

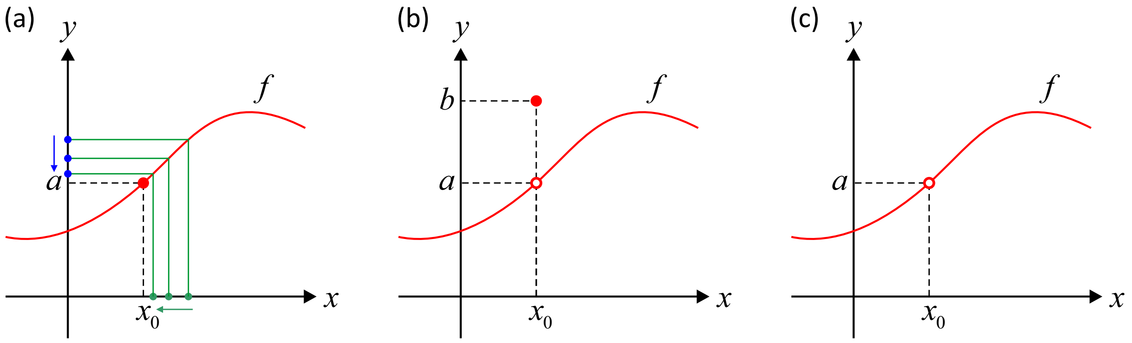
Tallet π dukker op på mystisk vis her. Det er svært at vise (15), så vi holder os langt væk fra det. I princippet kan (15) bruges til at bestemme tallet π, men da *konvergenshastigheden* er ret langsom, er det ikke den bedste formel til det. Der skal simpelthen for mange led på i rækken til at man kommer tilstrækkelig tæt på π. Teorien om uendelige rækker kan også bruges til at afsløre pointen i et gammelt filosofisk paradoks: *Zenons paradoks: Achilleus og skildpadden*. Se opgave 143. Langt fra alle rækker er konvergente. De kaldes *divergente*. Vi ser på det i opgave 147.

Funktioner

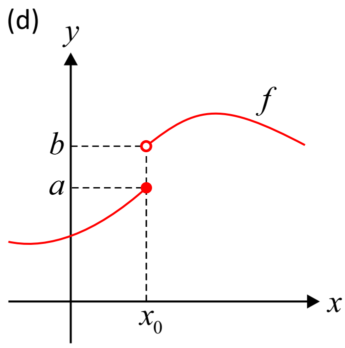
Vi er kommet til grænseværdier for funktioner. I princippet kan en talfølge også betragtes som en funktion defineret på de naturlige tal (evt. inklusiv 0), men nu skal vi kigge på reelle funktioner, hvis definitionsmængder indeholder passende intervaller som delmængder. Hvor vi med talfølger kun var i stand til at tale om grænseværdier, når n går mod uendelig, så bliver det med funktioner nu også muligt at undersøge eventuelle grænseværdier, når den variable x går mod et fast tal x_0. Vi starter med sidstnævnte. Igen vil vi behandle emnet grænseværdi på et intuitivt plan, da de præcise definitioner er noget tekniske. Den avancerede læser henvises til Tema A. Vi lader x nærme sig til tallet x_0 og ser, hvad der sker med de tilhørende funktionsværdier. Situationen er vist på figur (a) på næste side. Tre x-værdier er angivet med grønne prikker på x-aksen og de tilhørende y-værdier er vist med blå prikker på y-aksen. Vi ser, at y-værdierne kommer vilkårligt tæt på tallet a, bare vi vælger x-værdierne tilstrækkelig tæt på x_0. Det samme vil ske, hvis vi vælger at nærme os til x_0 fra venstre. Vi siger da, at "$f(x)$ går mod a for x gående mod x_0", hvilket matematisk skrives på én af to måder:

(16) $$f(x) \to a \quad \text{for} \quad x \to x_0 \qquad \text{eller} \qquad \lim_{x \to x_0} f(x) = a$$

Hvad nu hvis grafen for en funktion "foretager et hop" i x_0, som illustreret på figur (b)? Funktionsværdien i x_0 er her b. Grafen er ikke længere sammenhængende omkring x_0. Svaret er, at f stadig har grænseværdien a for $x \to x_0$, for man interesserer sig ikke for, hvad der sker i selve det punkt, som x nærmer sig til. Derfor er det samme også tilfældet i situationen på figur (c), hvor f slet ikke er defineret i x_0.



Hvad hvis grænseværdierne er forskellige, når x nærmer sig fra højre og fra venstre, som illustreret på figur (d)? Vi kan skrive det ved at tilføje et +, hvis man nærmer sig fra højre og et minus, hvis man nærmer sig fra venstre:



$$f(x) \to b \quad \text{for} \quad x \to x_0^+$$
$$f(x) \to a \quad \text{for} \quad x \to x_0^-$$

Svaret er her, at f *ikke* har en grænseværdi i dette tilfælde. For at f skal have en grænseværdi for x gående imod x_0, skal grænseværdierne fra højre og venstre være ens! Disse forklaringer giver en god basis for at kunne argumentere og regne opgaver fremover. Man skal dog være opmærksom på, at det stadig er løse definitioner. For at kunne håndtere alle funktioner på en meningsfuld måde, må man ty til de præcise definitioner (se opgave 153*). Der findes så mange "vilde" funktioner, som kan skabe tvivl. Et eksempel på en "vild" funktion er denne givet ved en "gaffelforskrift":

(17) $$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x \text{ rational} \\ 1 & \text{for } x \text{ irrational} \end{cases}$$

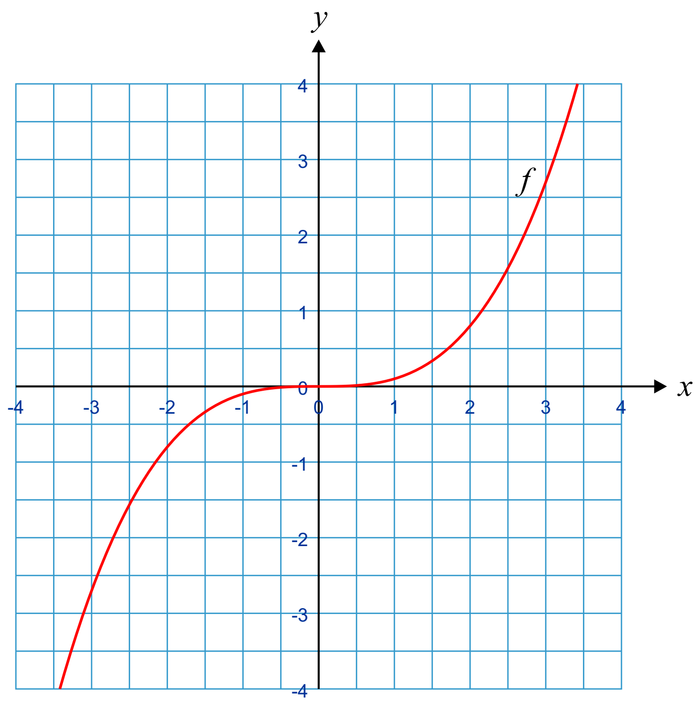
Funktionsværdien er altså 0, hvis x er et rationalt tal, mens funktionsværdien er 1, hvis x er et irrationalt tal. Da mængden af rationale tal ligger tæt i mængden af reelle tal (se opgave 108), vil funktionsværdien ustandseligt skifte mellem 0 og 1, "når man går en tur fra venstre mod højre på x-aksen". Det vil i praksis være umuligt at tegne grafen.

Man kan også have funktioner, der går mod uendelig eller minus uendelig, enten når x selv går mod uendelig eller minus uendelig (som i eksemplet nedenfor). eller hvis x går mod et fast tal x_0. Det sidste ser vi på, når vi kommer til emnet asymptoter i næste afsnit.

Eksempel 1.27

Vi ser her på funktionen givet ved $f(x) = \frac{1}{10} \cdot x^3$. Det er ret oplagt, at y-værdierne bliver vilkårligt store, bare vi vælger x-værdierne store nok. På tilsvarende vis er det ret oplagt, at y-værdierne bliver vilkårligt store negative, bare man vælger x-værdierne tilstrækkelig store negative. Vi skriver:

$$f(x) \to \infty \quad \text{for} \quad x \to \infty$$
$$f(x) \to -\infty \quad \text{for} \quad x \to -\infty$$



□

Stadig skal det noteres, at der er brug for en præcis matematisk definition, for der findes tilfælde, hvor tingene ikke er så oplagte som i eksempel 1.27. Vi undlader det her.

Regneregler for grænseværdier

Heldigvis gælder der smukke regneregler for grænseværdier, og dem skal vi fremover gøre stor brug af. Hvis man for eksempel ved, at to funktioner f og g hver især har en grænseværdi for x gående imod et bestemt tal x_0, så vil sumfunktionen $f + g$ også have en grænseværdi for x gående imod x_0, og denne grænseværdi er summen af grænseværdierne for hver af funktionerne. Noget helt tilsvarende gælder, når man foretager andre operationer på funktioner (se afsnit 1.5). Der gælder følgende sætning, som vi vil undlade at bevise, da det er noget teknisk:

Sætning 1.28

Antag at funktionen *f* har grænseværdien *a*, når *x* går mod x_0, samt at funktionen *g* har grænseværdien *b*, når *x* går mod x_0. Da har hver af funktionerne $f+g$, $f-g$ og $f\cdot g$ også en grænseværdi for *x* gående mod x_0, givet ved de tre første regler nedenfor. Hvis $b \neq 0$ har også f/g en grænseværdi, nemlig den givet ved regel 4.

1) $\lim\limits_{x\to x_0}(f+g)(x) \;=\; a+b$ 2) $\lim\limits_{x\to x_0}(f-g)(x) \;=\; a-b$

3) $\lim\limits_{x\to x_0}(f\cdot g)(x) \;=\; a\cdot b$ 4) $\lim\limits_{x\to x_0}\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) \;=\; \dfrac{a}{b}$, forudsat $b \neq 0$

Eksempel 1.29

Vi ønsker at undersøge følgende funktion for en eventuel grænseværdi, når $x \to 2$:

$$h(x) = \frac{2x^2-5}{x+7}$$

Sæt $f(x) = 2$ og $g(x) = x^2$. Den konstante funktion *f* har naturligvis 2 som grænseværdi, dvs. $f(x) \to 2$ for $x \to 2$. Det er ret oplagt, at $g(x) \to 4$ for $x \to 2$. Herefter kan vi bruge regel 3) i sætning 1.28 til at konkludere, at $(f\cdot g)(x) = 2x^2 \to 2\cdot 4 = 8$ for $x \to 2$. Vi kan fortsætte på lignende måde, idet tælleren kan betragtes som en differens af de to funktioner $x \mapsto 2x^2$ og $x \mapsto 5$. Regel 2) giver os da, at $2x^2-5 \to 8-5 = 3$ for $x \to 2$. Tilsvarende kan man bruge regel 1) til at vise, at nævneren $x+7 \to 2+7 = 9$ for $x \to 2$. Da nævneren ikke har grænseværdi 0, kan vi endelig benytte regel 4) til at konkludere, at

$$\lim_{x\to x_0}\left(\frac{2x^2-5}{x+7}\right) \;=\; \frac{3}{9} \;=\; \tfrac{1}{3}$$

Nogle vil muligvis indvende, at vi jo bare kunne have indsat $x = 2$ i forskriften for *h* for at finde grænseværdien. Ja, det kunne vi faktisk her. Årsagen skal findes i begrebet *kontinuitet*, som bliver det næste punkt, vi skal studere.

□

Eksempel 1.30

Lad os undersøge funktionen $f(x) \;=\; (x^2-1)/(2x-2)$ for *x* gående imod 1. Tæller og nævner går hver for sig begge mod 0 for $x \to 1$. Dermed kan vi ikke bruge sætning 1.28 regel 4). Heldigvis kan man faktorisere brøken først:

$$\frac{x^2-1}{2x-2} \;=\; \frac{(x+1)\cdot(x-1)}{2\cdot(x-1)} \;=\; \tfrac{1}{2}(x+1)\,,\quad x \neq 1$$

Dermed er det nemt at se, at $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \tfrac{1}{2}(1+1) = 1$.

□

Kontinuitet

Begrebet *kontinuitet* er helt centralt i analysen af funktioner. Vi kommer også til at stifte mere bekendtskab med det, når vi kommer til differentialregningen.

Definition 1.31 (Kontinuitet)

En funktion *f* siges at være *kontinuert* i punktet x_0, såfremt der gælder:

(18) $$f(x) \to f(x_0) \quad \text{for} \quad x \to x_0$$

Hvis funktionen er kontinuert i ethvert punkt i dens definitionsmængde siger vi blot, at *f* er kontinuert.

Det at *f* er kontinuert i punktet x_0 er altså stærkere end at funktionen bare har en grænseværdi for $x \to x_0$. Funktionen skal nemlig tillige være defineret i punktet x_0 og grænseværdien skal være $f(x_0)$. Side 33 blev det nævnt, at *f* har en grænseværdi i hver af de tre situationer givet på figurerne (a), (b) og (c), mens *f* ikke havde nogen grænseværdi i situationen givet på figur (d). I hvilke af de fire situationer er *f* da kontinuert i x_0? Svaret er, at det kun er tilfældet i (a)! På figur (b) har funktionen godt nok en grænseværdi, men den er ikke den rigtige: $a \neq f(x_0)$. På figur (c) er *f* slet ikke defineret i x_0.

Lidt løst plejer man at karakterisere en kontinuert funktion defineret på et interval ved, at *grafen er sammenhængende* i dette interval. I tilfældet med funktionen $f(x) = 1/x$ i eksempel 1.10 er funktionen defineret i alle punkter på nær $x = 0$. Funktionen er kontinuert, og vi ser da også, at grafen er sammenhængende i hver af de to intervaller, hvor funktionen er defineret: $]-\infty, 0[$ og $]0, \infty[$, Man kan vise, at langt de fleste funktioner, som vi beskæftiger os med, er kontinuerte. Det gælder for eksempel for de velkendte funktioner $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\tan(x)$, e^x, a^x, $\log(x)$, $\ln(x)$, $\sqrt{x}$, x^a samt polynomier. Og laver vi nye funktioner ud fra dem ved at lægge sammen, trække fra, gange eller dividere, så får vi igen kontinuerte funktioner. Det fremgår nemlig ret let af sætning 1.28, at vi har:

Sætning 1.32

Hvis funktionerne *f* og *g* er kontinuerte i punktet x_0, så gælder det samme for funktionerne $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$, og hvis $g(x_0) \neq 0$, så er også f/g kontinuert i x_0.

Der gælder endda:

Sætning 1.33

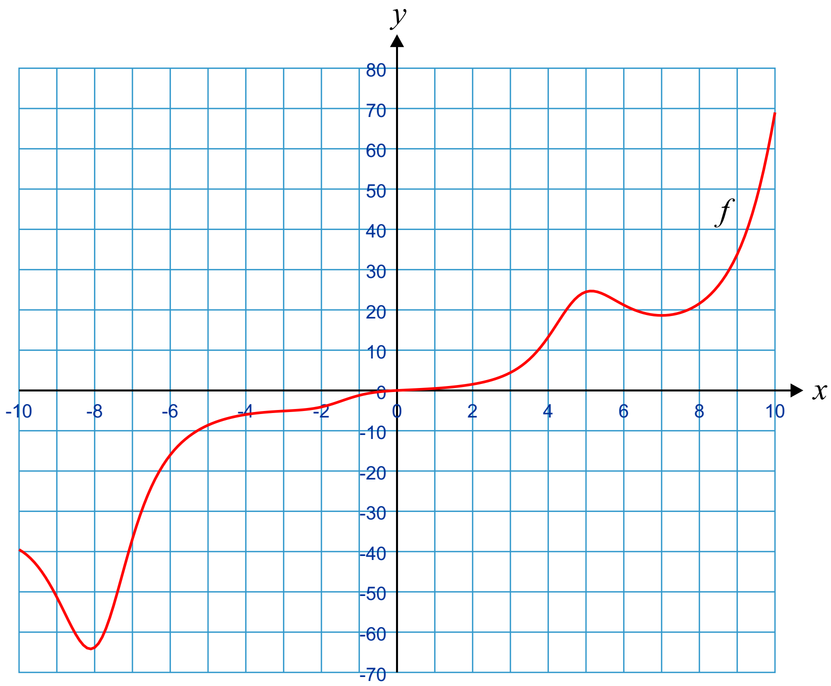
Hvis funktionen *f* er kontinuert i x_0, og funktionen *g* er kontinuert i $g(x_0)$, så er den sammensatte funktion $f \circ g$ kontinuert i x_0.

Eksempel 1.34

Vores viden om, at de basale funktioner er kontinuerte, giver os – via sætning 1.32 og sætning 1.33 – automatisk, at en hel masse andre funktioner også er kontinuerte, uden at vi behøver vise det særskilt for hver enkelt tilfælde. Det er styrken ved sætninger som 1.32 og 1.33. Et eksempel er den lidt skøre funktion:

$$f(x) = \frac{x \cdot \sqrt{x^2+1}}{\sin(x)+2}\ ,\ x \in [-10,10]$$

Her er både sammensat funktion, plusreglen, gangereglen og divisionsreglen i spil. I princippet kunne man indsætte et hvilket som helst reelt tal i funktionsudtrykket, da udtrykket under kvadratrodstegnet er mindst 1 og nævneren aldrig bliver 0 – eftersom sinus jo altid antager værdier mellem –1 og 1. Vi har dog indskrænket til intervallet $[-10,10]$. Vi ser, at grafen er fint sammenhængende i intervallet!



□

Der findes naturligvis også funktioner, som ikke er kontinuerte. Man kan nemt lave en gaffelforskrift, som giver anledning til en graf, som foretager et "spring" i et punkt. findes endda funktioner, som ikke er kontinuerte i et eneste punkt. Et eksempel er den "vilde" funktion (17) side 33!

Som bekendt bruges symbolet Δ ofte i forbindelse med *tilvækster*, som i øvrigt gerne må være negative. Med tilvæksten i x mener vi $\Delta x = x - x_0$ og med tilvæksten i funktionsværdi mener vi $\Delta f = f(x) - f(x_0)$. Definitionen af begrebet kontinuitet kan dermed alternativt til (18) formuleres således:

(19) $$\Delta f \to 0 \ \text{ for } \ \Delta x \to 0$$

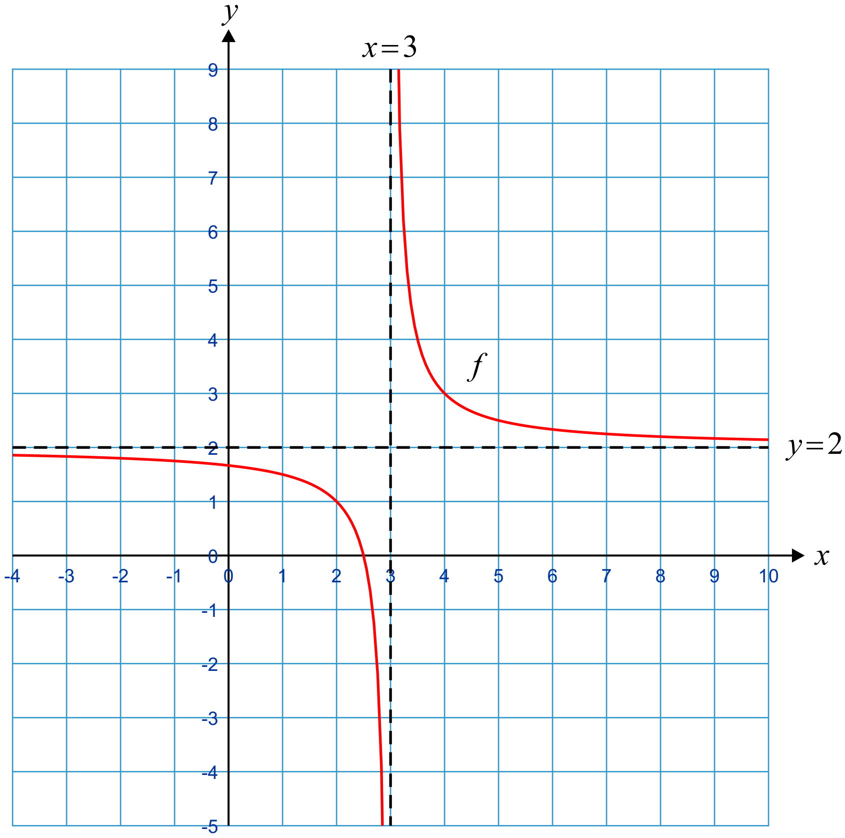
Vi slutter emnet kontinuitet her.

1.7 Asymptoter

Det sidste emne i dette kapitel er *asymptoter*. Nogle funktioner har en graf, som har en eller flere asymptoter. Viden om dem kan bruges til at fastlægge grafens forløb nøjere. Begrebet forklares nemmest gennem et par eksempler. Når vi på et senere tidspunkt skal foretage funktionsundersøgelser, vil asymptoter være et nyttigt redskab.

Eksempel 1.35

Betragt funktionen $f(x) = \dfrac{1}{x-3} + 2$, $x \neq 3$, hvis graf ser således ud:



For det første indser vi, at funktionen ikke er defineret i $x = 3$, fordi nævneren giver 0 i dette punkt. Så $Dm(f) = R \setminus \{3\}$. Det er ofte interessant at undersøge funktioner i nærheden af punkter, hvor en nævner giver 0. Vi vil undersøge, hvad der sker med funktionsværdierne, når x nærmer sig til 3 både fra venstre og højre. Hvis vi kommer fra *højre*, vil nævneren $x-3$ nærme sig til 0, men i øvrig hele tiden være positiv. Hele brøken vil derfor nærme sig til $+\infty$. Tallet 2 gør ingen forskel her. Hvis omvendt x nærmer sig til 3 fra venstre, vil nævneren nærme sig til 0, men hele tiden være negativ. Derfor vil brøken nærme sig til $-\infty$. Vi skriver:

$$f(x) \to \infty \ \text{ for } x \to 3^+ \quad \text{og} \quad f(x) \to -\infty \ \text{ for } x \to 3^- \tag{20}$$

Den første påstand i (20) udtrykkes: "$f(x)$ går mod uendelig for x gående mod 3 fra højre". Tilsvarende med den anden. Vi siger da, at grafen for f har den *lodrette asymptote*

$x = 3$. Det skal tilføjes, at det er nok, at bare én af de to grænser i (20) er opfyldt, for at man vil sige, at der er en lodret asymptote.

Grafen for funktionen har imidlertid også en anden asymptote. Lader vi x nærme sig ∞, vil brøken nærme sig til 0, og dermed vil $f(x)$ nærme sig til 2. Vi siger, at grafen for f har en *vandret asymptote* med ligning $y = 2$. Man kan forklare det ved, at

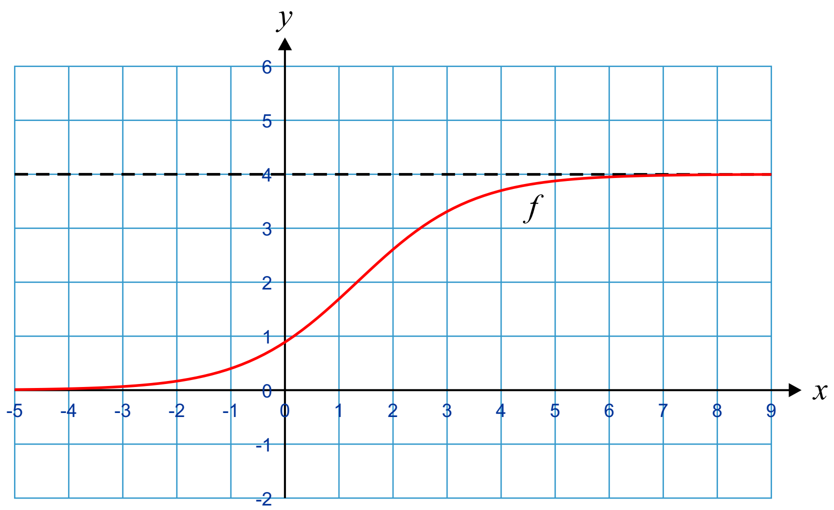
(21) $$|f(x)-2| \to 0 \quad x \to \infty$$

Den numeriske forskel mellem $f(x)$ og 2 går altså mod 0 for x gående imod ∞. Det samme er i øvrigt tilfældet, hvis man lader x nærme sig til $-\infty$. Lidt løst kan man sige, at den vandrette linje med ligning $y = 2$ er en god tilnærmelse til grafen i ± uendelig.

□

Eksempel 1.36

Lad $f(x) = \dfrac{4}{1+3,5\cdot e^{-0.94x}}$. Grafen ser således ud:



Der er tale om en såkaldt *logistisk vækst*, som vi skal stifte bekendtskab med senere. Grafen har, som man kan ane, to vandrette asymptoter, nemlig $y = 0$ og $y = 4$. Lad os argumentere for det uden at kigge på grafen. Funktionen $h(x) = e^{-0,94x}$ kan betragtes som en sammensat funktion. Når $x \to \infty$ vil den indre funktion (eksponenten) gå mod $-\infty$. Derfor vil $h(x) \to 0$ for $x \to \infty$. Nævneren vil derfor nærme sig til 1 for $x \to \infty$, hvorfor hele funktionen vil opfylde:

(22) $$f(x) \to 4 \ \text{ for } x \to \infty$$

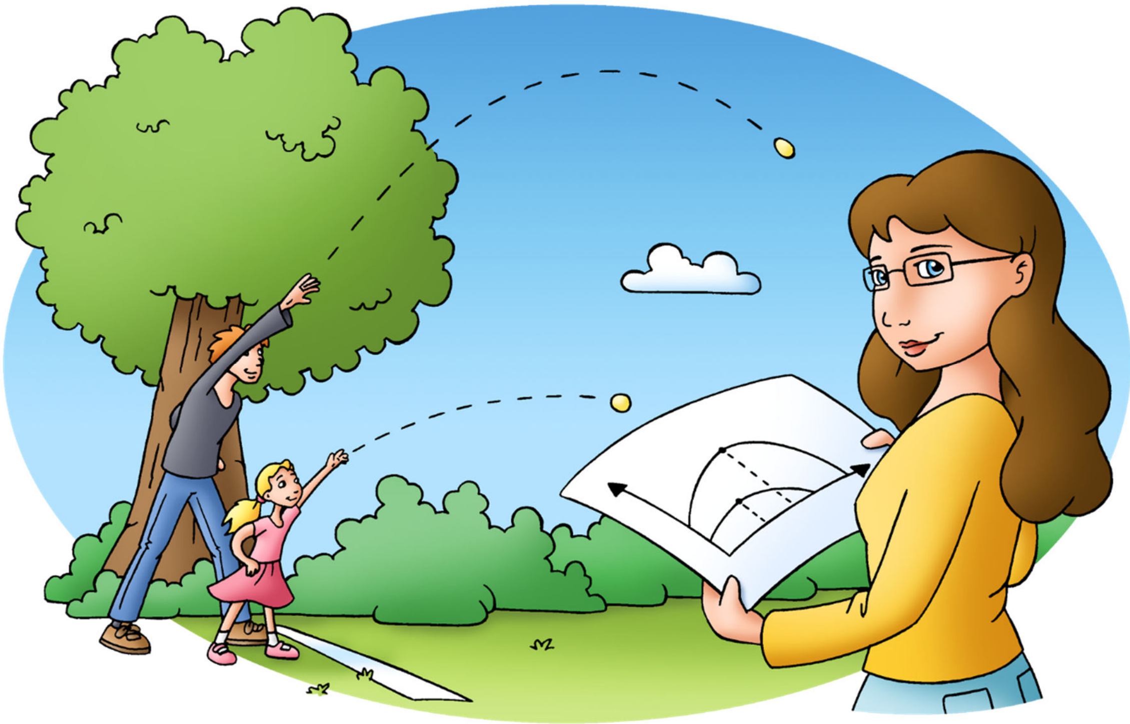
Dermed er $y = 4$ en vandret asymptote. Hvis vi i stedet lader $x \to -\infty$ vil $h(x) \to \infty$. Det samme er tilfældet med nævneren. Derfor vil hele funktionen opfylde:

(23) $$f(x) \to 0 \ \text{ for } x \to -\infty$$

hvilket viser, at $y = 0$ er en vandret asymptote.

□

2. Polynomier



2.1 Andengradspolynomier og deres grafer

Polynomier har altid spille en stor rolle i matematikken. Andengradsligninger blev løst helt tilbage til de første civilisationer: *Babylonerne*. Her har man gennem kileskrifter på lertavler vidnesbyrd om, at andengradsproblemer blev løst. Mere om det kan findes i [6] og [7]. Grafen for et andengradspolynomium er en såkaldt *parabel*. Den forekommer også som et af flere såkaldte *keglesnit*, som allerede blev studeret af de gamle grækere, særlig ved *Apollonius af Perga* (262 f.Kr.–190f.Kr.). Derudover dukker andengradspolynomier op i et utal af uventede sammenhænge. Et eksempel er i denne e-bogs tema A om *det gyldne snit*. Det er med andre ord vigtigt at kende til andengradspolynomier. Vi starter med at udlede nogle egenskaber for disse polynomier i en moderne kontekst. Derefter vil vi se på anvendelser.

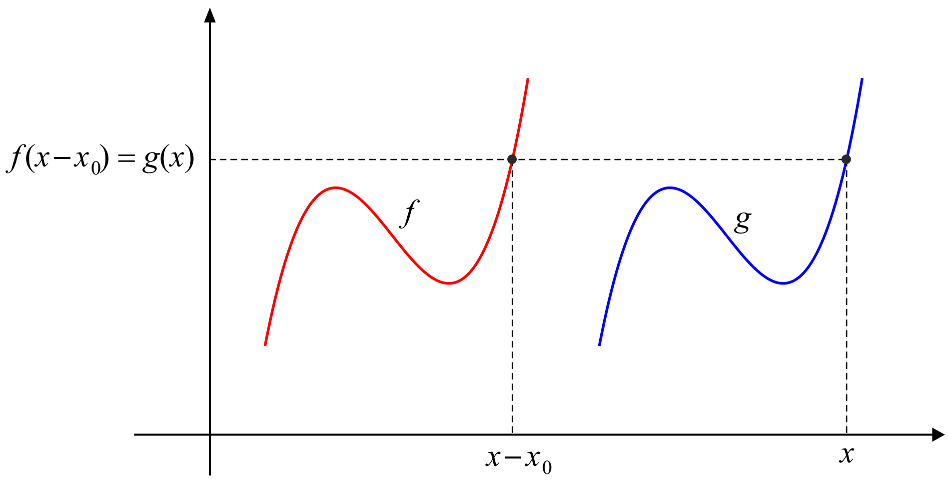
Parallelforskydning af grafer

Vi får brug for et par generelle hjælpesætninger, før vi går i gang med at udlede egenskaber for andengradspolynomier og deres grafer.

Sætning 2.1

Parallelforskydes grafen for en funktion f med x_0 i x-aksens retning, så fås grafen for funktionen $g(x)=f(x-x_0)$. Forskriften for g fås altså ved at udskifte alle forekomster af x med $x-x_0$.

Bevis: Den blå graf er en parallelforskydning af den røde graf på figuren nedenfor. Spørgsmålet er hvilken forskrift, der giver den blå kurve som graf. Vi skal fortælle, hvilken værdi g skal have i ethvert x. Men det er nemt, for vi kan jo bare "hente" y-værdien fra den oprindelige graf: g skal have samme funktionsværdi i x, som f har i $x-x_0$. Det kan udtrykkes ved $g(x)=f(x-x_0)$.

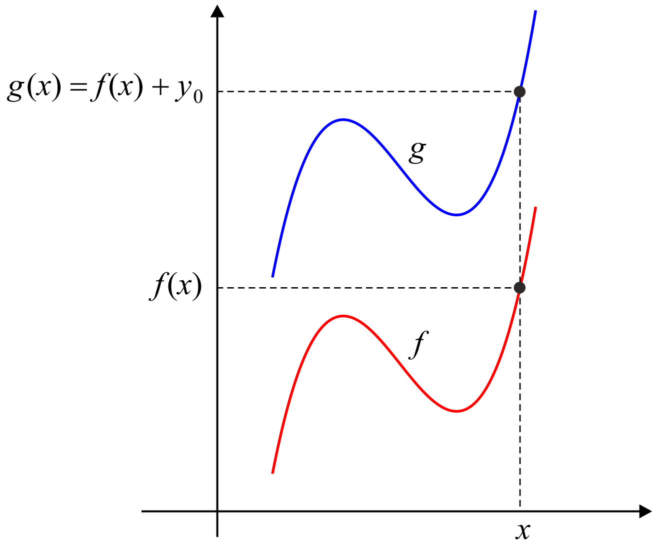


□

Sætning 2.2

Parallelforskydes grafen for en funktion *f* med y_0 i *y*-aksens retning, så fås grafen for funktionen $g(x) = f(x) + y_0$. Forskriften for *g* fås altså ved at lægge y_0 til i forskriften for *f*.

Bevis: Vi får funktionsværdien for *g* i *x* ved at lægge y_0 til funktionsværdien for *f* i det samme punkt. Med andre ord: $g(x) = f(x) + y_0$.



□

Vi kan sammenfatte de to sætninger med parallelforskydning i én:

Sætning 2.3

Parallelforskydes grafen for *f* med vektoren (x_0, y_0), dvs. med x_0 i *x*-aksens retning og med y_0 i *y*-aksens retning, så fås grafen for $g(x) = f(x - x_0) + f(x_0)$. Forskriften for *g* fås altså ved i forskriften for *f* at udskifte alle forekomster af *x* med $x - x_0$ og derefter lægge y_0 til.

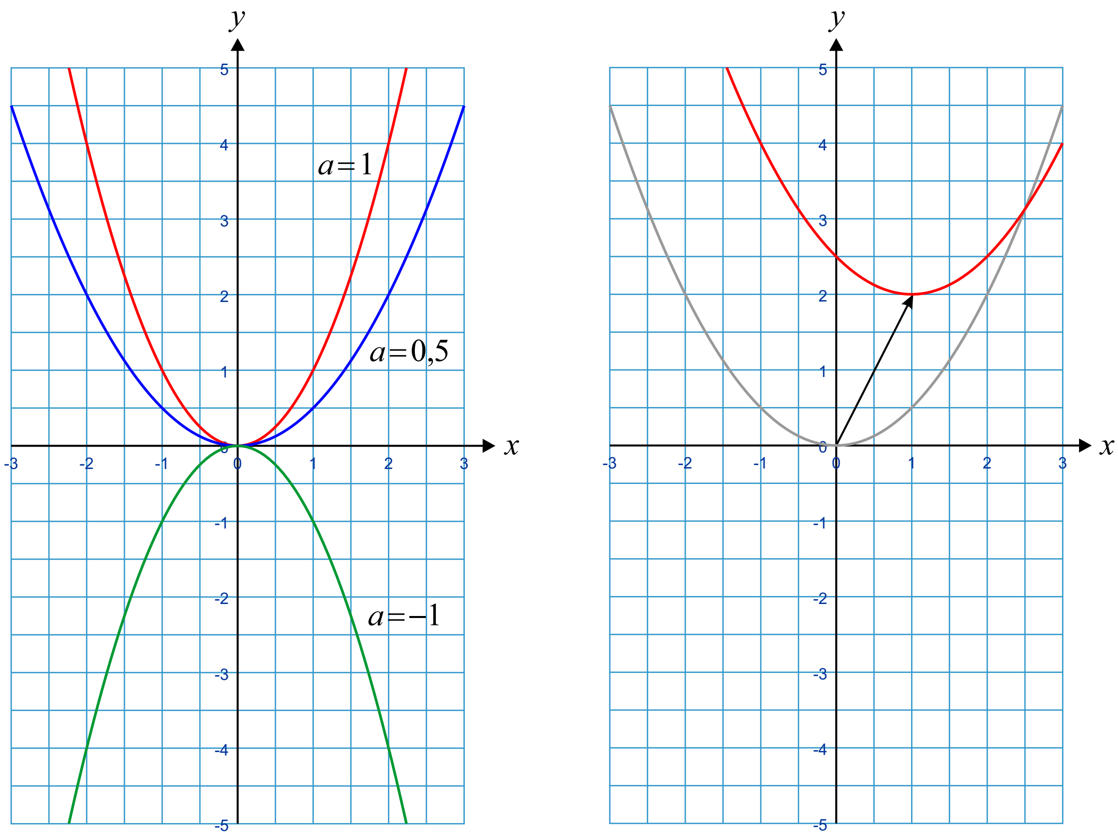
Definition 2.4

Et *andengradspolynomium* er en funktion på formen:

(1) $$P(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c\,, \quad a \neq 0$$

hvor *a*, *b* og *c* er faste reelle tal. Man kalder dem også for *koefficienterne* til henholdsvis 2. gradsleddet, 1. gradsleddet og 0. gradsleddet. Alternativt kan *c* også kaldes *konstantleddet*. Grafen for et andengradspolynomium kaldes en *parabel*.

For at få et indtryk af, hvordan grafen ser ud for forskellige værdier af koefficienterne *a* *b* og *c*, kan man med fordel bruge *GeoGebra* eller et andet CAS-værktøj til at få tegnet en graf, hvor koefficienterne kan varieres med en skyder (se opgave 201). I det efterfølgende vil vi udlede nogle af de ting, som du måske har eksperimenteret dig frem til. Det første vil være at kigge på det *simple* andengradspolynomium $f(x) = a \cdot x^2$, hvor $b = 0$ og $c = 0$. Som graferne på figuren til venstre antyder, vender *parablens grene* opad, når $a > 0$ og nedad, når $a < 0$. Og jo større *a* er numerisk set, jo mere *smal* bliver parablen.



Lad os herefter undersøge, hvad der sker, når vi parallelforskyder grafen for det simple andengradspolynomium. Hvilken forskrift svarer det til. Vi tager først et eksempel, hvorefter vi kigger på det generelt.

Eksempel 2.5

På figuren ovenfor til højre er grafen for $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ tegnet. Vi ønsker at parallelforskyde grafen med vektoren (1,2), dvs. med 1 hen ad *x*-aksen og 2 opad *y*-aksen. Vi bruger sætning 2.4 og får følgende forskrift hørende til den parallelforskudte graf:

$$(2) \qquad g(x) = f(x-1)+2 = \tfrac{1}{2}(x-1)^2+2 = \tfrac{1}{2}(x^2-2x+1)+2 = \tfrac{1}{2}x^2-x+2\tfrac{1}{2}$$

Vi får med andre ord igen et andengradspolynomium, nu med $a = \frac{1}{2}, b = -1$ og $c = 2\frac{1}{2}$.

□

Det store spørgsmål er, om grafen for *ethvert* andengradspolynomium fås som en parallelforskydning af grafen for et simpelt andengradspolynomium. Svaret er bekræftende, som den næste sætning viser.

Sætning 2.6 (Parablens toppunkt)

Lad $g(x) = ax^2 + bx + c$ og størrelsen $d = b^2 - 4ac$ betegne polynomiets såkaldte *diskriminant*. Grafen for g fås da ved at parallelforskyde grafen for det simple andengradspolynomium $f(x) = ax^2$ med vektoren

(3) $$(x_0, y_0) \;=\; \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{d}{4a}\right)$$

Specielt er koordinaterne til toppunktet for grafen for g givet ved (3).

Bevis: Vi starter med at parallelforskyde grafen for $f(x) = ax^2$ med (x_0, y_0), og så først senere afgøre, hvad x_0 og y_0 skal sættes lig med for at grafen for g. Ligesom i eksempel 2.5 bruger vi sætning 2.4 og reducerer:

(4) $$\begin{aligned} g(x) &= f(x-x_0)+y_0 \;=\; a(x-x_0)^2+y_0 \;=\; a(x^2-2x_0x+x_0^2)+y_0 \\ &= ax^2-2ax_0x+ax_0^2+y_0 \;=\; ax^2+(-2ax_0)x+(ax_0^2+y_0) \end{aligned}$$

Husk at det er x, der er den variable, og at x_0 og y_0 skal betragtes som konstanter. g er derfor et andengradspolynomium, hvor koefficienten til 2. gradsleddet er a, koefficienten til 1. gradsleddet er $-2ax_0$ og konstantleddet er $ax_0^2 + y_0$. Vi skal nu afstemme koefficienter. For at $ax^2 + bx + c = ax^2 + (-2ax_0)x + (ax_0^2 + y_0)$ for alle x, må koefficienterne være ens. Koefficienten til 2. gradsleddet passer allerede. Derudover må vi kræve, at

(5) $$-2ax_0 = b \quad \text{og} \quad ax_0^2 + y_0 = c$$

Første ligning giver straks $x_0 = -b/(2a)$. Man isolerer y_0 i den anden ligning og indsætter værdien for x_0 og reducerer:

(6) $$\begin{aligned} y_0 &= c - ax_0^2 \;=\; c - a\cdot\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 \;=\; c - a\cdot\frac{b^2}{4a^2} \;=\; c - \frac{b^2}{4a} \\ &= \frac{4ac}{4a} - \frac{b^2}{4a} \;=\; \frac{4ac-b^2}{4a} \;=\; \frac{-(b^2-4ac)}{4a} \;=\; \frac{-d}{4a} \end{aligned}$$

hvor vi i 5. lighedstegn har forlænget $c = c/1$ med $4a$ i tæller og nævner. I 8. lighedstegn har vi indført størrelsen $d = b^2 - 4ac$, kaldet *diskriminanten*. Alt i alt ser vi, at grafen for $g(x) = ax^2 + bx + c$ fremkommer ved at parallelforskyde grafen for det simple 2. gradspolynomium $f(x) = ax^2$ med vektoren givet ved (3). Påstanden om, at (3) samtidigt altid angiver toppunktet for g's graf (parablen) er herefter en simpel konsekvens af, at toppunktet for grafen for f er (0,0). Under parallelforskydningen vil dette toppunkt nemlig flyttes hen i punktet giver ved koordinatsættet (3).

□

Før vi kigger på et eksempel på brug af sætning 2.6, skal vi vigtig iagttagelse, aom kommer direkte ud af sætning 2.6, og som vi får brug for i et senere afsnit, hvor vi skal løse andengradsligninger.

Bemærkning 2.7

Indsættes udtrykkene for x_0 og y_0 fra sætning 2.6 i $g(x) = f(x - x_0) + y_0$, kan vi se, at et generelt andengradspolynomium kan skrives på følgende måde:

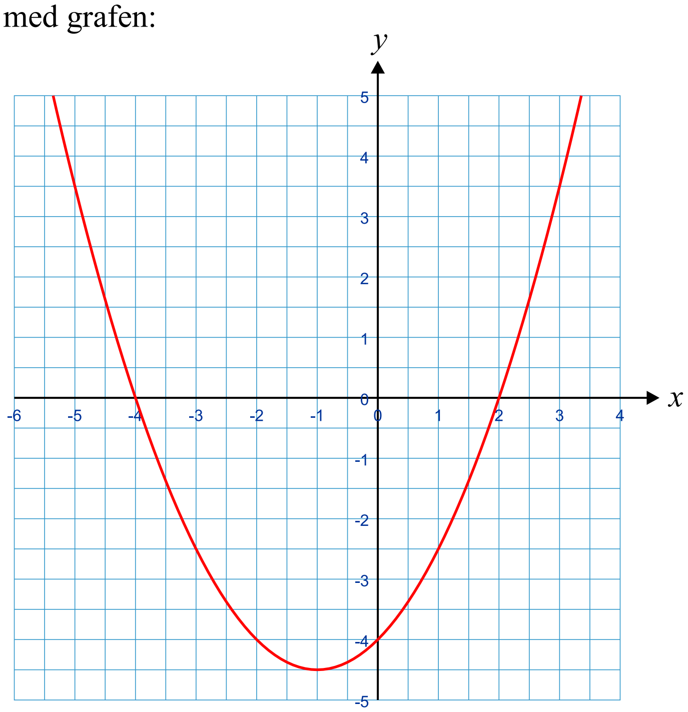
$$(7) \qquad ax^2 + bx + c \;=\; a \cdot \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{d}{4a}$$

Eksempel 2.8

Betragt andengradspolynomiet $g(x) = \tfrac{1}{2}x^2 + x - 4$. Vi aflæser her straks koefficienterne til $a = \tfrac{1}{2}$, $b = 1$ og $c = -4$. Vi udregner diskriminanten: $d = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot (-4) = 9$. Ved indsættelse i formel (3) fra sætning 2.6 får vi parablens toppunkt:

$$(x_0, y_0) \;=\; \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{d}{4a} \right) \;=\; \left(-\frac{1}{2 \cdot \frac{1}{2}}, -\frac{9}{4 \cdot \frac{1}{2}} \right) \;=\; (-1, -4\tfrac{1}{2})$$

Det stemmer fint med grafen:



□

Afslutningsvist skal vi anføre en anden nyttig sætning om grafen for et andengradspolynomium. Vi vil først bevise den, når vi kommer til differentialregningen.

> **Sætning 2.9**
>
> Tangenten til grafen for andengradspolynomiet $P(x) = ax^2 + bx + c$ i punktet $(0, c)$ er givet ved $y = bx + c$. Specielt gælder der, at hældningen af tangenten til parablen i $x = 0$ er lig med b.

2.2 Andengradsligninger

En andengradsligning er en ligning på formen $ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$. For et givet sæt koefficienter ønskes altså de x-værdier, som tilfredsstiller ligningen. Løsningerne betegnes i øvrigt også *rødderne* til andengradspolynomiet $P(x)=ax^2+bx+c$.

Sætning 2.10 (Andengradsligninger)

Andengradsligningen $ax^2+bx+c=0$, hvor $a\neq 0$ og diskriminanten $d=b^2-4ac$, har følgende løsninger:

Hvis $d<0$: Der er ingen løsninger.

Hvis $d=0$: Der er netop én løsning: $x=-\dfrac{b}{2a}$

Hvis $d>0$: Der er to løsninger: $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{d}}{2a}$

Bevis: For at bevise sætningen, skal vi gøre brug af bemærkning 2.7, som vi fik direkte som en sideeffekt efter udledningen af parablens toppunkt tidligere. Det umiddelbare problem man møder, når man uden forkundskaber forsøger at løse en andengradsligning er, at man ikke – som i tilfældet med en 1. gradsligning – bare kan isolere x på den ene side af lighedstegnet. Den ubekendte x forekommer nemlig flere steder og i forskellig potens! Omskrivningen i bemærkning 2.7 viser imidlertid, at det er muligt at isolere x i kvadratet på en toleddet størrelse (husk kvadratsætningerne):

$$
\begin{aligned}
ax^2+bx+c &= 0 \\
&\Updownarrow \\
a\cdot\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{d}{4a} &= 0 \\
&\Updownarrow \\
a\cdot\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{d}{4a} \\
&\Updownarrow \\
\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{d}{4a^2}
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Den sidste ligning udtrykker reelt, at "noget i 2. potens er lig med et tal". For at komme videre, må vi dele op i tre tilfælde, afhængig af værdien af d:

$d<0$: Nævneren i "tallet" på højre side i den sidste ligning er altid positiv, da a står i 2. potens. Når diskriminanten d derfor er negativ, vil hele brøken blive negativ. Venstresiden, som er "noget" i 2. potens vil altid være mindst 0. Derfor kan ligningen aldrig blive opfyldt, og der er ingen løsninger!

$d = 0$: Når $d = 0$ er tælleren i brøken på højresiden i ligningen 0, dvs. højresiden er 0. Den eneste måde "noget" i 2. potens kan give 0, er hvis "noget" selv er 0:

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = 0 \quad\Leftrightarrow\quad x+\frac{b}{2a} = 0 \quad\Leftrightarrow\quad x = -\frac{b}{2a}$$

$d > 0$: I dette tilfælde er både tæller og nævner i højresiden af den sidste ligning i (8) positive. Derfor har vi:

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{d}{4a^2} \quad\Leftrightarrow\quad \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{d}}{2a}\right)^2$$

Den eneste måde, hvorpå to udtryk i 2. potens kan være ens er, hvis udtrykkene er ens eller det ene udtryk er lig med minus det andet:

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{d}}{2a}\right)^2 \quad\Leftrightarrow\quad x+\frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{d}}{2a} \;\vee\; x+\frac{b}{2a} = -\frac{\sqrt{d}}{2a}$$

$$\Leftrightarrow\quad x=-\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{d}}{2a} \;\vee\; x=-\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{d}}{2a} \quad\Leftrightarrow\quad x=\frac{-b\pm\sqrt{d}}{2a}$$

hvor vi i sidste ensbetydende har sat på fælles brøkstreg og skrevet det kompakt. Der er altså to løsninger. Sætningen er hermed bevist.

□

Bemærkning 2.11

Man observerer, at formlen $x = (-b \pm \sqrt{d})/2a$ faktisk også kan bruges til tilfældet $d = 0$. Løsningen kaldes da også for en *dobbeltrod* til det aktuelle polynomium.

Eksempel 2.12

Lad os bestemme rødderne til det samme andengradspolynomium, som vi kiggede på i eksempel 2.8: $g(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - 4$. Dengang så vi, at $a = \frac{1}{2}$, $b = 1$ og $c = -4$ og at diskriminanten var givet ved: $d = b^2 - 4ac = 1^2 - 4\cdot\frac{1}{2}\cdot(-4) = 9$. Vi bruger sætning 2.10. Eftersom $d = 9 > 0$, får vi:

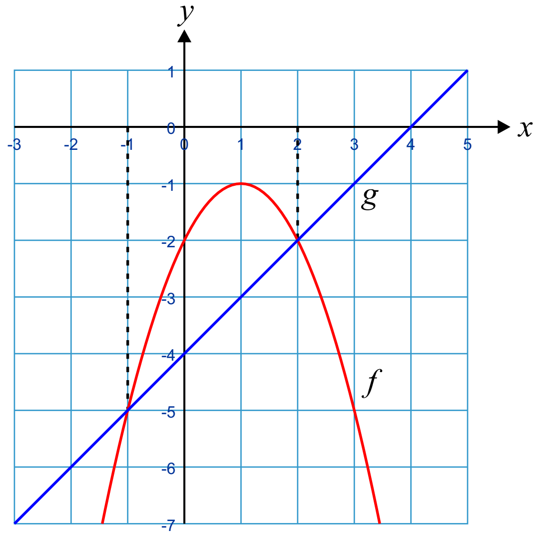
$$x = \frac{-b\pm\sqrt{d}}{2a} = \frac{-1\pm\sqrt{9}}{2\cdot\frac{1}{2}} = \frac{-1\pm 3}{1} = \begin{cases} 2 \\ -4 \end{cases}$$

Rødderne til polynomiet er altså –4 og 2. Grafen for polynomiet $g(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - 4$ skærer dermed x-aksen i –4 og 2, hvilket tydeligt ses på grafen i eksempel 2.8.

□

Andengradsligninger opstår ikke blot når et andengradspolynomium sættes lig med 0. Vi skal se på det i det følgende eksempel.

Eksempel 2.13



Løs ligningen $-x^2+2x-2=x-4$ grafisk og ved beregning.

Løsning: Lad os først løse opgaven grafisk. Vi tegner graferne for $f(x)=-x^2+2x-2$ og $g(x)=x-4$. Løsningerne fås som x-koordinaterne til grafernes skæringspunkter, her -1 og 2. Vi går herefter over til at beregne løsningerne til ligningen. Det kan naturligvis gøres ved at anvende *solve* i CAS-værktøjet, men vi kan også løse den manuelt ved at isolere alt på venstre side, så der kun er 0 tilbage på højre side:

$$-x^2+2x-2=x-4 \quad\Leftrightarrow\quad -x^2+x+2=0$$

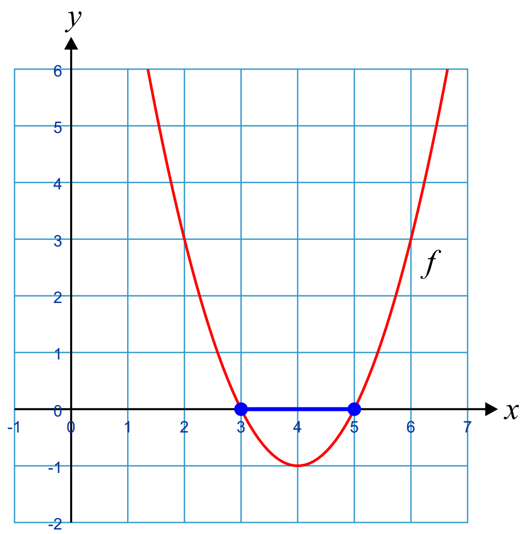
Dermed fås på ny en andengradsligning, hvor $d=b^2-4ac=1^2-4\cdot(-1)\cdot 2=9$:

$$x \;=\; \frac{-b\pm\sqrt{d}}{2a} \;=\; \frac{-1\pm\sqrt{9}}{2\cdot(-1)} \;=\; \frac{-1\pm 3}{-2} \;=\; \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$$

Vi ser, at det stemmer med vore aflæsninger.

□

Eksempel 2.14



Løs andengradsuligheden $x^2-8x+15\le 0$.

Løsning: Vi starter med at løse den tilsvarende *ligning*: $x^2-8x+15=0$. Diskriminanten er $d=b^2-4ac=(-8)^2-4\cdot 1\cdot 15=4$, hvilket giver følgende løsninger:

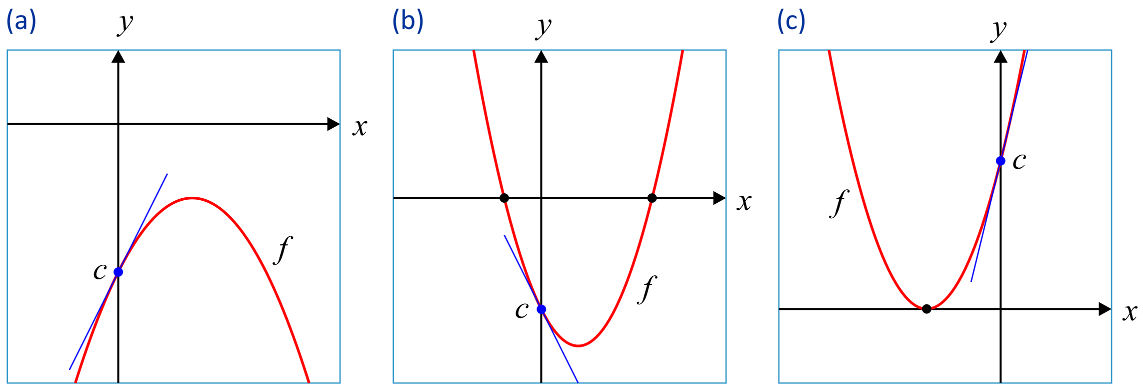
$$x \;=\; \frac{-b\pm\sqrt{d}}{2a} \;=\; \frac{8\pm 2}{2\cdot 1} \;=\; \frac{8\pm 2}{2} \;=\; \begin{cases} 5 \\ 3 \end{cases}$$

Hvis vi lader $f(x)=x^2+8x-15$, skal vi altså løse uligheden $f(x)\le 0$. Grafisk svarer det til at finde de x-værdier, hvor grafen ligger på x-aksen eller under. Det sker imellem de to rødder 3 og 5. Derfor er løsningen til uligheden $L=[3,5]$.

□

Eksempel 2.15

Vi vil nu studere, hvad grafen fortæller om fortegnene på koefficienterne *a*, *b* og *c* for det tilhørende andengradspolynomium samt fortegnet på diskriminanten *d*.



Vi har $f(x) = ax^2 + bx + c$. Heraf fås $f(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = c$, så *c* er skæringen med *y*-aksen. Ifølge sætning 2.9 kan *b* findes som hældningen af tangenten til grafen i $x = 0$. Den pågældende tangent er vist med et blåt linjestykke. Endelig ved vi, at eventuelle løsninger til andengradsligningen $ax^2 + bx + c = 0$ svarer til grafens skæringspunkter med *x*-aksen samt at antallet af løsninger afgøres af diskriminanten *d*. $d > 0$ er ensbetydende med 2 løsninger, $d = 0$ er ensbetydende med 1 løsning og $d < 0$ er ensbetydende med ingen løsninger. Med disse ting for øje, kan vi behandle hver af de tre tilfælde:

Grafen (a): Vi ser straks, at $a < 0$, eftersom parablen vender grenene nedad. Da grafen skærer *y*-aksen på den negative del af aksen, har vi $c < 0$. Da den blå tangent har positiv hældning, er $b > 0$. Da grafen ikke skærer *x*-aksen, er $d < 0$.

Grafen (b): Vi ser at $a > 0$, da parablen vender grenene opad. Da grafen skærer *y*-aksen på den negative del af aksen, har vi $c < 0$. Da den blå tangent har negativ hældning, er $b < 0$. Da grafen skærer *x*-aksen to steder, er der to løsninger til andengradsligningen, så $d > 0$.

Grafen (c): Vi ser at $a > 0$, da parablen vender grenene opad. Da grafen skærer *y*-aksen på den negative del af aksen, har vi $c < 0$. Da den blå tangent har negativ hældning, er $b < 0$. Da grafen tangerer *x*-aksen i ét punkt, har andengradsligningen to løsninger, så $d = 0$.

Bemærkning 2.16

En alternativ måde at afgøre, hvilket fortegn *b* og *d* har, er at udnytte formlen for toppunktet for et andengradspolynomium, dvs. (3) i sætning 2.6. Man observerer fortegnene for koordinaterne x_0 og y_0 til toppunktet. Ud fra det og viden om fortegnet for *a*, kan fortegnene for *b og d* findes. Interesserede læsere kan studere opgave 211.

2.3 Faktorisering af andengradspolynomium

I dette afsnit skal vi se, at hvis et andengradspolynomium har mindst én reel rod, så kan det faktoriseres til et produkt af to førstegradspolynomier.

Sætning 2.17 (Faktorisering af 2. gradspolynomier)

Givet et andengradspolynomium $f(x)=ax^2+bx+c$. Hvis diskriminanten $d \geq 0$ kan polynomiet faktoriseres på følgende måde:

(9) $$f(x) \;=\; ax^2+bx+c \;=\; a\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)$$

hvor x_1 og x_2 er rødderne i andengradspolynomiet. Hvis $d=0$ og der dermed kun er én rod, så bruges denne rod (også kaldet en *dobbeltrod*) som både x_1 og x_2.

Bevis: Overladt til læseren i opgave 218 med lidt hjælp til.

Eksempel 2.18

Sætning 2.17 er rigtig nyttig. Den kan undertiden bruges til at reducere tilsyneladende komplicerede brøker. Tag for eksempel brøken

$$\frac{2x^2+7x-4}{x+4}\,,\; x \neq -4$$

Det overlades til læseren at vise, at rødderne i tælleren $2x^2+7x-4$ er $\frac{1}{2}$ og -4. Ifølge (9) kan vi da foretage en omskrivning af tælleren, hvorefter reduceringer giver følgende:

$$\frac{2x^2+7x-4}{x+4} \;=\; \frac{2\cdot(x-\frac{1}{2})\cdot(x-(-4))}{x+4} \;=\; \frac{2\cdot(x-\frac{1}{2})\cdot(x+4)}{x+4} \;=\; 2\cdot(x-\tfrac{1}{2}) \;=\; 2x-1$$

Vi får med andre ord et meget simplere udtryk, fordi faktoren $x+4$ forkorter væk.

□

Eksempel 2.19

Idéen i sætning 2.17 kan bruges af matematiklærere, som ønsker at lave opgaver med andengradsligninger til sine elever. Lad os sige, at læreren leder efter en andengradsligning med løsningerne –1,5 og 4. Så kan læreren udregne produktet af x minus den ene løsning og x minus den anden løsning.

$$(x-(-1{,}5))\cdot(x-4) \;=\; (x+1{,}5)\cdot(x-4) \;=\; x^2-4x+1{,}5x-6 \;=\; x^2-2{,}5x-6$$

Det er klart, at andengradspolynomiet har de to rødder –1,5 og 4, for hvis x er en af disse to tal, vil en af faktorerne i udtrykket på venstre side give 0! Kan man ikke lide kommatal i koefficienterne i andengradsligningen, kan man eventuelt vælge at gange udtrykket med 2. Det vil tydeligvis ikke ændre rødderne:

$$2\cdot(x^2-2{,}5x-6) \;=\; 2x^2-5x-12$$

Andengradspolynomiet har dermed de ønskede rødder –1,5 og 4. □

Eksempel 2.20

I det tilfælde, hvor man har at gøre med en andengradsligning, hvor konstantleddet c er 0, er der ingen grund til at benytte sætning 2.17. Her kan man uden videre faktorisere ved at sætte x udenfor parentes og bruge nulreglen. Et eksempel er:

$$x^2-8x=0 \quad \Leftrightarrow \quad x\cdot(x-8)=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=0 \ \vee \ x-8=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=0 \ \vee \ x=8$$

Polynomiet $P(x)=x^2-8x$ har altså rødderne 0 og 8.

□

2.4 Det generelle polynomium af n'te grad

Som nævnt har polynomier været studeret intenst i matematikken igennem tiderne. Det generelle polynomium af grad n er defineret således:

Definition 2.21 (n'te gradspolynomium)

En funktion på formen: $p(x)=a_n\cdot x^n+a_{n-1}\cdot x^{n-1}+\ \ldots +a_1\cdot x+a_0$, hvor *koefficienterne* $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ er konstanter og hvor $a_n\neq 0$, kaldes for et polynomium af grad n.

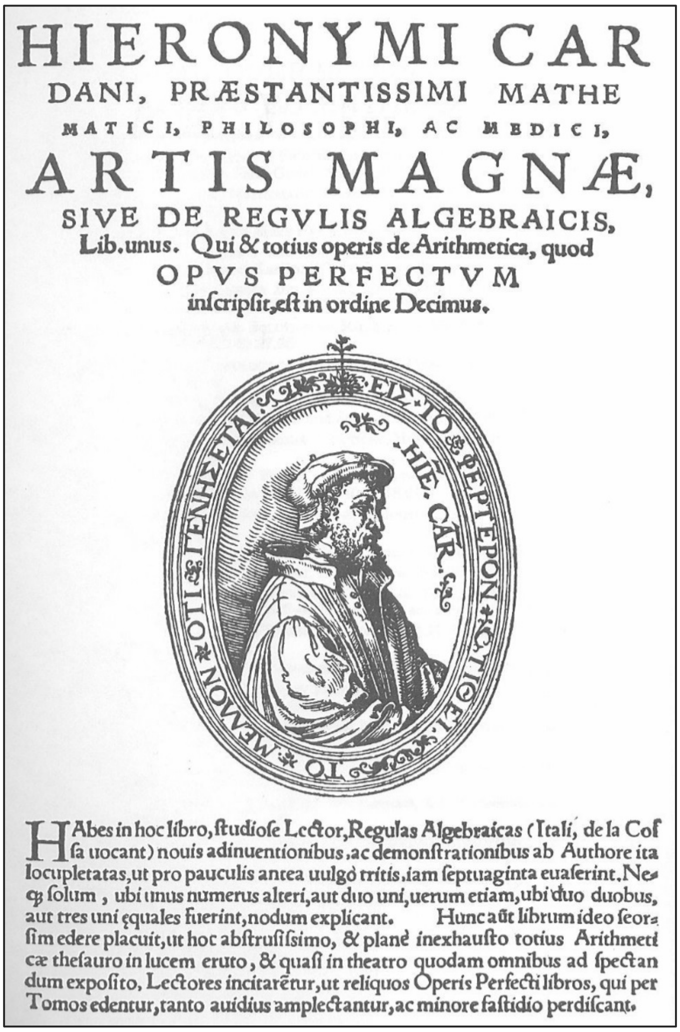
I begyndelsen af 1900-tallet lykkedes det endeligt at levere et stringent bevis for *Algebraens fundamentalsætning*. Denne berømte sætning siger, at ethvert polynomium af grad n (endda med komplekse koefficienter) har netop n rødder – når røddernes multiplicitet tælles med. Rødderne kan eventuelt være komplekse tal. Vi arbejder imidlertid kun med reelle tal i denne e-bog, så algebraens fundamentalsætning fortæller os, at et polynomium af grad n med reelle koefficienter *højst* har n reelle rødder. Et eksempel er følgende tredjegradspolynomium:

(10) $$p(x) \ = \ 2x^3-3x^2-5x+6$$

eller følgende fjerdegradspolynomium:

(11) $$p(x) \ = \ x^4-10x^3+28x^2-70x+147$$

Men hvordan bestemmer man de eventuelle rødder? Ja, vi kan selvfølgelig løse det med vores CAS-værktøj, men dette værktøj bygger netop på vore forfædres opdagelser. Vi har allerede set på formler til bestemmelse af rødder for andengradspolynomier, men hvad med polynomier af 3. grad og 4. grad? En formel til løsning af en generel 3. gradsligning blev i 1545 publiceret af italieneren *Gerolamo Cardano* (1501-1576) i hans matematiske værk *Ars Magna*. Den var resultatet af bidrag fra flere italienske matematikere. Forsiden af Cardanos værk ses på næste side. Det lykkedes endvidere for Cardanos egen elev *Lodovico Ferrari* (1522-1565) at finde en formel til bestemmelse af løsningerne til en fjerdegradsligning. I meget lang tid derefter søgte man efter formler til bestemmelse af rødderne i polynomier af 5. grad og højere grad. Det skulle vise sig at være en umulig opgave …

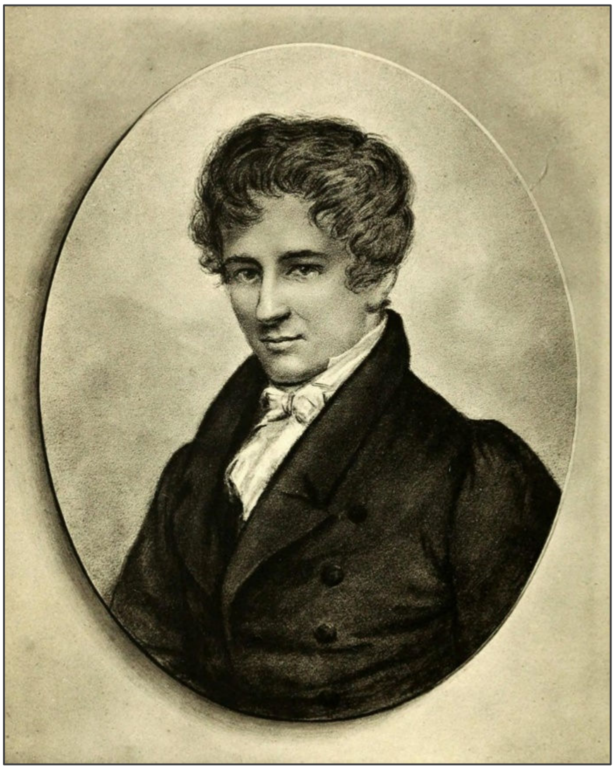


HIERONYMI CAR
DANI, PRÆSTANTISSIMI MATHE
MATICI, PHILOSOPHI, AC MEDICI,
ARTIS MAGNÆ,
SIVE DE REGVLIS ALGEBRAICIS,
Lib.unus. Qui & totius operis de Arithmetica, quod
OPVS PERFECTVM
inſcripſit,eſt in ordine Decimus.

HAbes in hoc libro, ſtudioſe Lector, Regulas Algebraicas (Itali, de la Coſſa uocant) nouis adinuentionibus, ac demonſtrationibus ab Authore ita locupletatas, ut pro pauculis antea uulgò tritis, iam ſeptuaginta euaſerint. Neq; ſolum, ubi unus numerus alteri, aut duo uni, uerum etiam, ubi duo duobus, aut tres uni ęquales fuerint, nodum explicant. Hunc aũt librum ideo ſeorſim edere placuit, ut hoc abſtruſiſſimo, & planè inexhauſto totius Arithmeticæ theſauro in lucem eruto, & quaſi in theatro quodam omnibus ad ſpectandum expoſito, Lectores incitarẽtur, ut reliquos Operis Perfecti libros, qui per Tomos edentur, tanto auidius amplectantur, ac minore faſtidio perdiſcant.

Ars Magna (forside) udgivet af Gerolamo Cardano (1501-1576)

Først troede det unge norske matematikgeni *Niels Henrik Abel* (1802-1829), at han havde fundet en formel til løsning af femtegradsligningen. Ved nærmere eftersyn opdagede han dog, at det ikke var tilfældet. I det følgende lykkedes det Abel med abstrakt matematik at bevise, at en sådan formel slet *ikke findes*. Hans opdagelse vakte stor forundring i matematikverdenen. Abels bevis, som også er gældende for ligninger af højere grad end 5, blev publiceret i det matematiske tidsskrift *Journal für die reine und Angewandte Mathematik* i året 1826.



Niels Henrik Abel (1802-1829). Maler: Johan Görbitz.

Formlerne for tredje- og fjerdegradsligningerne er for komplicerede til at blive omtalt nærmere her. Den interesserede læser kan læse om Cardanos formel til løsning af tredjegradsligningen i [2] side 80-83. At der slet ikke findes en formel, som kan give løsningerne til en generel femtegradsligning ud fra viden om koefficienterne i ligningen, betyder *ikke*, at løsningerne ikke findes. Algebraens fundamentalsætning siger jo netop, at de findes. Der findes blot ikke nogen formel, der kan udtrykke dem *eksakt* – med de krav man har til en sådan formel. Derimod er der altid mulighed for at bestemme løsningerne *numerisk*, dvs. tilnærmet med kommatal. For matematikere er der derimod ofte stor forskel på at have eksakte løsninger og tilnærmede løsninger.

Sætning 2.22

Et polynomium af *ulige* grad har altid mindst én reel rod.

Bevis: Dette indses nemt ud fra vor viden om, at alle polynomier er defineret for alle reelle tal og er kontinuerte: Da $p(x) \to \infty$ for $x \to \infty$ og $p(x) \to -\infty$ for $x \to -\infty$, må grafen for polynomiet krydse x-aksen mindst et sted. Dette sted er en reel rod i polynomiet.

□

Bemærkning 2.23

Faktisk kan man endda bevise følgende om polynomier med reelle koefficienter: Er graden *ulige*, er der et *ulige* antal reelle rødder. Hvis graden er *lige*, er der et *lige* antal reelle rødder. I begge tilfælde medregnes multiple rødder. For eksempel må alle tredjegradsligninger med reelle koefficienter have enten 1 eller 3 reelle rødder og alle fjerdegradsligninger med reelle koefficienter må have 0, 2 eller 4 reelle rødder.

□

Hvis r er rod i et polynomium $p(x)$, kan $p(x)$ *faktoriseres* i produktet af $x-r$ og et polynomium med en grad, som er én lavere. Kan man finde en rod i det sidstnævnte polynomium, kan også dette polynomium faktoriseres, etc. Tredjegradspolynomiet (10) på en af de forrige sider har de reelle rødder 1, 2 og –1,5, og kan faktoriseres således:

(12) $$p(x) = 2x^3 - 3x^2 - 5x + 6 = 2 \cdot (x-1) \cdot (x-2) \cdot (x+1{,}5)$$

Man kan vise, at sætning 2.17 kan generaliseres til polynomier af højere grad. Fjerdegradspolynomiet (11) har de reelle rødder 3 og 7 og faktoriserer således:

(13) $$p(x) = x^4 - 10x^3 + 28x^2 - 70x + 147 = (x-3) \cdot (x-7) \cdot (x^2+7)$$

Den sidste faktor x^2+7 kan ikke faktoriseres videre indenfor de reelle tal. I polynomiet

(14) $$p(x) = x^4 - 9x^3 - 15x^2 + 53x - 30 = (x-1)^2 \cdot (x+3) \cdot (x-10)$$

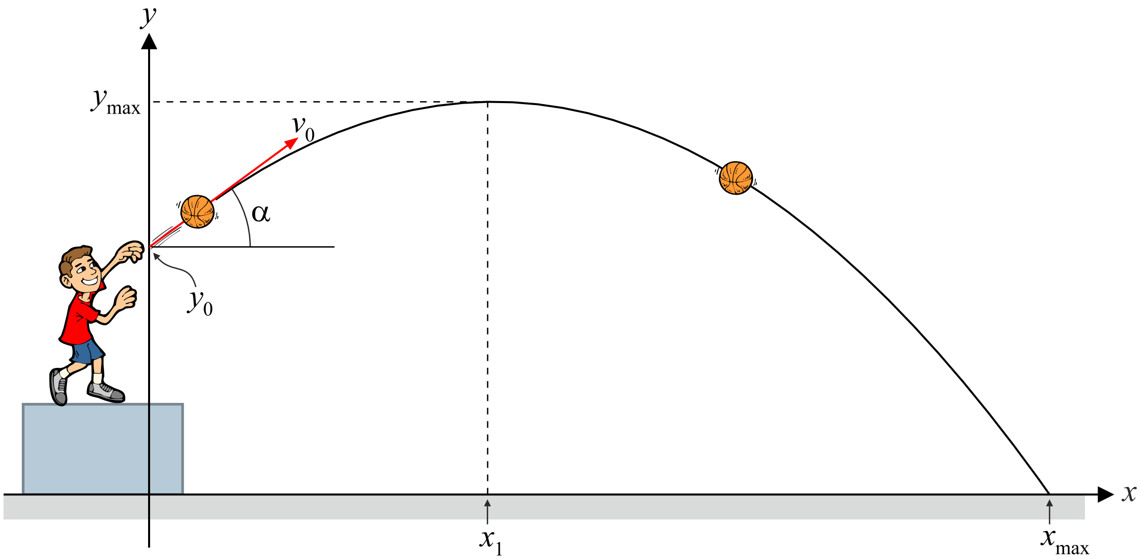
ser vi, at faktoren $(x-1)$ forekommer to gange. *Multipliciteten* er 2, og vi kalder 1 for en dobbeltrod. Denne rod skal altså tælles med to gange, når vi taler om at multipliciteten medregnes. Interesserede læsere kan i opgave 223 studere, hvordan man faktoriserer polynomier – en teknik, der går under navnet *polynomiets division*.

2.5 Anvendelser af andengradspolynomier

Som allerede nævnt i begyndelsen af dette kapitel dukker andengradspolynomier og andengradsligninger op i overraskende mange sammenhænge. Vi skal kigge på en række eksempler herpå. Derudover vil man kunne studere en anvendelse af andengradspolynomier i Tema B.

Eksempel 2.24 (Kasteparabel)

Et af de mest berømte eksempler er *kasteparablen*. Når der foretages et *skråt* kast med en bold, og der kan ses bort fra luftmodstand, viser det sig, at bolden gennemløber en bane, som er en del af en parabel. På figuren nedenfor er der lagt et koordinatsystem ind, så x-aksen er vandret, og bolden forlader personens hånd i punktet $(0, y_0)$. Til dette tidspunkt har bolden en fart på v_0, og boldens retning er angivet ved vinklen α i forhold til vandret.



Man kan vise, at boldens bane er graf for polynomiet givet ved følgende forskrift:

(15) $$p(x) = -\frac{g}{2v_0^2 \cdot (\cos(\alpha))^2} \cdot x^2 + \tan(\alpha) \cdot x + y_0$$

hvor g er tyngdeaccelerationen $9{,}82\,\mathrm{m/s^2}$. I det følgende antager vi, at en bold sendes afsted med farten 14 m/s i en vinkel (*elevation*) på 38°, og at bolden forlader hånden i en højde af 1,90 m over jorden.

a) Hvor højt når bolden op over jordoverfladen, og hvor langt fra kasteren opnås denne maksimale højde – underforstået i vandret retning.
b) Bestem kastelængden, dvs. afstanden fra kasteren til nedslagspunktet.

Løsning: a) Lad os udregne koefficienterne i andengradspolynomiet. Vi anfører ikke de fysiske enheder, men underforstår SI-enheder:

$$a = -\frac{g}{2v_0^2 \cdot (\cos(\alpha))^2} = -\frac{9{,}82}{2 \cdot 14^2 \cdot (\cos(38°))} = -0{,}04034234438$$

$$b = \tan(\alpha) = \tan(38°) = 0{,}7812856266$$
$$c = y_0 = 1{,}9$$

hvilket giver følgende andengradspolynomium:

(16) $$p(x) = -0{,}04034234438 \cdot x^2 + 0{,}7812856266 \cdot x + 1{,}90$$

Diskriminanten findes:

$$d \;=\; b^2 - 4 \cdot a \cdot c \;=\; 0{,}7812856266^2 - 4 \cdot (-0{,}04034234438) \cdot 1{,}90 \;=\; 0{,}9170090476$$

Toppunktet kan dernæst bestemmes med sætning 2.6:

(17) $$(x_0, y_0) \;=\; \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{d}{4a}\right) \;=\; \left(-\frac{0{,}7812856266}{2 \cdot (-0{,}04034234438)}, -\frac{0{,}9170090476}{4 \cdot (-0{,}04034234438)}\right)$$
$$= \;(9{,}683195639 ; 5{,}682670788)$$

Boldens maksimale højde er altså 5,68 m og den opnås i afstanden 9,68 m fra kasteren.

b) Nedslagspunktet kan karakteriseres ved, at $y = 0$ eller $p(x) = 0$. Derfor skal vi løse andengradsligningen $-0{,}04034234438 \cdot x^2 + 0{,}7812856266 \cdot x + 1{,}90 = 0$. Derfor benyttes formlen i sætning 10. For det første ser vi, at der er to løsninger, da $d > 0$.

(18) $$x \;=\; \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2a} \;=\; \frac{-0{,}7812856266 \pm \sqrt{0{,}9170090476}}{2 \cdot (-0{,}04034234438)} \;=\; \begin{cases} 21{,}55169148 \\ -2{,}185300207 \end{cases}$$

Den negative er en "kunstig" løsning, som fremkommer, hvis man forlænger boldens parabelbane bagud til skæring med *x*-aksen. Det er ikke ualmindeligt, at man ved anvendelser af andengradsligninger får kunstige løsninger. Man skal blot argumentere og kassere dem. Svaret på delspørgsmålet er altså at kastelængden er 21,55 m.

□

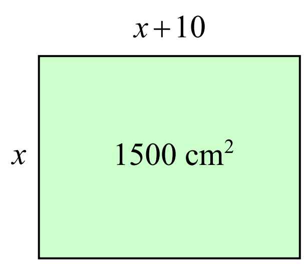
Bemærkning 2.25

Når vi kommer til differentialregningen skal vi se, at opgaven kan løses hurtigere. En anden ting er, at tiden *t* slet ikke indgår i formel (15). Dermed kan vi ikke stille spørgsmål, som vedrører tiden. Det er en ulempe. Skal man have tiden i spil, skal man helst til at kigge på de såkaldte *vektorfunktioner*, som vi ikke behandler her.

□

Eksempel 2.26

Det oplyses, at længden i en rektangulær plakat er 10 cm større end dens bredde. Endvidere er plakatens areal lig med 1500 cm^2. Bestem sidelængderne i plakaten.



Løsning: Vi sætter bredden af plakaten til x. Dermed er dens længde $x+10$. Idet vi underforstår enheden cm, kan vi opstille følgende ligning:

(19) $$x \cdot (x+10) = 1500 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + 10x = 1500 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + 10x - 1500 = 0$$

En andengradsligning med disse koefficienter: $a = 1, b = 10$ og $c = -1500$. Diskriminanten fås til: $d = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 10^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1500) = 6100$. Sætning 2.6 giver:

(20) $$x = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2a} = \frac{-10 \pm \sqrt{6100}}{2 \cdot 1} = \begin{cases} 34{,}05124838 \\ -44{,}05124838 \end{cases}$$

Den negative løsning kasseres. Dermed er plakatens længde 44,05 cm, mens dens bredde er 34,05 cm.

□

Eksempel 2.27 (Hængebro)

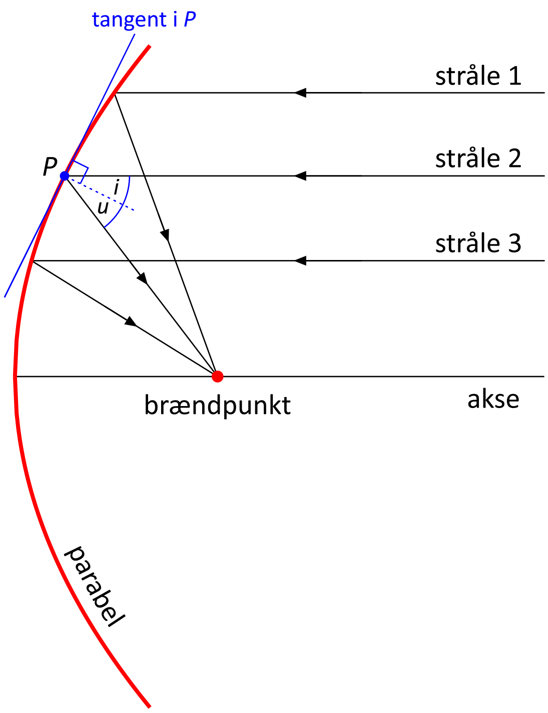
De to midterste bærekabler på en hængebro danner en parabel under idealiserede forudsætninger. Forudsætningen er at massen af bærekablerne + de lodrette hængekabler kan negligeres i forhold til massen af selve broelementet. Endvidere skal selve vejbanen være vandret og have samme massefordeling overalt. Dette kan med nogen tilnærmelse siges at være tilfældet for vor egen Storebæltsbro. I afsnittet 3.10 om anvendelser af differentialregning kigger vi på et argument for påstanden om en parabelbue. Den interesserede læser kan endvidere lave en model af en hængebro under Tema B.

Storebæltsbroens to midterste hængekabler hænger tilnærmelsesvist i en parabelbue

Eksempel 2.28 (Radioteleskoper og paraboler)

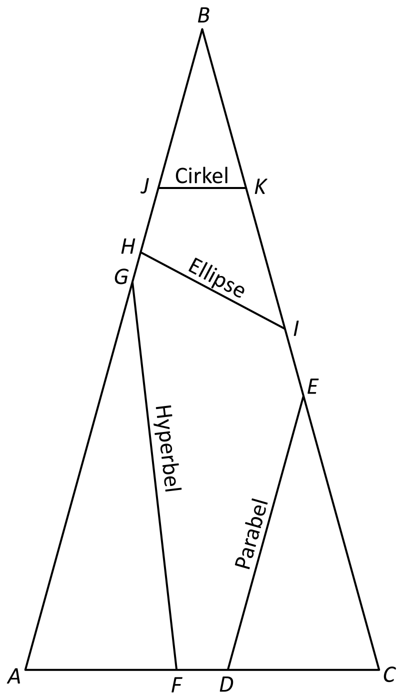
Hvis man drejer en parabel om dens symmetriakse, får man en såkaldt *omdrejningsparaboloide*. Denne form viser sig at være overordentlig nyttig. Den bruges i *radioteleskoper* til at fokusere og forstærke de meget svage radiosignaler fra rummet. Ud fra samme grundidé benyttes formen i *paraboler* til modtagelse af TV-signaler fra satellitter. Hvis man har et parabolformel spejl, kan man endda bruge det til at stege en bøf i solskinsvejr!

Den egenskab, der gælder for en parabel og som udnyttes i en parabol, er følgende: Stråler, som er parallelle med parablens akse, vil alle blive reflekteret af parablen, så den reflekterede stråle rammer et fælles punkt kaldet *brændpunktet* for parablen. Den interesserede læser kan studere egenskaben nøjere i opgave 234, hvor vi anvender softwaren *GeoGebra*.



Eksempel 2.29 (Keglesnit)

Allerede i indledningen til dette kapitel om polynomier blev det nævnt, at grækeren *Apollonius af Perga* (262 f.Kr.–190f.Kr.) indgående studerede *keglesnit*. Han formulerede og udledte en imponerende række af egenskaber for de fire keglesnit. Keglesnittene, hvoraf parablen er den ene, kan bedst forklares ved at kigge på figuren nedenfor til højre. Det skal forestille den tredimensionelle situation projiceret vinkelret ind i en plan, så keglen bliver til en trekant. Er snittet vinkelret på keglens (lodrette) akse, fås en *cirkel*. Er snittet skråt, så snittet går ud gennem "siden" af keglen, fås en *ellipse*. Er snittet parallelt med en af "siderne" i keglen (DE parallel med AB), fås en *parabel*. Endelig får man *hyperblen* ved at foretage et snit, som *ikke* er parallelt med nogen af "siderne" og så snittet ikke når ud gennem nogen af "siderne". I princippet kan keglen tænkes at være uendelig lang.

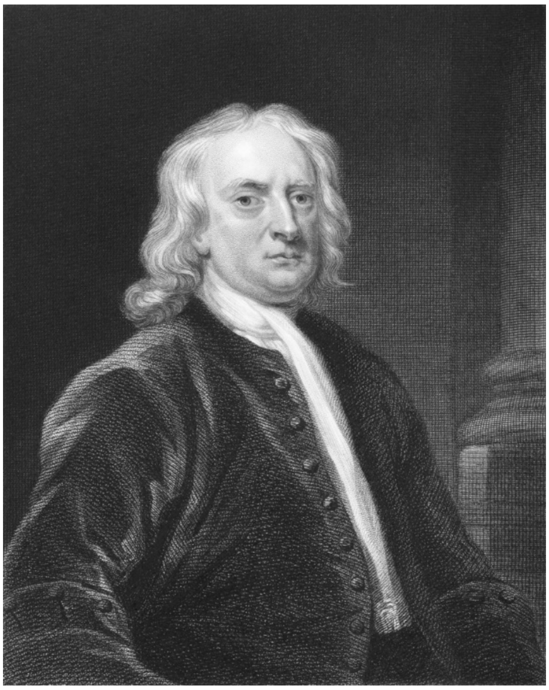


Keglesnit kommer i spil i mange sammenhænge. Vi har allerede set eksempler på hvor parabler dukker op. Hvad angår ellipsen, så kan det nævnes, at en planet bevæger sig i en ellipsebane omkring Solen, med Solen i det ene ellipsens ene brændpunkt. Denne geometriske egenskab kan udledes (omend svært) ud fra gravitationsloven, der siger, at de to himmellegemer påvirker hinanden med en kraft, som er proportional med produktet af de to masser og omvendt proportional med kvadratet på afstanden mellem deres centre.

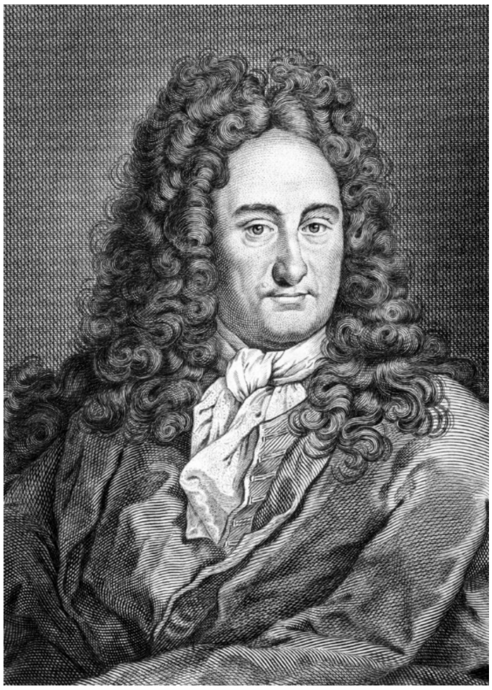
3. Differentialregning

3.1 Historisk optakt

Allerede de gamle grækere havde konstrueret *tangenter* til de kurver, som fremkommer ved snit i en kegle, dvs. dem vi kalder keglesnit. Der er tale om cirkler, ellipser, parabler og hyperbler. Herefter skal man helt frem til 1600-tallet, før man støder på afgørende nye fremskridt i teorien om tangenter. Med et udbygget matematisk symbolsprog og fremkomsten af den *analytiske geometri* anført af franskmændene *Francois Viète* (1540-1603), *René Decartes* (1596-1650) og *Pierre de Fermat* (1601-1665) havde man fået nye værktøjer. Det vil føre for vidt at komme nærmere ind på de ellers interessante tidlige bidrag til tangentbestemmelser. Den interesserede læser henvises til [1] og [9]. De nye fremskridt ansporede især to personer til uafhængigt af hinanden at udvikle hver deres version af det vi i dag kalder for *differentialregningen*. Der er tale om englænderen *Isaac Newton* (1643-1727) og tyskeren *Gottfried Wilhelm Leibniz* (1646-1716). Newton kender vi i dag desuden som en af de største fysikere igennem tiderne. Leibniz var et slags universalgeni, der var kyndig i discipliner som jura, teologi, fysik, historie, logik, filosofi og matematik. Han opfandt endda en mekanisk regnemaskine. Den dag i dag er der stadig diskussioner om, hvem af de to, der kom først med differentialregningen. Mange af de nye opdagelser indenfor området blev da også holdt hemmeligt eller først udgivet langt senere. Æren for at være faderen til den såkaldte *infinitesimalregning*, der hentyder til "regning med uendelig små størrelser" stod ud i lys lue allerede mens de to levede.



Isaac Newton (1643-1727)



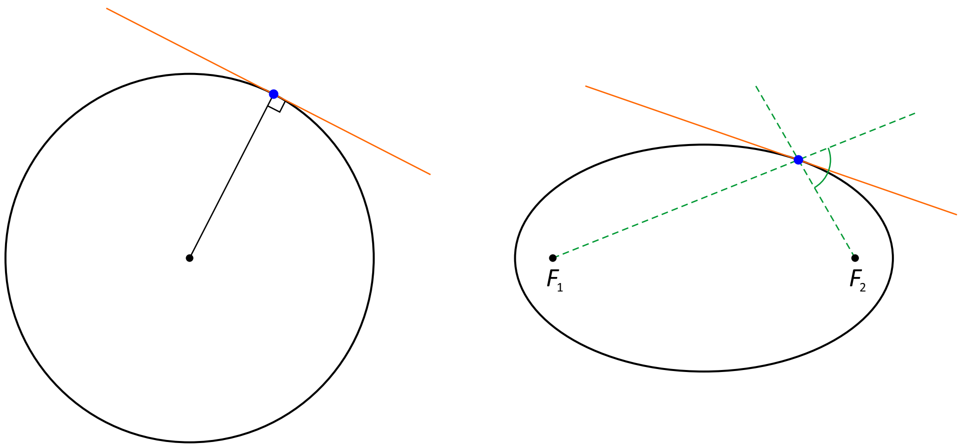
Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716)

Igen skal vi ikke gå nærmere ind på de to vidt forskellige måder, som Newton og Leibniz udviklede differentialregningen på. I dag gør man det nemlig på en helt anden måde, som er mere stringent og forståelig. Som tidligere nævnt i afsnit 1.6 var det blandt andet *Augustin Louis Cauchy* (1789-1859) der fik differentialregningen formuleret via *grænsevær-*

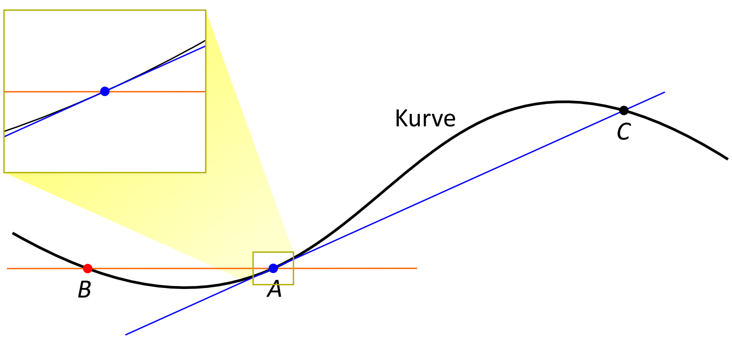
dibegrebet. Lad os slutte dette indledende afsnit her med at bemærke, af differentialregningen skulle vise sig at få en betydning uden sidestykke i matematikkens historie. Et helt nyt univers var åbnet. Nu kunne man bestemme toppunkter og monotoniforhold for funktioner og emnet finder store anvendelser i fysik, økonomi, biologi og mange andre discipliner. *Væksthastighed* er for eksempel et begreb, som eksisterer i alle disse områder og differentialregningen kan bruges til at beskrive og analysere de konkrete fænomener. Differentialregningen føret også den såkaldte *integralregning* med sig, og den har ligeledes enorme anvendelsesområder.

3.2 Lidt om tangenter og sekanter

Lad os lige vende tilbage til grækerne og deres forståelse af begrebet en *tangent*. Her er en tangent til en kurve en linje, der har et punkt fælles med kurven, mens alle andre punkter på linjen ligger udenfor kurven. Som omtalt bestemte grækerne tangenter til keglesnit. To af dem er vist herunder: Cirklen og ellipsen. Tangenten i et punkt på cirklen har kun ét punkt til fælles med cirklen, nemlig *røringspunktet*. For cirklen gælder der den smukke egenskab, at alle tangenter står vinkelret på radien fra røringspunktet. For en ellipse gælder blandt andet den interessante egenskab, at tangenten halverer vinklen mellem de to "stråler", der går gennem brændpunkterne og røringspunktet.



Lad os overveje situationen for en mere generel kurve som den på figuren nedenfor. Intuitionen siger os vel, at en *tangent* i punktet A er den linje, der passerer igennem punktet A og som "tangerer" kurven i den umiddelbare nærhed af A. Det sidste er vist i zoombilledet omkring punktet A: Løst sagt, så er det svært at se forskel på linjen og kurven jo tættere man er på punktet A.



Den blå linje er tangenten. Vi bemærker, at vi må opgive grækernes krav om, at tangenten kun må have ét punkt til fælles med kurven. At punktet rammer kurven i punktet C er tilfældigt og uvæsentligt. Det afgørende er, at linjen "opfører" sig på den rette måde i nærheden af røringspunktet! Derimod vil vi betegne den orange linje igennem A og B som en *sekant*. En sekant er helt simpelt en linje, der skærer igennem kurven i mindst to punkter. Der er ingen krav om, hvordan linjen skal opføre sig i nærheden af skæringspunkterne. På zoom-billedet på forrige side ser vi da også, at sekanten danner en relativ stor vinkel med kurven uanset hvor meget vi nærmer os punktet A.

Eksempel 3.1

Vi skal gøre tingene mere præcise ved brug af grænseværdibegrebet. Kun kurver, som er grafer for funktioner, vil blive betragtet. Vi skal specifikt betragte grafen for funktionen $f(x) = 0{,}25x^2$ og forsøge at bestemme tangenten til grafen i punktet P_0 med koordinaterne $(1, f(1)) = (1; 0{,}25)$. En ikke-lodret linje er som bekendt fastlagt af et punkt og en hældning. Vi kender punktet P_0, men mangler hældningen. Da det skal være sværere og sværere at se forskel på tangenten og grafen jo tættere man er på x_0, er det en nærliggende idé at udnytte punkter på grafen til at bestemme tangentens hældning. Vi vil bestemme hældningen af den sekant, som går igennem røringspunktet P_0 og et andet punkt $(x, f(x))$ på grafen. Først vælger vi $x = 3$, hvilket giver grafpunktet $(3, f(3)) = (3; 2{,}25)$. Hældningen af sekanten fås ved at bruge formlen for hældningen a af en ret linje, kendt fra 1g:

$$(1) \qquad a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{2{,}25 - 0{,}25}{3 - 1} = \frac{2}{2} = 1$$

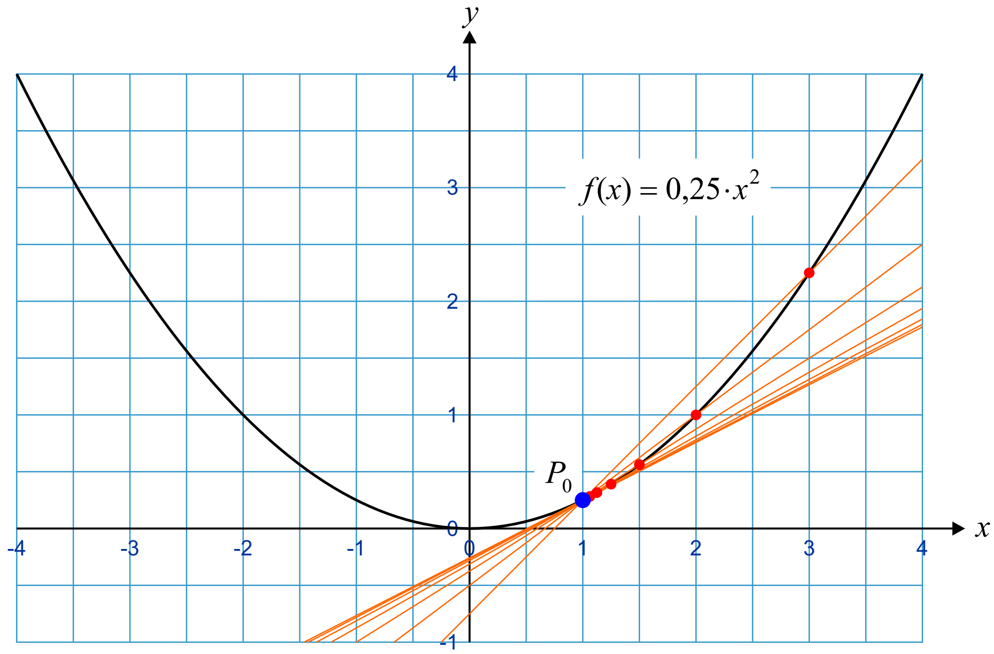
Senere vil vi i øvrigt betegne denne tangenthældning med udtrykket $\Delta y / \Delta x$, som er forskellen i funktionsværdi divideret med forskellen i x-værdi. Den kaldes derfor også for *differenskvotienten*. Vi har dermed udregnet første række i skemaet nedenfor. Vi bevæger os nu tættere på røringspunktet ved at vælge et x, som er tættere på $x_0 = 1$: Vi vælger x til at være 2 og beregner den nye sekanthældning:

$$(2) \qquad a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = \frac{1 - 0{,}25}{2 - 1} = \frac{0{,}75}{1} = 0{,}75$$

hvormed vi får den anden række i skemaet. Vi fortsætter med at vælge x-værdier tættere og tættere på $x_0 = 1$. Faktisk har vi nedenfor valgt at halvere afstanden i hvert trin. Det behøver man nu ikke. Husk at punktet $(x_0, f(x_0)) = (1, f(1)) = (1; 0{,}25)$ er det *faste* punkt, mens punktet $(x, f(x))$ ændrer sig fra række til række (*bevægelige* punkt).

x	f(x)	Δx	Δy	a
3	2,25	2	2	1
2	1	1	0,75	0,75
1,5	0,5625	0,5	0,3125	0,625
1,25	0,390625	0,25	0,140625	0,5625
1,125	0,31640625	0,125	0,06640625	0,53125
1,0625	0,282226563	0,0625	0,032226563	0,515625
1,03125	0,265869141	0,03125	0,015869141	0,5078125

For hvert nyt valg af bevægeligt punkt udregnes sekanthældningen. Ved at betragte sidste søjle med sekanthældningerne, kan vi se, at hældningerne godt kunne se ud til at nærme sig til 0,5. Grafisk ser det således ud som vist på figuren herunder. Man opdager, at de orange sekanter ser ud til at "stabilisere sig", når det bevægelige punkt kommer tættere og tættere på røringspunktet. Sagt mere præcist, så ser det ud til, at sekanternes hældninger har en grænseværdi, når det bevægelige punkt nærmer sig til det faste punkt P_0.



At grænseværdien er 0,5 er som sagt bare en fornemmelse vi får ved at kigge i tabellen. Vi kan dog ikke være sikker på det, for det ville betyde, at vi skulle fortsætte i det uendelige. Heldigvis kan man være snedig og bevise helt præcist, hvorfor grænseværdien af sekanthældningerne virkelig er 0,5. I stedet for at regne videre i tabellen, vælger vi at udtrykke det bevægelige punkt via den ubekendte x: $P(x, f(x))$. Vi opskriver et udtryk for sekanthældningerne eller differenskvotienten i dette tilfælde:

(3) $$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \frac{0{,}25x^2 - 0{,}25}{x-1}$$

Vi skal lade x nærme sig til 1. Det kan umiddelbart forekomme svært at afgøre hvad der sker med differenskvotienten, når x nærmer sig til 1. Vi kan imidlertid løse opgaven ved at benytte tricket i eksempel 1.30 fra et tidligere afsnit om grænseværdier: Vi faktoriserer tælleren ved at bruge en kvadratsætning:

(4) $$a = \frac{0{,}25x^2 - 0{,}25}{x-1} = \frac{0{,}25 \cdot (x^2-1)}{x-1} = 0{,}25 \cdot \frac{(x+1)\cdot(x-1)}{(x-1)} = 0{,}25 \cdot (x+1)$$

Det er meget nemt at afgøre, hvad det simplificerede udtryk for a nærmer sig til:

(5) $$a = 0{,}25 \cdot (x+1) \to 0{,}25 \cdot (1+1) = 0{,}50 \quad \text{for} \quad x \to 1$$

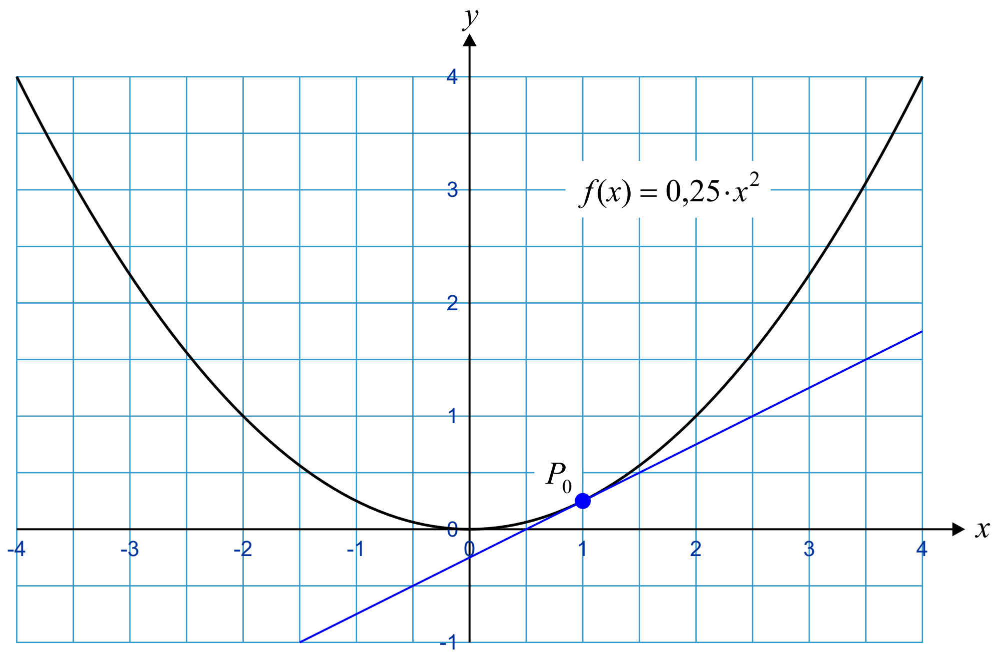
Det ønskede er dermed bevist. Sekanthældningerne nærmer sig virkelig til 0,5. Det er da nærliggende, at definere, at hældningen af tangenten til grafen i punktet P_0 skal være 0,50. Da vi har et punkt på tangenten, nemlig røringspunktet $P_0(1; 0{,}25)$, kan vi desuden bestemme *ligningen* for tangenten til grafen i dette røringspunkt. Som bekendt er ligningen for en ret linje, der går igennem punktet (x_0, y_0) og har hældning *a*, givet ved:

(6) $$y = a \cdot (x - x_0) + y_0$$

Vi indsætter det, vi ved:

(7) $$y = 0{,}5 \cdot (x - 1) + 0{,}25 \quad \Leftrightarrow \quad y = 0{,}5x - 0{,}25$$

hvorefter ligningen for tangenten er bestemt. Hvis vi tegner både grafen og tangenten i samme koordinatsystem, kan vi da også se, at det ser ud til at stemme:



□

3.3 Differentiable funktioner

I dette afsnit skal vi formalisere det, der skete i eksempel 3.1 i forrige afsnit, herunder definere **begrebet** en *differentialkvotient*. Vi starter med nogle definitioner.

Definition 3.2

Med *differenskvotienten* for funktionen *f* i punktet x_0 menes brøken

(8) $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Den kan omtales som *tilvæksten* i funktionsværdi (eller *y*-værdi) divideret med *tilvæksten* i *x*-værdi og kan tolkes som *hældningen* af *sekanten* gennem de to graf-punkter $P_0(x_0, f(x_0))$ og $P(x, f(x))$.

Definition 3.3

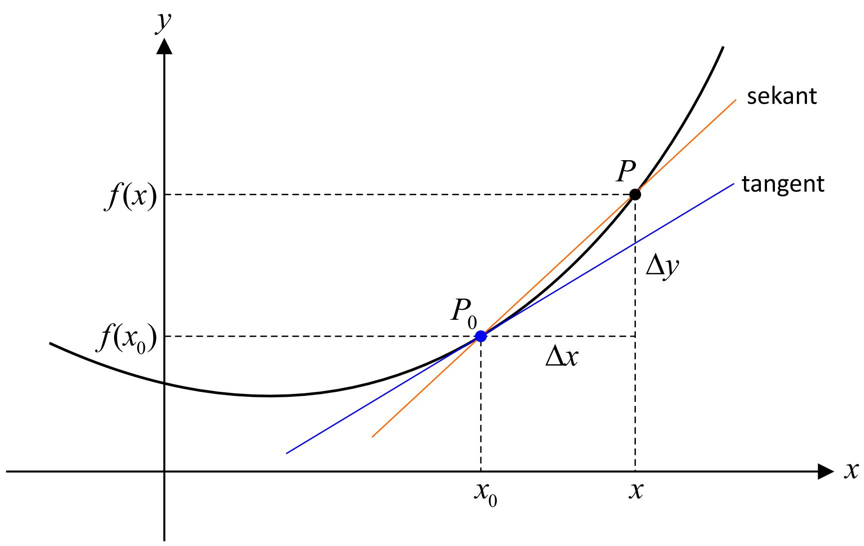
En funktion *f* siges at være *differentiabel* i punktet x_0, såfremt differenskvotienten for *f* i x_0 har en grænseværdi for $x \to x_0$. I så fald kaldes grænseværdien for *differentialkvotienten* for *f* i x_0, og den betegnes med $f'(x_0)$:

(9) $$f'(x_0) \;=\; \lim_{x \to x_0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \right)$$

Differentialkvotienten læses "*f* mærke i x_0". Hvis *f* er differentiabel i ethvert punkt af sin definitionsmængde, så siges *f* at være *differentiabel* – uden angivelse af et punkt.

Definition 3.4

Antag at funktionen *f* er differentiabel i x_0. Da vil vi sige, at grafen for *f* har en *tangent* i $P_0(x_0, f(x_0))$, og den defineres som den linje, der går igennem punktet P_0 og som har hældningen $f'(x_0)$.



I eksempel 3.1 fra forrige afsnit fandt vi, at funktionen givet ved $f(x) = 0{,}25x^2$ har differentialkvotienten 0,5 i punktet $x_0 = 1$. Det betyder, at vi kan skrive $f'(1) = 0{,}5$, hvilket læses som: "*f* mærke i punktet 1 er lig med 0,5".

Bemærkning 3.5

Differentialkvotienten kaldes også ofte for *den afledede*. I visse sammenhænge ser man også betegnelsen df/dx i stedet for $f'(x_0)$. Det var den betegnelse, som Leibniz benyttede, da han udviklede differentialregningen. Man skal dog passe på ikke at opfatte det som en brøk mellem to størrelser.

I arbejdet med at bestemme differentialkvotienter skal vi gøre brug en fremgangsmåde, som kan betegnes *tretrinsreglen*.

Tretrinsreglen

1. Opskriv udtrykket for differenskvotienten $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.
2. Reducér udtrykket for differenskvotienten fra punkt 1 passende.
3. Afgør om det reducerede udtryk for differenskvotienten har en grænseværdi for $x \to x_0$ eller hvad der er det samme: $\Delta x \to 0$. Hvis grænseværdien eksisterer, sættes den lig med $f'(x_0)$.

Sætning 3.6

Funktionen $f(x) = x^2$ er differentiabel i ethvert punkt $x_0 \in R$, og differentialkvotienten er givet ved $f'(x_0) = 2x_0$.

Bevis: Vi bruger tretrinsreglen ovenfor:

1. Differenskvotienten: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \dfrac{x^2-x_0^2}{x-x_0}$

2. Reduktion: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{x^2-x_0^2}{x-x_0} = \dfrac{(x+x_0)\cdot(x-x_0)}{x-x_0} = x+x_0$

3. Grænseværdi: Vi konstaterer, at $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = x+x_0 \;\to\; x_0+x_0 = 2x_0$ for $x \to x_0$.

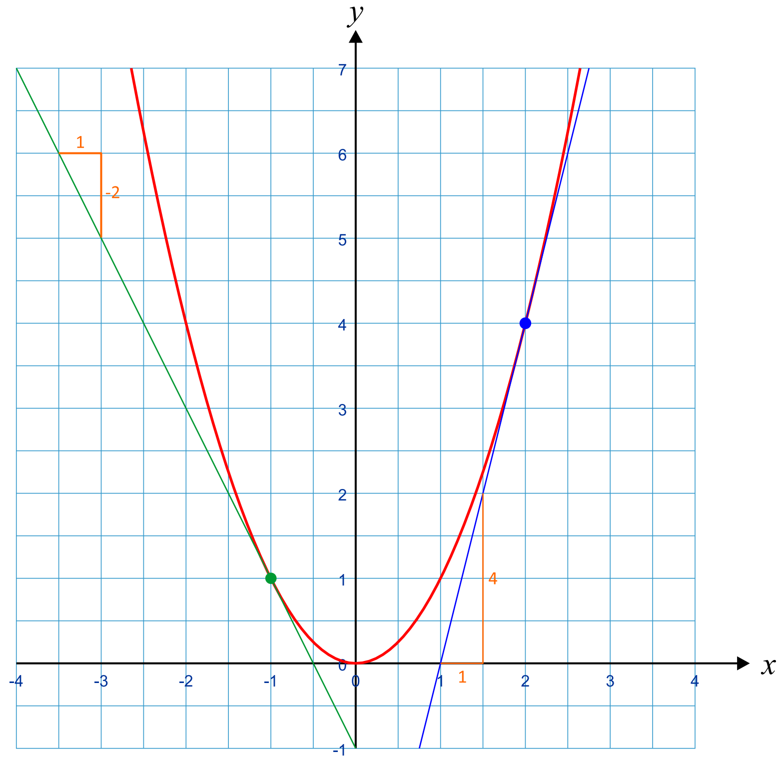
   Da grænseværdien eksisterer, konstaterer vi, at *f* er differentiabel i x_0, og at differentialkvotienten i x_0 er lig med $f'(x_0) = 2x_0$.

Det ønskede er dermed vist.

□

Eksempel 3.7

Sætning 3.6 fortæller os med andre ord, at hældningen af tangenten i punktet $P_0(x_0, x_0^2)$ på grafen er lig med $f'(x_0) = 2x_0$. Man kan indsætte et hvilket som helst tal på x_0's plads: Værdien $x_0 = 2$ giver for eksempel punktet $P_0(2,4)$ på grafen, mens tangentens hældning i dette punkt er $f'(2) = 2\cdot 2 = 4$. Sætter vi derimod $x_0 = -1$, fås grafpunktet $P_0(-1,1)$, og tangenthældningen i dette punkt er $f'(-1) = 2\cdot(-1) = -2$. Begge tangenter er indtegnet på figuren på næste side.



□

Sætning 3.8

Funktionen $f(x) = 1/x$ er differentiabel i ethvert punkt $x_0 \neq 0$, og differentialkvotienten er givet ved $f'(x_0) = -1/x_0^2$.

Bevis: Vi bruger tretrinsreglen igen:

1. Differenskvotienten: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \dfrac{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x_0}}{x-x_0}$

2. Reduktion: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x_0}}{x-x_0} = \dfrac{\dfrac{x_0}{x\cdot x_0}-\dfrac{x}{x\cdot x_0}}{x-x_0} = \dfrac{\dfrac{x_0-x}{x\cdot x_0}}{x-x_0}$

$$= \frac{x_0-x}{(x-x_0)\cdot x\cdot x_0} = \frac{-(x-x_0)}{(x-x_0)\cdot x\cdot x_0} = -\frac{1}{x\cdot x_0}$$

3. Grænseværdi: Vi konstaterer, at $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = -\dfrac{1}{x\cdot x_0} \to -\dfrac{1}{x_0\cdot x_0} = -\dfrac{1}{x_0^2}$ for $x \to x_0$.

   Da grænseværdien eksisterer, konstaterer vi, at f er differentiabel i $x_0 \neq 0$, og at differentialkvotienten i x_0 er lig med $f'(x_0) = -1/x_0^2$.

Det ønskede er dermed vist.

□

Sætning 3.9

Funktionen $f(x)=\sqrt{x}$ er differentiabel i ethvert punkt $x_0>0$, og differentialkvotienten er givet ved:

$$f'(x_0)=\frac{1}{2\cdot\sqrt{x_0}}$$

Bevis: Overlades til læseren i opgave 304.

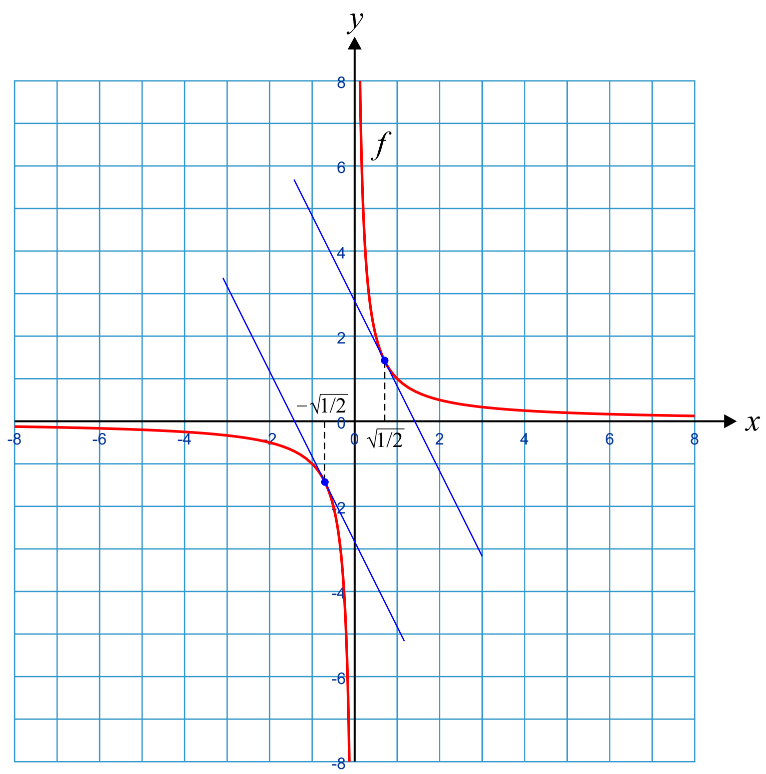
□

Da vi for eksempel i sætning 3.6 udledte udtrykket for differentialkvotienten til funktionen $f(x)=x^2$ fandt vi frem til svaret $f'(x_0)=2x_0$. Når vi fremover bruger differentialkvotienten til løsning af opgaver, vil vi ofte bare skrive $f'(x)=2x$. Under beviset var vi nødt til at sætte et indeks på x for at kunne skelne mellem det faste punkt og det bevægelige punkt.

Eksempel 3.10

I eksempel 3.7 så vi, at vi kan bruge differentialkvotienten til at bestemme tangenthældninger i bestemte punkter på grafen. Vi kan imidlertid også omvendt bestemme de punkter, hvori en graf har en given tangenthældning. Lad for eksempel $f(x)=1/x$. Vi vil bestemme x-koordinaterne til de punkter på grafen, hvor tangenten har hældning –2.

$$f'(x)=-2 \;\Leftrightarrow\; -\frac{1}{x^2}=-2 \;\Leftrightarrow\; -1=-2x^2 \;\Leftrightarrow\; x^2=\tfrac{1}{2} \;\Leftrightarrow\; x=\pm\sqrt{\tfrac{1}{2}}=\pm 0{,}7071$$



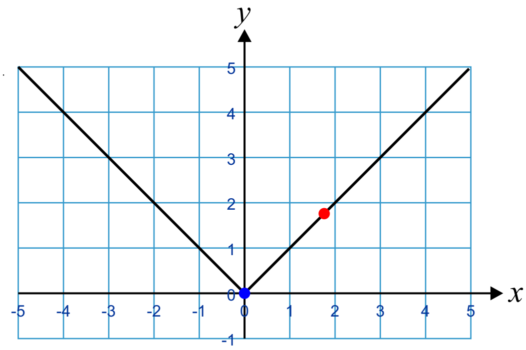
Bemærkning 3.11 (Differentiabilitet er en lokal egenskab)

Det er vigtigt at notere sig, at differentiabilitet er en "lokal egenskab", forstået på følgende måde: Om en funktion er differentiabel i et punkt x_0 og i givet fald størrelsen af differentialkvotienten, afhænger udelukkende af, hvordan funktionen ser ud i et nok så lille åbent interval indeholdende x_0. Dette fremgår direkte af grænseværdibegrebet, som blev gennemgået i afsnit 1.6 i kapitel 1. Omvendt er det ikke nok bare at kende funktionsværdien i punktet x_0. Så det er ikke en punktegenskab.

Eksempel 3.12

Det er på tide at se et eksempel på en funktion, som *ikke* er differentiabel i et bestemt punkt. Det klassiske eksempel er funktionen $f(x)=|x|$, kaldet *numerisk* x. Der er tale om en funktion, som alternativt kan skrives som en "gaffel-forskrift":

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{for } x \geq 0 \\ -x & \text{for } x < 0 \end{cases} \tag{10}$$



For ikke-negative x-værdier er funktionen lig med x og for negative x-værdier er funktionen lig med $-x$. Hvis man tegner grafen, opdager man, at den har en kant i $x_0 = 0$. Vi vil vise, at funktionen *ikke* er differentiabel i netop dette punkt. For at differenskvotienten skal kunne have en grænseværdi for $x \to 0$, er det nødvendigt, at det er den samme grænseværdi man får, uanset om man lader x nærme sig til 0 fra højre eller fra venstre. Lad os kigge på differenskvotienten i tilfælde af, at det bevægelige punkt x ligger henholdsvis til højre og til venstre for 0:

$$\begin{aligned} x>0: \quad & \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{x-0}{x-0} = 1 \\ x<0: \quad & \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{-x-0}{x-0} = -1 \end{aligned} \tag{11}$$

For det første ser vi, at differenskvotienterne er konstante; de afhænger slet ikke af det bevægelige punkt x. Derfor er grænseværdierne af dem følgende:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \to 1 \ \text{ for } \ x \to 0^+ \quad \text{mens} \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} \to -1 \ \text{ for } \ x \to 0^- \tag{12}$$

Da grænseværdierne fra højre og venstre er forskellige, har differenskvotienten ingen grænseværdi for $x \to 0$ og dermed er funktionen ikke differentiable i $x_0 = 0$. Funktionen er imidlertid differentiabel i alle andre punkter end 0.

□

Tilbage i historien troede man faktisk længe, at hvis en funktion var kontinuert, så måtte den også kunne differentieres. Denne vildfarelse hænger dog også sammen med, at selve funktionsbegrebet var under udvikling i 1800-tallet. For eksempel blev en funktion defineret ved en gaffelforskrift opfattet som en slags fupnummer. Men så kom den tyske matematiker Karl Weierstrass (1815-1897) i 1871 med en funktion på en form, som man indtil da accepterede fuldt ud. Han viste at funktionen er kontinuert i ethvert punkt, men ikke er differentiabel i noget punkt! Det var et chok for matematikverdenen! På den måde kan man sige, at udviklingen af funktionsbegrebet og differentialregningen foregik sideløbende og er endt med den velpolerede teori, vi har i dag. I opgave 312 kan man studere Karl Weierstrass' "syge" funktion i sit CAS-værktøj.

Sætning 3.13

Lad f være en funktion. Da gælder: f differentiabel i $x_0 \;\Rightarrow\; f$ kontinuert i x_0

Bevis: Antag at funktionen f er differentiabel i x_0. Da må differenskvotienten for f i x_0 have en endelig grænseværdi for $x \to x_0$. Vi kalder denne grænseværdi for a. Vi skal vise, at så er f også kontinuert i x_0. Ifølge definitionen af kontinuitet, skal vi redegøre for, at $f(x) \to f(x_0)$ for $x \to x_0$, eller hvad der er det samme, at $\Delta y \to 0$ for $\Delta x \to 0$. Det sidste fremgår af (19) fra afsnit 1.6.

$$\Delta y = \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \Delta x \;\to\; a \cdot 0 = 0 \quad \text{for} \quad \Delta x \to 0 \tag{13}$$

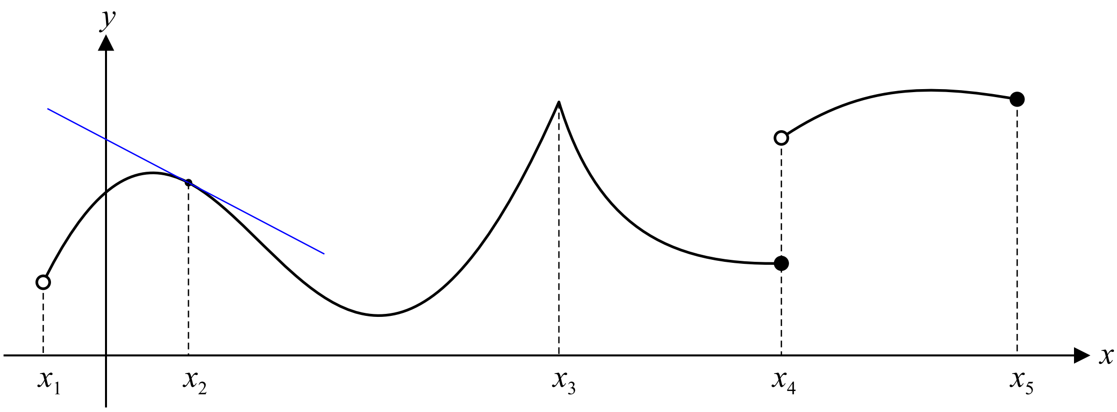
Det ønskede er dermed vist.

□

Bemærkning 3.14

Implikationen i sætning 3.13 kan *ikke* udvides til en biimplikation. Der gælder nemlig *ikke*, at hvis f er kontinuert i x_0, så må f også være differentiabel i punktet. Dette fremgår direkte af eksempel 3.12! Vi konkluderer, at udsagnet om, at en funktion er differentiabel i et punkt, er et stærkere udsagn end at sige, at f er kontinuert i punktet.

□



Figuren på forrige side viser grafen for en funktion *f*. I punktet x_1 er funktionen ikke defineret. Derfor er funktionen hverken kontinuert eller differentiabel her. I punktet x_2 er *f* derimod både kontinuert og differentiabel. Man kan definere en tangent i punktet. I punktet x_3 er *f* kontinuert, da grafen er sammenhængende omkring punktet. Derimod er *f* ikke differentiabel i x_3, da grafen har en *spids* her. Det er ikke muligt at tegne eller definere en tangent her. I punktet x_4 er funktionen ikke kontinuert, da "grafen springer" her. Ifølge sætning 3.13 kan *f* derfor heller ikke være differentiabel i x_4. Endelig er der endepunktet x_5: Funktionen er kontinuert her, da grafen er sammenhængende omkring punktet. Differentiabel er funktionen umiddelbart ikke her, da det vil kræve, at der findes lidt plads på hver side af punktet, hvor funktionen er defineret. Man kan dog godt indføre *differentiabilitet* fra venstre ved kun at kræve, at differenskvotienten har en grænseværdi for $\Delta x \to 0^-$, og man vil også kunne indføre en *halvtangent* i x_5, men det er ikke noget, vi vil komme til at bruge meget, hvis overhovedet.

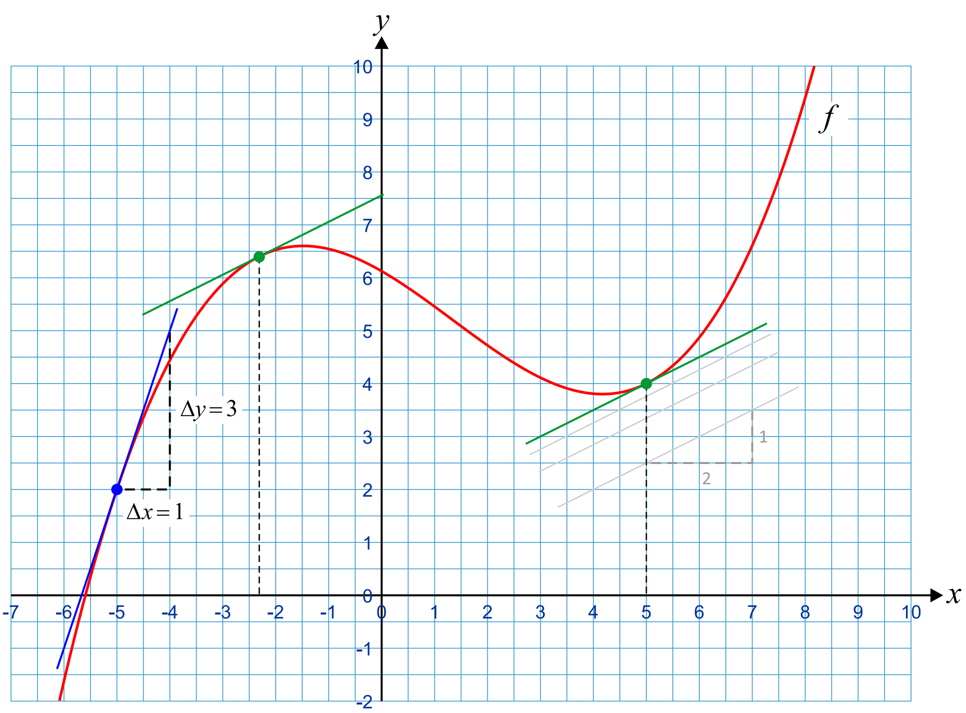
Eksempel 3.15

Vi har givet grafen for en funktion, men har ingen kendskab til forskriften.

a) Aflæs $f'(-5)$ på grafen.

b) Bestem ved aflæsning løsningerne til ligningen $f'(x) = 0{,}5$.

Løsning: a) Vi tegner på bedste vis tangenten til grafen for *f* i punktet $(-5, f(-5))$. En trekant tegnes for at bestemme tangentens hældning. Trekanten tegnes forholdsvis stor for at reducere usikkerheden. Vi ser, at *y* vokser med 3, hver gang *x* vokser med 1. Altså er $f'(-5) = 3$. b) Vi skal bestemme *x*-værdierne til de grafpunkter, hvori tangenten har hældning 0,5. I praksis kan det gøres ved et vilkårligt sted at tegne en linje med hældning 0,5 (*y*-tilvækst på 1, hver gang der er en *x*-tilvækst på 2). Herefter *parallelforskydes* linjen til tangering med grafen, hvilket omtrent sker i punkterne $x = -2{,}3$ og i $x = 5{,}0$.



3.4 En ligning for tangenten

I definition 3.4 gav vi en helt stringent definition af begrebet en tangent til grafen for en funktion i et punkt x_0. I det følgende skal vi udlede en færdig formel for dens ligning.

Sætning 3.16 (Tangentens ligning)

Lad f være en funktion, som er differentiabel i x_0. Grafen for f har da en tangent i punktet $P_0(x_0, f(x_0))$ med ligning

(14) $$y = f'(x_0)\cdot(x-x_0)+f(x_0)$$

Bevis: Vi bruger den velkendte formel fra 1g for ligningen for en ret linje med hældning a, gående igennem punktet (x_0, y_0). Det eneste vi skal gøre er at indsætte det vi ved: At tangenten går gennem punktet $(x_0, f(x_0))$ og at hældningen er lig med $f'(x_0)$:

(15) $$y = a\cdot(x-x_0)+y_0 \quad\Leftrightarrow\quad y = f'(x_0)\cdot(x-x_0)+f(x_0)$$

hvorefter det ønskede er vist. Bemærk lige, at det er x og y, som er variable i udtrykket (14), mens de øvrige størrelser blot repræsenterer konstanter!

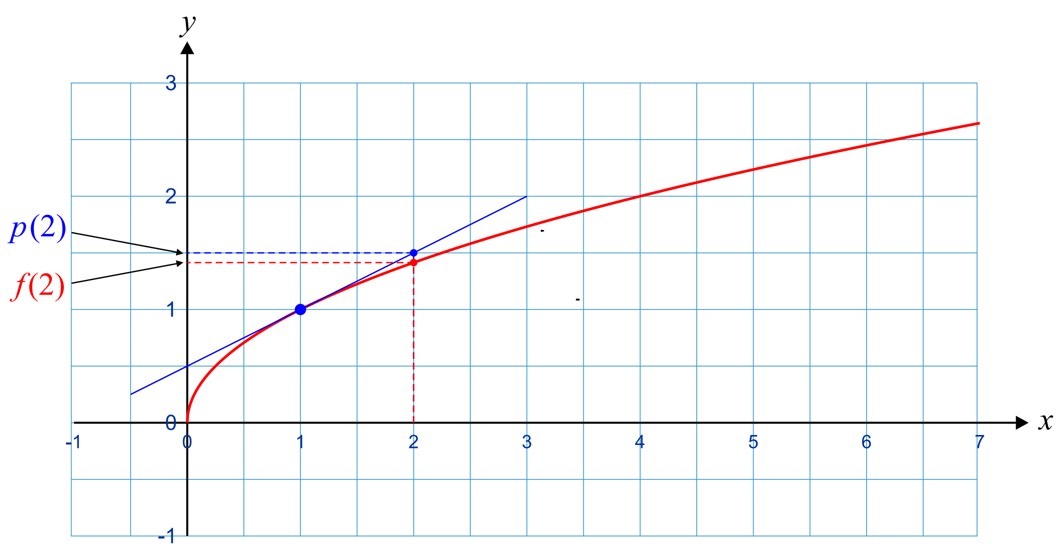
□

Eksempel 3.17 (Tangent og approksimerende førstegradspolynomium)

Vi vil gerne bestemme ligningen for tangenten til grafen for funktionen $f(x)=\sqrt{x},\ x\geq 0$ i punktet $P_0(1, f(1))$. Hertil får vi brug for både funktionsværdien og differentialkvotienten i punktet $x_0 = 1$. Et udtryk for differentialkvotienten har vi fra sætning 3.9.

$$f(1)=\sqrt{1}=1,\quad f'(1)=\frac{1}{2\sqrt{1}}=\tfrac{1}{2}$$

(14) giver følgende udtryk for tangentens ligning: $y=\frac{1}{2}\cdot(x-1)+1 \Leftrightarrow y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$.



På figuren på forrige side er tangenten indtegnet sammen med grafen for *f*. Det er velkendt, at tangenten er en tilnærmelse til grafen i nærheden af røringspunktet. Den lineære funktion, der har tangenten som graf, kaldes derfor ofte for det *approksimerende førstegradspolynomium* til *f* i punktet x_0. Bemærk at et førstegradspolynomium betragtet som funktion er det samme som en lineær funktion! Ordet "approksimere" kan oversættes med "tilnærme". I vores eksempel er det approksimerende førstegradspolynomium til *f* i punktet $x_0 = 1$ givet ved $p(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$. For *x* i nærheden af 1 er $p(x)$ altså en god tilnærmelse til funktionsværdien $f(x)$. Lad os se på nogle få eksempler:

$x = 2:$	$f(2) = \sqrt{2} = 1,414214$	$p(2) = \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2} = 1,5$	forskel: 0,085786
$x = 1,1:$	$f(1,1) = \sqrt{1,1} = 1,048809$	$p(1,1) = \frac{1}{2} \cdot 1,1 + \frac{1}{2} = 1,05$	forskel: 0,011191
$x = 1,01:$	$f(1,01) = \sqrt{1,01} = 1,004988$	$p(1,01) = \frac{1}{2} \cdot 1,01 + \frac{1}{2} = 1,005$	forskel: 0,000012

Det første eksempel er markeret på figuren. Eksemplerne antyder, at forskellen mellem $f(x)$ og $p(x)$ kan blive vilkårlig lille, blot *x* er tilstrækkelig tæt på $x_0 = 1$.

□

Bemærkning 3.18

Man kan faktisk generalisere ovenstående til at approksimere en funktion med et *n*'te gradspolynomium i et punkt x_0. Derved kan man opnå en endnu bedre approksimation. Emnet omhandler *Taylorpolynomier*, som det dog vil føre for vidt at komme nærmere ind på i denne e-bog.

Eksempel 3.19

Lad $f(x) = x^2$. Bestem den vinkel, som tangenten til grafen for *f* i punktet $P_0(1,5; f(1,5))$ danner med *x*-aksen.

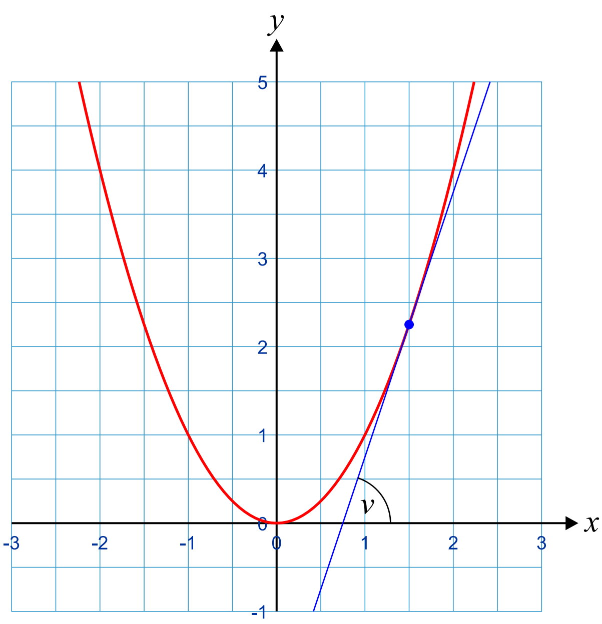
Løsning: Det overlades til læseren at overbevise sig om, at der gælder følgende formel for en linjes hældning *a* som funktion af den vinkel *v* linjen danner med *x*-aksen:

(16) $\qquad \tan(v) = a$

Da hældningen af tangenten i P_0 her er $f'(1,5) = 2 \cdot 1,5 = 3$ fås:

$v = \tan^{-1}(a) = \tan^{-1}(3) = 71,6°$

Opgaven kan naturligvis også klares med en *solve*-kommando.



3.5 Monotoniforhold og lokale ekstrema

Inden vi går videre med at bestemme differentialkvotienter for andre funktioner end det lille udpluk af funktioner, vi så på i afsnit 3.3, skal vi se, hvordan differentialregning kan bruges til at bestemme monotoniforhold og lokale og globale ekstrema for differentiable funktioner. I afsnit 1.4 i kapitel 1 blev begreberne defineret. De fleste vil nok have en umiddelbar forestilling om, at egenskaben at en funktion er voksende eller aftagende i et interval må hænge sammen med tangenthældningerne til grafen i intervallet. Vi skal undersøge, hvad man helt præcist kan konkludere.

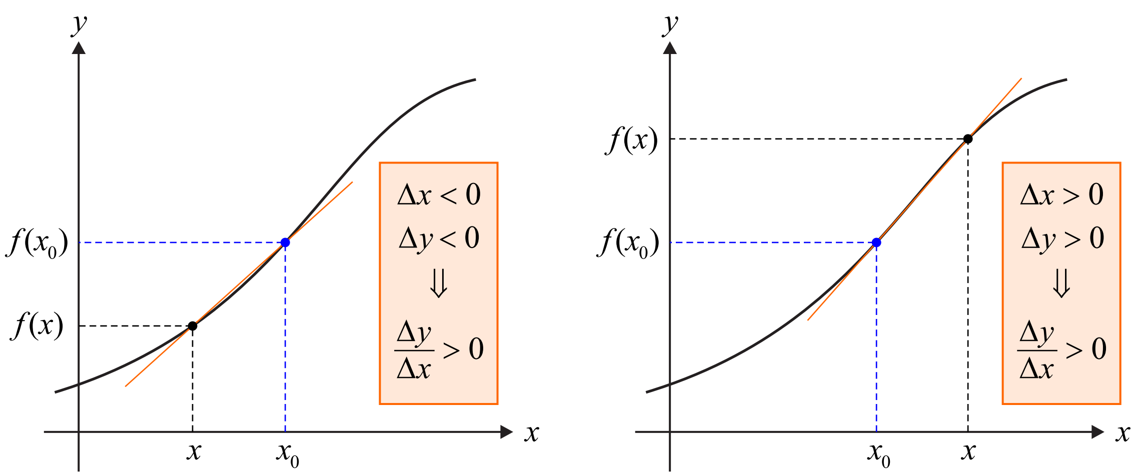
Sætning 3.20

Lad f være en funktion, som er differentiabel i et åbent interval I. Da gælder:

a) f er voksende i I $\Rightarrow$ $f'(x) \geq 0$ for alle $x \in I$

b) f er aftagende i I $\Rightarrow$ $f'(x) \leq 0$ for alle $x \in I$

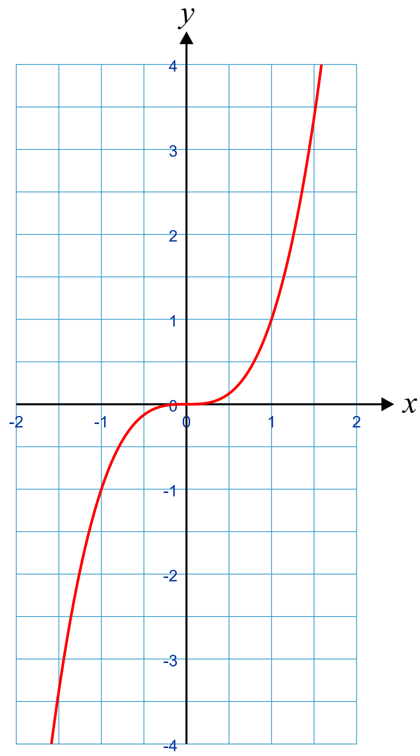
Bevis: a) Lad x_0 være et vilkårligt tal i intervallet I. Når vi vælger et andet tal x i intervallet, kan vi på sædvanlig vis udregne x-tilvæksten $\Delta x = x - x_0$ samt funktionstilvæksten $\Delta y = f(x) - f(x_0)$. Vi antager, at f er voksende i I. Hvis x vælges til venstre for x_0, så vil både x-tilvæksten og funktionstilvæksten være negative, som det fremgår af den venstre del af figuren herunder. Når man dividerer noget negativt med noget negativt, får man noget positivt. Derfor er differenskvotienten også positiv: $\Delta y / \Delta x > 0$. Eller grafisk: Sekanthældningen er positiv! Vælger vi derimod x til højre for x_0, så vil både x-tilvækst og funktionstilvækst være positive, som det ses på figuren nedenfor til højre. Når man dividerer noget positivt med noget positivt, får man igen noget positivt. Derfor får vi igen en positiv differenskvotient: $\Delta y / \Delta x > 0$, dvs. positiv sekanthældning.



I alle tilfælde vil differenskvotienten dermed være positiv. I sætningen er det antaget, at f er differentiabel i hele I, dermed specielt i tallet x_0. Det betyder, at differenskvotienten har en grænseværdi for $\Delta x \to 0$. Denne grænseværdi er nødt til at være mindst 0, for en række af positive tal (differenskvotienterne) kan umuligt have en grænseværdi, som er et negativt tal. Vi konkluderer at $f'(x_0) \geq 0$. Da x_0 var vilkårligt valgt i intervallet *I*, har vi hermed bevist a). beviser for b) kører på analog vis og overlades til læseren.

□

Eksempel 3.21



Den opmærksomme læser vil have bemærket, at der i sætning 3.20 figurerer $\geq$ og $\leq$ i stedet for $>$ og $<$. Det kan virke overraskende. En voksende funktion kan altså godt have et punkt x_0, hvori differentialkvotienten er lig med 0 eller sagt med andre ord: hvor der er tangenthældning 0. Et klassisk eksempel er funktionen $f(x) = x^3$. Vi skal senere se, at funktionen er differentiabel i hele *R* med $f'(x) = 3x^2$ som differentialkvotient. I punktet $x_0 = 0$ er differentialkvotienten lig med 0: $f'(0) = 3 \cdot 0^2 = 0$, men funktionen er faktisk voksende i hele *R*! I punktet $x_0 = 0$ er *x*-aksen tangent til grafen! Umiddelbart kan det virke forkert: man er vant til at tangenter forbliver på den ene side af grafen, i det mindste i nærheden af røringspunktet. Men det er altså hensigtsmæssigt at tillade at tangenter kan skære igennem grafen. Det helt afgørende er, at tangent og graf bliver mere og mere sammenfaldende i nærheden af røringspunktet, noget løst formuleret. Definitionen på differentiabilitet sikrer det. I øvrigt siger man, at funktionen har en *vandret vendetangent* i $x_0 = 0$. Umiddelbart før punktet $x_0 = 0$ vil tangenten dreje én vej, hvorefter den efter punktet drejer i den stik modsatte retning.

□

Sætning 3.20 er god at have, men det ville have været endnu mere nyttigt at have en sætning, som går den anden vej rundt, dvs. udtaler sig om monotoniforhold på baggrund af fortegnet på differentialkvotienten. Heldigvis gælder sådan en sætning også:

Sætning 3.22 (Monotonisætningen)

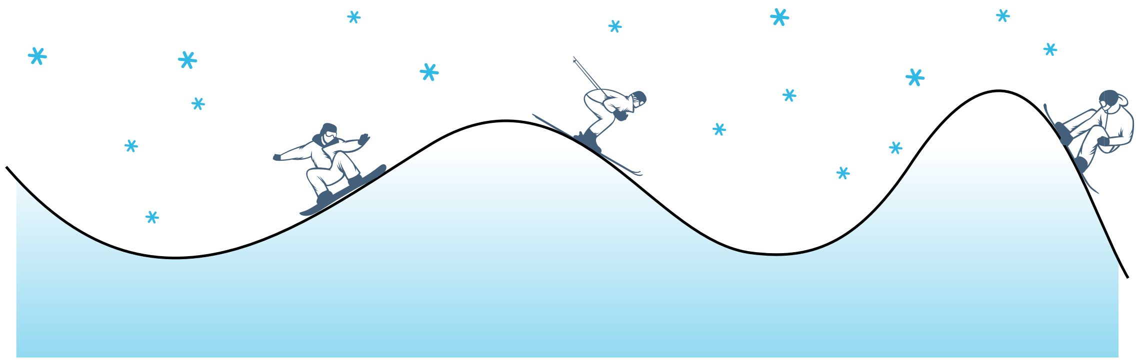
Lad *f* være en funktion, som er differentiabel i et åbent interval *I*. Da gælder:

a) $f'(x) > 0$ for alle $x \in I \quad \Rightarrow \quad f$ er voksende i I
b) $f'(x) < 0$ for alle $x \in I \quad \Rightarrow \quad f$ er aftagende i I
c) $f'(x) = 0$ for alle $x \in I \quad \Rightarrow \quad f$ er konstant i I

Er den ene ende eller begge ender af intervallet *I* endelig, kan højresiderne udvides til at gælde i det udvidede interval $\tilde{I}$, som indeholder endepunkterne – såfremt *f* er kontinuert i det udvidede interval.

Bevis: Sætningen synes næsten selvindlysende. Hvis differentialkvotienten for eksempel er positiv overalt i intervallet *I*, vil tangenten til grafen have en positiv hældning overalt i intervallet, hvorfor det synes klart, at funktionen må være voksende i I. Det er imidlertid svært at bevise. Det skyldes at differentiabilitet er en "lokal egenskab" (se bemærkning 3.11), mens monotoni er en mere global egenskab. Den interesserede læser kan konsultere opgave 326* for et stringent bevis. Det involverer brug af en *middelværdisætning*.

□



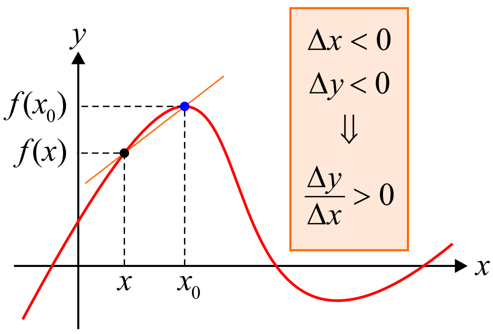
I afsnit 1.4 så vi også på begrebet *lokalt ekstremum*, som enten kan være et *lokalt maksimum* eller et *lokalt minimum*. Til forskel fra et (globalt) maksimum er et lokalt maksimum i x_0 defineret ved, at f blot skal have et maksimum i x_0, når man begrænser funktionen til et vilkårligt lille åbent interval omkring punktet. Tilsvarende med et lokalt minimum. Men hvordan hænger det sammen med differentiabilitet? Jo der gælder:

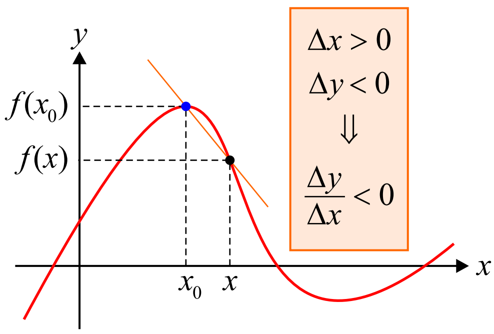
Sætning 3.23

Lad f være en funktion, som er differentiabel i et punkt x_0. Da gælder:

(16) $$f \text{ har lokalt ekstremum i } x_0 \;\Rightarrow\; f'(x_0) = 0$$

Bevis: Igen virker sætningen fuldstændig selvindlysende: Ved en "lille lokal bund" eller "lille lokal top" på en graf vil der nødvendigvis være en vandret tangent. Vi skal dog give et stringent bevis for tilfældet, hvor f har et lokalt maksimum i x_0. Beviset for et lokalt minimum er helt analogt. Lidt i stil med beviset for sætning 3.20 kan vi vælge x på henholdsvis venstre og højre side af x_0 og se, hvilken betydning det har for differenskvotienten. Vi ser, at differenskvotienten er negativ, når x er på højre side og positiv, når x er på venstre side af x_0. Igen kan det oversættes grafisk til sekanthældninger.





Vi ved, at *f* er differentiabel i x_0. Derfor må differenskvotienten have en grænseværdi, for $\Delta x \to 0$. Denne grænseværdi skal være den samme, uanset hvilken side man nærmer sig til 0 fra. Den eneste mulighed er da, at grænseværdien må være 0. Dermed har vi bevist, at $f'(x_0) = 0$.

□

Bemærkning 3.24

Implikationen i sætning 3.23 kan ikke vendes om, dvs. der gælder *ikke*, at hvis differentialkvotienten er 0 i et punkt x_0, så har *f* et lokalt ekstremum i punktet. Funktionen i eksempel 3.21 er et godt modeksempel på det. En anden interessant erkendelse fra eksempel 3.21 er, at en funktion ikke behøver være konstant noget sted, selvom der er et punkt, hvori differentialkvotienten er 0. Er funktionen det derimod i et åbent interval, så er funktionen konstant i dette interval, jf. sætning 3.22 c).

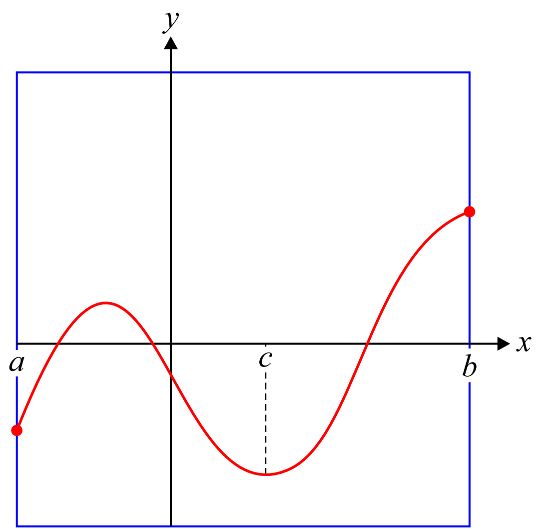
Sætning 3.25

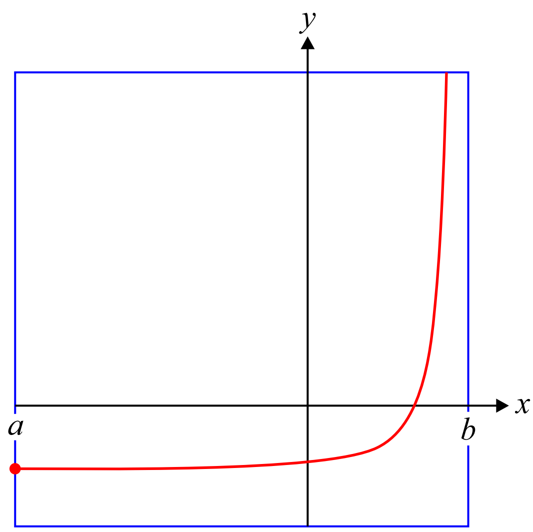
En funktion, som er kontinuert i et *lukket* interval har både et maksimum og et minimum i intervallet.

Bevis: Også denne sætning kan synes meget naturlig, da man i et interval kan tænke på en kontinuert funktion som havende en sammenhængende graf. Generelt er sætningen dog vanskelig at bevise, så vi undlader det.

□

Figuren nedenfor til venstre illustrerer situationen: *f* er kontinuert på det lukkede interval $[a,b]$. Vi ser, at funktionen har minimum i $x = c$ og maksimum i $x = b$. Figuren til højre forklarer derimod, hvad der kan ske, hvis intervallet ikke er lukket. Her er *f* defineret på intervallet $[a,b[$. Funktionen har godt nok et minimum i $x = a$ men har intet maksimum – det skal forestille, at *f* har en lodret asymptote i $x = b$.





Med ovenstående teoretiske resultater er det på tide at kigge på deres praktiske anvendelser i forbindelse med at bestemme monotoniforhold og eventuelle lokale og globale ekstrema for aktuelle funktioner. Her er fremgangsmåden ofte følgende:

Monotoniforhold i praksis

1. Bestem de $x \in Dm(f)$, hvori grafen har vandret tangent, dvs. hvor $f'(x) = 0$.
2. Lav en fortegnslinje for $f'(x)$, hvorpå definitionsmængden er indtegnet samt de punkter, hvor der er vandret tangent.
3. Fortegnet for $f'(x)$ i hvert af de intervaller fra definitionsmængden, som er ad skilt af punkterne, hvor $f'(x) = 0$, mangler at blive bestemt. Det gøres ved i hvert af intervallerne at indsætte en selvvalgt x-værdi i $f'(x)$. Fortegnene indsættes i fortegnslinjen omtalt under punkt 2.
4. Monotoniforholdene opskrives ud fra tallinjen for $f'(x)$. Funktionen er voksende i de intervaller, hvor fortegnet er + og aftagende i de intervaller, hvor fortegnet er –. Endepunkterne skal her medtages, såfremt f er kontinuert (evt. blot fra den relevante side) i punktet. Forekommer kombinationen + 0 + på tallinjen for $f'(x)$ skal intervallerne slås sammen. Tilsvarende med – 0 –.

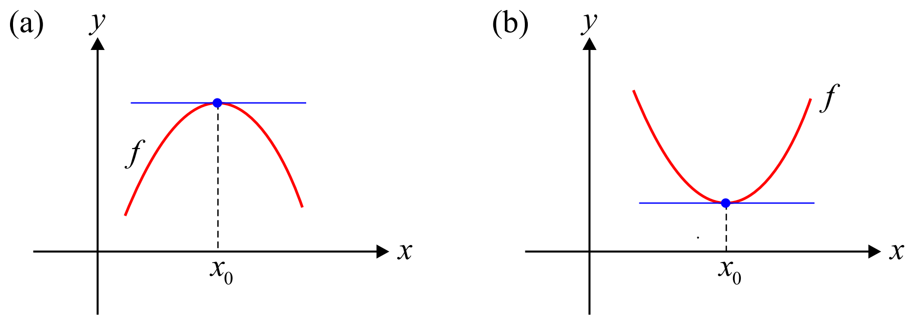
Lokale/globale ekstrema i praksis

5. Lokale ekstrema: Undersøg punkter x_0, hvor $f'(x_0) = 0$. Hvis f' har fortegns variationen $+\,0\,-$ omkring x_0, så er der *lokalt maksimum* i x_0. Hvis fortegnsvariationen derimod er $-\,0\,+$, er der *lokalt minimum* i x_0.
6. Globale ekstrema: Undersøg funktionsværdierne i punkter, hvor $f'(x) = 0$ samt "enderne af definitionsmængden". Det kan være en funktionsværdi i et endepunkt af et interval, grænseværdien af funktionen for x gående imod et tal eller $-\infty$ eller ∞. Det vises bedst i eksempler nedenfor.

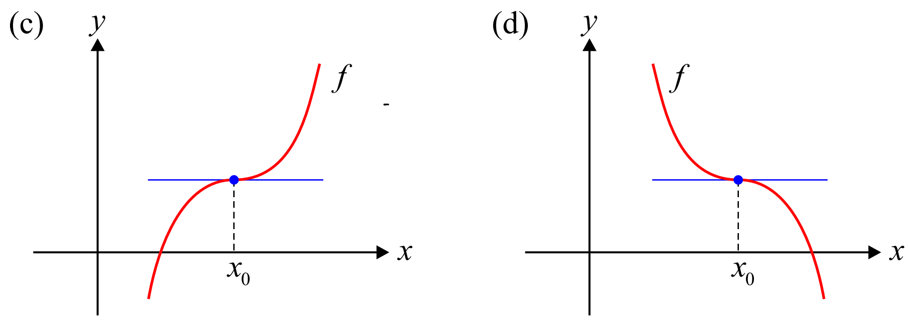
Bemærkning 3.26

Forudsætningen for at metoden under punkt 3 ovenfor virker er, at f' ikke skifter fortegn i de omtalte intervaller. Tankegangen er, at hvis f' er henholdsvis negativ og positiv i to punkter i et interval, så må der være et punkt imellem de to, hvor $f'(x) = 0$. Men disse har vi jo allerede indregnet! Her har vi stiltiende forudsat, at f' er *kontinuert* i intervallerne! Heldigvis er det opfyldt for stort set alle de funktioner, vi kommer til at arbejde med. Hvis funktionen er to gange differentiabel er dette for eksempel opfyldt, jf. sætning 3.13 – anvendt på funktionen f'.

På figurerne på næste side er angivet nogle mulige variationer af fortegn for f' i et punkt x_0, hvor grafen har vandret tangent. I princippet kunne differentialkvotienten også være 0 til højre og/eller venstre side af x_0, men disse lidt specielle tilfælde er ikke interessante i denne forbindelse.



lokalt maksimum (+ 0 -)   lokalt minimum (- 0 +)



vandret vendetangent (+ 0 +)   vandret vendetangent (- 0 -)

Eksempel 3.27

Betragt funktionen $f(x) = \frac{1}{8}x^4 - \frac{3}{4}x^2 + x - 2$. Vi skal bestemme monotoniforhold og bestemme eventuelle lokale og globale ekstrema for funktionen.

Da der ikke er oplyst noget interval at betragte funktionen i, så må vi selv bestemme definitionsmængden. Den er klart hele R, da alle værdier af x kan sættes ind i forskriften. Nedenfor bruger vi ikke tid på selv at differentiere og løse ligninger, men lader vores CAS-værktøj gøre arbejdet.

Monotoniforhold

Steder med vandret tangent:

$$f'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = -2 \vee x = 1$$

Differentialkvotienter i mellemliggende punkter:

$$f'(-3) = -8,\;\; f'(0) = 1,\;\; f'(2) = 2$$

Heraf får vi følgende fortegnslinje for f' :

x		-2		1	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$

Heraf ses:
f er aftagende i $\left]-\infty,-2\right]$
f er voksende i $\left[-2,\infty\right[$

Lokale og globale ekstrema

Funktionsværdierne i de interessante punkter:

$f(-2)=-5$
$f(1)=-1{,}625$

Vi ser:

f har lokalt maksimum i $x=-2$ med værdi –5.
f har vandret vendetangent i $x=1$.

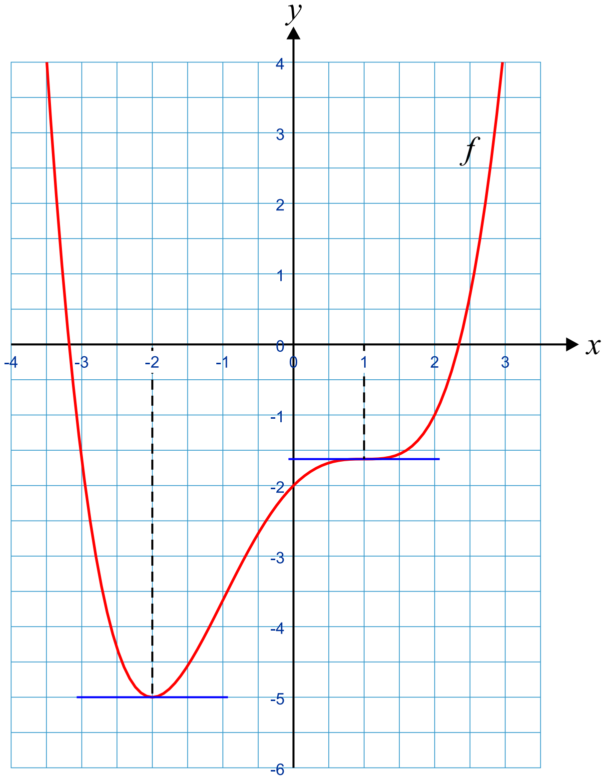
Funktionens opførsel for $x \to -\infty$ og for $x \to \infty$:

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\infty$

$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$

Heraf ser vi:

f har intet maksimum.
f har (globalt) minimum i $x=-2$ med værdi –5.



□

Bemærkninger 3.28

Det bemærkes, at hvis man som i eksempel 3.27 har fortegnsvariationen $+\,0\,+$ eller for den sags skyld $-\,0\,-$ omkring et punkt, hvor grafen har vandret tangent, så skal monotoniintervallerne omkring punktet slås sammen til ét! Angående funktionens opførsel for x gående imod $\pm\infty$, så kan det også nemt forstås uden brug af CAS-værktøj: Vi har at gøre med et *polynomium* og her vil leddet af højeste grad altid "vinde", når der indsættes tilstrækkeligt store positive/negative tal. Dette ses helt tydeligt af omskrivningen:

$$\tfrac{1}{8}x^4-\tfrac{3}{4}x^2+x-2 \;=\; x^4\cdot\left(\tfrac{1}{8}-\tfrac{3}{4}\cdot\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}-\frac{2}{x^4}\right)$$

Parentesen vil klart gå mod $\frac{1}{8}$ for $x\to-\infty$ eller $x\to\infty$. Da *graden* af højeste-gradsleddet $\frac{1}{8}x^4$ er et *lige* tal, vil grænseværdien for hele udtrykket være $+\infty$, hvad enten vi lader $x\to-\infty$ eller $x\to\infty$. Funktionen antager med andre ord vilkårligt høje værdier, hvorfor funktionen ikke har noget maksimum. En sidste ting, der lige skal nævnes er, at et CAS-værktøj sandsynligvis vil skrive løsningerne til $f'(x)=0$ som –2, 1, 1. At roden 1 skrives to gange skyldes, at polynomiet $f'(x)$ har 1 som *dobbeltrod*.

Eksempel 3.29

Betragt funktionen $f(x) = x^3 - 3x^2 + \ln(x)$, $x \in \left]0,3\right]$. Vi vil bestemme monotoniforhold og eventuelle lokale og globale ekstrema for funktionen.

Monotoniforhold

Steder med vandret tangent:

$$f'(x) = 0 \iff x = 0{,}4661781481 \lor x = 1{,}908482912$$

Differentialkvotienter i mellemliggende punkter:

$$f'(0{,}1) = 9{,}43 \qquad f'(1) = -2 \qquad f'(2) = 0{,}5$$

Heraf får vi følgende fortegnslinje for f' :

x	0		0,466		1,908		3
$f'(x)$	$\vdots$	+	0	−	0	+	

Heraf ses:

f er voksende i $\left]0;0{,}466\right]$ og i $\left[1{,}908;3\right]$
f er aftagende i $\left[0{,}466;1{,}908\right]$

Lokale og globale ekstrema

Funktionsværdierne i de interessante punkter:

$$f(0{,}4661781481) = -1{,}313842825$$
$$f(1{,}908482912) = -3{,}329331722$$
$$f(3) = 1{,}098612289$$

Vi ser:

f har lokalt maksimum i $x = 0{,}466$ med værdi $-1{,}314$.
f har lokalt minimum i $x = 1{,}908$ med værdi $-3{,}329$.

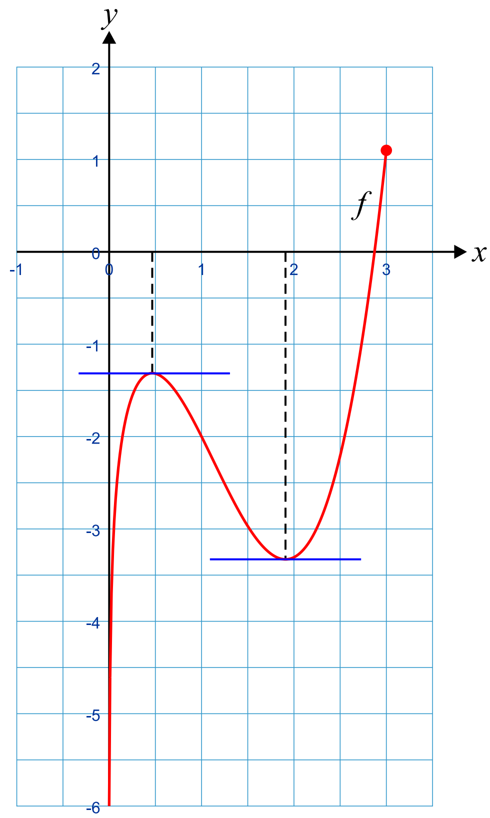
Funktionens opførsel for $x \to 0^+$:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$$

Funktionen har altså en *lodret asymptote* i $x = 0$

Heraf ser vi:

f har maksimum i $x = 3$ med værdi 1,099.
f har intet minimum.



□

Bemærkninger 3.30

Igen kunne vi godt selv have forudsagt funktionens grænseværdi uden brug af CAS-værktøj. Det er velkendt, at den naturlige logaritmefunktion går mod $-\infty$ for x gående mod 0 fra højre. Eftersom polynomiedelen klart går mod 0 for $x \to 0^+$ har vi, at hele funktionen vil gå mod $-\infty$ for $x \to 0^+$. Dermed antager funktionen vilkårligt små værdier, så der ikke findes et minimum. Eksempel 3.29 illustrerer også et af de tilfælde, hvor funktionen antager sin maksimumsværdi i et intervalendepunkt, her $x = 3$. Det er med andre ord vigtigt også at udregne funktionsværdier i endepunkter af intervaller – vel at mærke indenfor funktionens definitionsmængde.

Eksempel 3.31

Vis at funktionen $f(x) = 0.1 \cdot x^3 - 0.6 \cdot x^2 + 1.8 \cdot x - 3$ er voksende.

Som sædvanlig undersøger vi for vandrette tangenter:

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad L = \varnothing$$

Ligningen har ingen løsninger, og det er ikke fordi CAS-værktøjet ikke kan finde dem. Der er ingen reelle løsninger! Da funktionen er defineret på hele R, har vi altså ikke noget punkt at sætte ind på fortegnslinjen for f'. Vi udregner derfor kun differentialkvotienten i et enkelt punkt: $f'(0) = 1{,}8$. Da det er et positivt tal og f i øvrigt har en kontinuert afledet, ser fortegnslinjen for f' altså således ud:

x	
$f'(x)$	$+$

Det viser at funktionen er voksende i hele sit interval, også jf. sætning 3.22.

□

3.6 Funktionsundersøgelser

I forrige afsnit har vi allerede været godt i gang med et par af de elementer, man sædvanligvis vil undersøge, når man bliver bedt om at foretage en funktionsundersøgelse af en funktion. En mere fuldkommen liste vil indeholde følgende punkter:

Funktionsundersøgelser

- Definitionsmængde
- Nulpunkter
- Monotoniforhold
- Vandrette og lodrette asymptoter
- Lokale og globale ekstrema
- Værdimængde
- Graf

Vi har i høj grad udnyttet funktionens differentiabilitet samt at differentialkvotienten er kontinuert. Vi skal da også stadig antage, at de betragtede funktioner har disse "pæne" egenskaber. Lad os se på et eksempel, hvor vi undersøger de øvrige punkter i listen ovenfor.

Eksempel 3.32

Givet funktionen. $f(x) = 0.5x + \dfrac{3x}{x-2}$. Foretag en funktionsundersøgelse af f.

Løsning: Vi gennemgår punkterne i skemaet ét efter ét. Igen antages det, at vi har et CAS-værktøj til rådighed.

1. Definitionsmængden

Vi ser, at det eneste problem, der kan opstå er, at nævneren kan blive 0:

$$N = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x-2=0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2$$

Altså må vi udelade 2 og får dermed: $Dm(f) = R\backslash\{2\}$.

2. Nulpunkter

$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -4 \;\vee\; x = 0$

Dermed har funktionen nulpunkter i $x = -4$ og $x = 0$.

3. Monotoniforhold

Vi undersøger for vandrette tangenter:

$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -1{,}464101615 \;\vee\; x = 5{,}464101615$

Differentialkvotienter i mellemliggende punkter:

$f'(-2) = 0{,}125 \qquad f'(0) = -1 \qquad f'(3) = -5{,}5 \qquad f'(6) = 0{,}125$

Heraf får vi følgende fortegnslinje for f':

x		$-1{,}464$		2		$5{,}464$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$\vdots$	$-$	0	$+$

Heraf ses:

f er voksende i $\left]-\infty; -1{,}464\right]$ og i $\left[5{,}464; \infty\right[$

f er aftagende i $\left[-1{,}464; 2\right[$ og i $\left]2; 5{,}464\right]$

4. Vandrette og lodrette asymptoter

Der er mulighed for en lodret asymptote i $x = 2$, hvor funktionen ikke er defineret:

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty \qquad \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \infty$

De konkluderes, at der er en lodret asymptote i $x = 2$.

Angående vandrette asymptoter, så undersøger vi funktionsværdien for $x \to \pm\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

Vi konkluderer, at der *ikke* er nogen vandrette asymptoter (så skulle mindst en af grænserne have været et fast tal).

5. Lokale og globale ekstrema

Vi udregner funktionsværdierne i de punkter, hvori der er vandret tangent:

$$f(-1{,}464101615) = 0{,}5358983845$$
$$f(5{,}464101615) = 7{,}464101615$$

Af fortegnslinjen for f' under punkt 3 ser vi:
f har lokalt maksimum i $x = -1{,}464$ med værdi 0,536.
f har lokalt minimum i $x = 5{,}464$ med værdi 7,464.

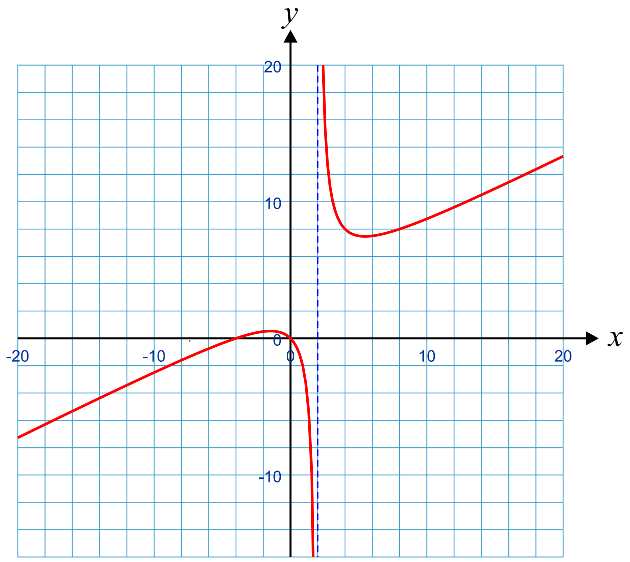
6. Værdimængde

Værdimængden er som bekendt mængden af alle de *y*-værdier, som kan opnås ved indsættelse i funktionsforskriften. Vi har at gøre med en differentiabel funktion, som dermed også er kontinuert. Derfor er grafen *sammenhængende* i de intervaller, hvori *f* er defineret, dvs. her $]-\infty,2[$ og $]2,\infty[$. Via monotoniforhold, de lokale ekstrema og de udregnede grænseværdier får vi værdimængden til at være foreningsmængden af to intervaller:

$$Vm(f) = \left]-\infty;\, 0{,}536\right] \cup \left[7{,}464;\, \infty\right[$$

7. Graf

Grafen er vist nedenfor. Man genkender, at grafen skærer *x*-aksen i –4 og 0 (nulpunkterne) samt stederne for lokalt minimum og lokalt maksimum. Den lodrette asymptote er desuden tegnet ind som en stiplet lodret linje.



Bemærkning 3.33

Igen kunne man godt have forudset den lodrette asymptote i eksempel 3.32 uden brug af CAS-værktøj. Når man lader x nærme sig til 2 fra højre, vil nævneren nærme sig til 0 fra højre. Da tælleren nærmer sig til 6, som er positiv, vil hele brøken nærme sig til $+\infty$. Det andet led, vil nærme sig til 1.5, hvorfor hele udtrykket vil nærme sig til $+\infty$. Tilsvarende argumenteres for, at $f(x)$ går mod $-\infty$ for $x \to 2^-$. En anden ting: f' er negativ på begge sider af $x = 2$. Det betyder dog *ikke* at vi kan smække de to intervaller sammen til ét, hvor funktionen er voksende, for f er ikke defineret i 2! Det er altså ikke samme situation som i eksempel 3.27.

Bemærkning 3.34

Det skal tilføjes, at man også kan få flere former for CAS-værktøj til at udregne *uligheder*. Det kunne have været brugt til at udregne monotoniintervallerne i dette og forrige afsnit. Vores hidtidige metode fungerer dog pænt og giver overblik.

Eksempel 3.35

Bestem definitionsmængden for funktionen $h(x) = \sqrt{10x - x^2}$.

Løsning: Vi kan betragte funktionen h som værende sammensat af de to funktioner f og g, hvor $g(x) = 10x - x^2$ er den *indre funktion* og $f(y) = \sqrt{y}$ er den *ydre funktion*, jf. afsnit 1.5. Som bekendt kan man ikke tage kvadratroden af et negativt tal indenfor mængden af reelle tal. Derfor er $Dm(f) = [0, \infty[$. Vi skal altså sikre os, at den indre funktion ikke giver noget negativt. Derfor løser vi uligheden $10x - x^2 \geq 0$. Ifølge Bemærkning 3.34 kan man få sit CAS-værktøj til at give svaret: $x \in [0,10]$. Der er dog her tale om en andengradsulighed, så man kan også løse den manuelt som sådan (se eksempel 2.14). En tredje metode kan være at bruge en metode analog til den, vi tidligere har brugt til at bestemme monotoniforhold med – denne gang vel at mærke for funktionen og ikke dens differentialkvotient: Altså lave en fortegnslinje for $g(x)$ ved at løse $g(x) = 0$ og derefter udregne funktionsværdier omkring løsningerne … Under alle omstændigheder ender vi med svaret: $Dm(h) = [0,10]$.

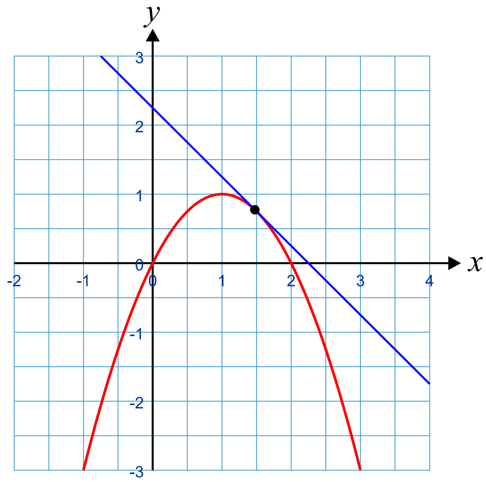
3.7 Lær at bruge solve i en mere avanceret kontekst

Vi er vant til at bruge et CAS-værktøj til at løse en simpel ligning, hvor der er én ubekendt, ofte x. I dette afsnit skal vi se, hvordan man kan bruge *solve* til at løse mere komplekse opgaver. Det kan være i forbindelse med at løse såkaldte *parameteropgaver*. Her har man at gøre med en funktion, hvori der figurerer én eller flere parametre, som betyder, at man i principper har at gøre med en hel familie af funktioner, parametriseret ved én eller flere parametre. Man søger så blandt denne familie af funktioner en funktion, som opfylder noget bestemt. Ikke sjældent vil det endda munde ud i at løse to ligninger med to ubekendte. Kunsten består i at gennemskue, hvilke ligninger man skal stille op og løse med *solve*-kommandoen. Vi skal se på en række eksempler.

Eksempel 3.36

Lad $f(x) = -x^2 + 2x$. Bestem *a*, så linjen $y = -x + a$ er en tangent til grafen for f.

Løsning: Vi sætter $p(x) = -x + a$. Det at linjen er tangent til grafen for *f*, kan vi karakterisere ved, at der er et ukendt punkt x_0 (førstekoordinaten til røringspunktet), hvori funktionerne *f* og *p* både har samme funktionsværdi og samme differentialkvotient. Både a og x_0 er ukendte, men vi har også to ligninger. De kan løses med et CAS-værktøj:



$$p(x_0) = f(x_0) \;\wedge\; p'(x_0) = f'(x_0)$$
$$\Updownarrow$$
$$a = 2{,}25 \;\wedge\; x_0 = 1{,}5$$

Tegner vi graferne for de to funktioner kan vi da også se, at det stemmer. Røringspunktet fås til $P_0(1{,}5\,;0{,}75)$.

□

Bemærkning 3.37

Man kunne naturligvis også have tænkt således i problemstillingen i eksempel 3.36: Tangenten har klart hældning –1, uanset værdien af *a*. Derfor søges en tangent til grafen for f, hvis hældning er –1. Derfor løses ligningen $f'(x) = -1$, som vil give løsningen 1,5. Denne værdi kan indsættes i forskriften for *f*, hvorefter *y*-værdien til røringspunktet haves. Dernæst kan a nemt bestemmes. Denne metode kræver imidlertid, at man kan løse ligningerne én ad gangen. Det er ikke muligt i opgave 361. Det er mere uniformt at løse opgaven som vist ovenfor. Man skal typisk opskrive de to ligninger, foruden at fortælle værktøjet, hvad de to ubekendte er. Det kunne se ud noget i stil med:

$$solve\left(\{p'(x_0) = f'(x_0), p(x_0) = f(x_0)\}, \{x_0, a\}\right)$$

Ændring af parameteren a bevirker i øvrigt en *parallelforskydning* af grafen for *f* i eksemplet ovenfor!

□

Eksempel 3.38

Givet funktionen $f(x) = e^{0{,}5x} - a \cdot x$. Bestem parameteren *a*, således at grafen for *f* går igennem punktet $(5,0)$.

Læsning: Oplysningen karakteriseres ved, at vi skal have $f(5)=0$. Efter at have defineret funktionen, kan vi derefter løse ligningen $f(5)=0$ med hensyn til *a*:

$$f(5)=0 \;\Leftrightarrow\; a=2{,}436498792$$

Det overlades til læseren at tegne grafen for *f* med den anførte værdi af *a*. Så skulle grafen gerne gå igennem punktet $(5,0)$.

□

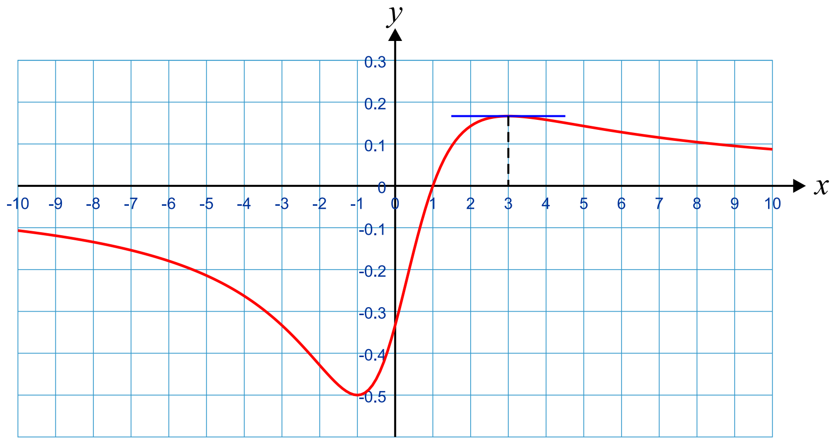
Eksempel 3.39

Lad $f(x)=\dfrac{x+a}{x^2+3}$. Bestem *a* således, at funktionen har et lokalt maksimum i $x=3$.

Løsning: Vi karakterer oplysningen til at der skal gælde $f'(3)=0$. Efter at have defineret funktionen løses ligningen med hensyn til *a*:

$$f'(3)=0 \;\Leftrightarrow\; a=-1$$

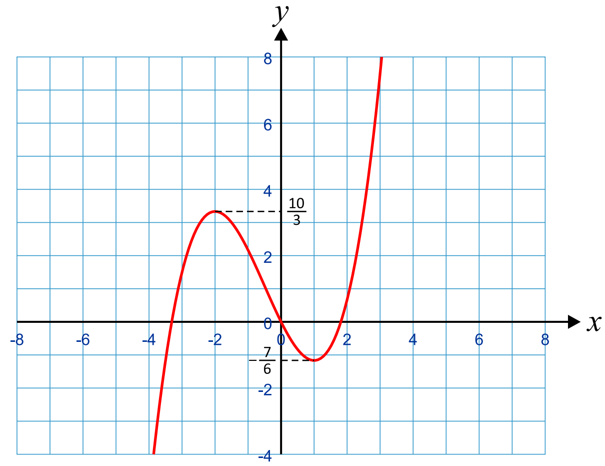
Tilbage er naturligvis at påvise, at *f* med denne værdi af *a* virkelig har lokalt maksimum. Dette overlades til læseren. Tegnes grafen for $a=-1$ ser det således ud, hvor der dog ikke er samme skalering på akserne:



Eksempel 3.40

Lad $f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-2x+a$. For hvilke værdier af *a* har *f* netop tre nulpunkter?

Løsning: Denne gang er situationen sværere. for hvordan skal vi karakterisere oplysningen med de tre nulpunkter matematisk? For det første ser vi, at parameteren *a* blot er lagt til i forskriften. Det betyder, at en ændring af *a* blot vil bevirke en parallelforskydning af grafen i *y*-aksens retning. Vi kan prøve at tegne grafen for tilfældet $a=0$, dvs. hvor *a* ikke er tilstede. Det giver grafen vist på næste side. Det overlades til læseren at vise, at funktionen har lokalt maksimum i $x=-2$ med værdi $\frac{10}{3}$ og lokalt minimum i $x=1$ med værdi $-\frac{7}{6}$. Det indses, at man kan flytte grafen opad med $\frac{7}{6}$ eller nedad med $\frac{10}{3}$, før grafen rammer *x*-aksen i mindre end 3 punkter. Derfor er svaret på opgaven, at *a* skal ligge i det åbne interval $\left]-\frac{10}{3},\frac{7}{6}\right[$ for at *f* netop har tre nulpunkter.



□

Eksempel 3.41

Lad $f(x)=\sqrt{4-x^2}$, $x\in[-2,2]$. Det oplyses at grafen for *f* har en tangent, som passerer igennem punktet $(5,0)$. Bestem tangentens ligning.

Løsning: Som sædvanlig gælder det om at omsætte oplysningerne til ligninger og gøre sig klart hvilke ubekendte der er. Lad grafen for førstegradspolynomiet $p(x)=a\cdot x+b$ repræsentere tangenten. Kald *x*-koordinaten til tangentens røringspunktet for x_0. Funktionerne *p* og *f* skal have samme funktionsværdi og tangenthældning i x_0, hvilket giver ligningerne $p(x_0)=f(x_0)$ og $p'(x_0)=f'(x_0)$. Endelig fås ligningen $p(5)=0$ ud fra oplysningen om punktet, som tangenten skal passere igennem. De ubekendte er a, b og x_0. Derfor gælder det om at løse tre ligninger med tre ubekendte. Vi får:

$$p(x_0)=f(x_0) \;\wedge\; p'(x_0)=f'(x_0) \;\wedge\; p(5)=0$$

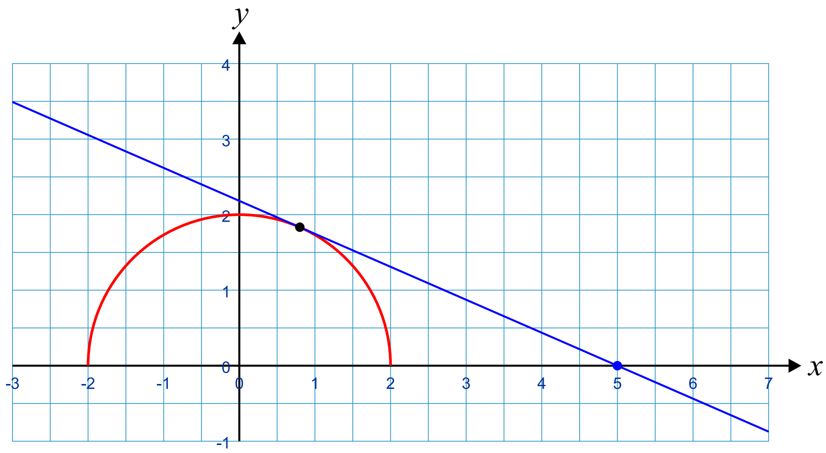
$$\Updownarrow$$

$$a=-0{,}4364357805 \;\wedge\; b=2{,}182178902 \;\wedge\; x_0=0{,}8$$

I praksis skal man i sit CAS-værktøj først definere funktionerne *f* og *p* og derefter typisk løse ligningssystemet med en kommando noget i retningen af:

$$solve\left(\{p'(x_0)=f'(x_0), p(x_0)=f(x_0), p(5)=0\},\{x_0,a,b\}\right)$$

hvor både ligninger og de ubekendte oplyses.



3.8 Regneregler for differentiation

Hidtil har vi kun udledt differentialkvotienterne for et ganske lille antal funktioner, herunder x^2 og $1/x$. Men hvad med for eksempel følgende funktioner: $5\cdot x^2$ eller x^2+1/x. Er vi nødt til at gå tilbage til tretrinsreglen for at undersøge, om disse funktioner er differentiable og i givet fald bestemme deres differentialkvotienter? Svaret er heldigvis nej. Der gælder nemlig nogle meget handy regneregler for differentiable funktioner, som vi skal udlede i dette afsnit og som letter vores arbejde med at differentiere væsentligt!

Sætning 3.42 (Sum, differens og konstant-reglen)

Lad f og g være to funktioner, som er differentiable i x_0, og lad k være en konstant. Da er funktionerne $f+g$, $f-g$ samt $k\cdot f$ differentiable i x_0 med følgende differentialkvotienter:

a) $(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$

b) $(f-g)'(x_0)=f'(x_0)-g'(x_0)$

c) $(k\cdot f)'(x_0)=k\cdot f'(x_0)$

Bevis: Vi nøjes med at bevise a). Beviset for de to øvrige overlades til læseren i opgave 368. For simpelheds skyld kalder vi sumfunktionen for h :

$$h(x)=(f+g)(x)=f(x)+g(x)$$

Ifølge tretrinsreglen skal vi gribe fat i differenskvotienten for h. Eftersom der kommer flere differenskvotienter i spil i beviset, anbringer vi et indeks på funktionstilvæksten for at fortælle, hvilken funktion, den hører til. Vi omskriver:

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y_h}{\Delta x} &= \frac{h(x)-h(x_0)}{\Delta x}\\ &= \frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{\Delta x}\\ &= \frac{\big(f(x)+g(x)\big)-\big(f(x_0)+g(x_0)\big)}{\Delta x}\\ &= \frac{f(x)-f(x_0)+g(x)-g(x_0)}{\Delta x}\\ &= \frac{f(x)-f(x_0)}{\Delta x}+\frac{g(x)-g(x_0)}{\Delta x}\\ &= \frac{\Delta y_f}{\Delta x}+\frac{\Delta y_g}{\Delta x}\end{aligned} \tag{17}$$

I linje 4 har vi hævet parenteserne i tælleren og byttet lidt rundt på rækkefølgen af leddene. I linje 5 er der blevet sat på hver sin brøkstreg. I linje 6 registrerer vi, at vi i linje 5 faktisk har summen af differenskvotienterne for henholdsvis f og g. Det er faktisk hele idéen i beviset, nemlig at omskrive differenskvotienten for den funktion, vi *ikke* ved noget om – nemlig sumfunktionen h – til et udtryk, som vi ved noget om. Men hvad ved vi om differenskvotienterne for f og g? Jo vi ved, at f og g er differentiable i x_0. Dermed har deres differenskvotienter en grænseværdi, nemlig henholdsvis $f'(x_0)$ og $g'(x_0)$ for $\Delta x \to 0$:

(18) $$\frac{\Delta y_h}{\Delta x} = \frac{\Delta y_f}{\Delta x} + \frac{\Delta y_g}{\Delta x} \to f'(x_0)+g'(x_0) \text{ for } \Delta x \to 0$$

Eftersom differenskvotienten for h har en grænseværdi for $\Delta x \to 0$, er sumfunktionen h differentiabel i x_0 og differentialkvotienten for h er lig denne grænseværdi, altså:

(19) $$h'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

hvormed a) er bevist.

□

Eksempel 3.43

Med sætning 3.42 er vi pludseligt blevet i stand til at differentiere et væld af nye funktioner. Regel a) siger, at "differentialkvotienten af en sum er lig med summen af differentialkvotienterne". Regel b) siger det tilsvarende om en differens, mens regel c) godtgør, at vi "kan sætte multiplikative konstanter udenfor":

$$\left(x^2+\frac{1}{x}\right)' = \left(x^2\right)' + \left(\frac{1}{x}\right)' = 2x + \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 2x - \frac{1}{x^2}$$
$$(x-5)' = (x)' - (5)' = 1-0 = 1$$
$$\left(5\cdot x^2\right)' = 5\cdot\left(x^2\right)' = 5\cdot 2x = 10x$$

□

Det næste spørgsmål, der kan trænge sig på, er, om differentialkvotienten af et produkt er produktet af differentialkvotienterne? Det viser sig *ikke* at være tilfældet. Men der gælder alligevel en smuk sætning:

Sætning 3.44 (Produktreglen for differentiation)

Lad f og g være to funktioner, som er differentiable i x_0. Da er produktfunktionen $f\cdot g$ differentiabel i x_0 med differentialkvotienten givet ved

(20) $$(f\cdot g)'(x_0) = f'(x_0)\cdot g(x_0) + f(x_0)\cdot g'(x_0)$$

Bevis: Den overordnede idé i beviset er den samme som i beviset for sætning 3.42 a), blot er det mere teknisk kompliceret her. Vi lader h repræsentere produktfunktionen:

$$h(x) = (f\cdot g)(x) = f(x)\cdot g(x)$$

Vi regner på differenskvotienten for h :

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta y_h}{\Delta x} &= \frac{h(x)-h(x_0)}{\Delta x} \\
&= \frac{(f\cdot g)(x)-(f\cdot g)(x_0)}{\Delta x} \\
&= \frac{f(x)\cdot g(x)-f(x_0)\cdot g(x_0)}{\Delta x} \\
&= \frac{f(x)\cdot g(x)-f(x_0)\cdot g(x)+f(x_0)\cdot g(x)-f(x_0)\cdot g(x_0)}{\Delta x} \\
&= \frac{f(x)\cdot g(x)-f(x_0)\cdot g(x)}{\Delta x} + \frac{f(x_0)\cdot g(x)-f(x_0)\cdot g(x_0)}{\Delta x} \\
&= \frac{\big(f(x)-f(x_0)\big)\cdot g(x)}{\Delta x} + \frac{f(x_0)\cdot\big(g(x)-g(x_0)\big)}{\Delta x} \\
&= \frac{f(x)-f(x_0)}{\Delta x}\cdot g(x) + f(x_0)\cdot\frac{g(x)-g(x_0)}{\Delta x} \\
&= \frac{\Delta y_f}{\Delta x}\cdot g(x) + f(x_0)\cdot\frac{\Delta y_g}{\Delta x}
\end{aligned}$$

I linje 4 er et ekstra led (markeret med rødt) både trukket fra og lagt til, hvilket ikke ændrer på noget. I linje 5 er der sat på hver sin brøkstreg. I linje 6 er en fælles faktor i tælleren sat udenfor parentes – i begge brøker. I linje 7 er den fælles faktor sat helt ned bagved eller foran brøken. Derved genkender vi i linje 8 differenskvotienterne for *f* og *g*.

Eftersom både *f* og *g* er antaget differentiable i x_0, så ved vi, at differenskvotienterne har en grænseværdi for $\Delta x \to 0$. Da *g* er differentiabel i x_0, er funktionen også *kontinuert* i punktet ifølge sætning 3.13. Der gælder med andre ord: $g(x) \to g(x_0)$ for $\Delta x \to 0$. I det andet led er $f(x_0)$ bare en konstant! Alt i alt konkluderer vi, at det sidste udtryk i udregningerne ovenfor virkelig har en grænseværdi for $\Delta x \to 0$:

$$(21) \quad \frac{\Delta y_h}{\Delta x} = \frac{\Delta y_f}{\Delta x}\cdot g(x) + f(x_0)\cdot\frac{\Delta y_g}{\Delta x} \to f'(x_0)\cdot g(x_0)+f(x_0)\cdot g'(x_0) \quad \text{for } \Delta x \to 0$$

Vi konkluderer, at produktet af funktionerne *f* og *g* er differentiabel i x_0 med den angivne differentialkvotient.

□

Beviset ovenfor er vigtigt, fordi det illustrerer vigtigheden af at være præcis. Resultatet er uventet – man kan ikke altid forlade sig på sin umiddelbare intuition. Produktreglen kan udtrykkes noget i retningen af følgende: "Man differentierer et produkt ved at differentiere den første funktion, lade den anden stå plus lade den første funktion stå og differentiere den anden". Vi skal snart se eksempler på, hvor brugbar denne regel er. Først vil vi dog uden bevis anføre en tilsvarende regel for, hvordan man differentierer en kvotient.

Sætning 3.45 (Kvotientreglen for differentiation)

Lad *f* og *g* være to funktioner, som er differentiable i x_0. Antag desuden at $g(x_0) \neq 0$. Da er produktfunktionen f/g differentiabel i x_0 med differentialkvotienten givet ved

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)\cdot g(x_0) - f(x_0)\cdot g'(x_0)}{\big(g(x_0)\big)^2} \qquad (22)$$

Bevis: Overlades til den interesserede læser i opgave 370.

□

Eksempel 3.46

Med produktreglen og kvotientreglen er vi blevet i stand til at differentiere en lang række af nye funktioner. Lad os for eksempel se på forskellige positive potenser af *x*. Fra opgave 302 ved vi at $(x)' = 1$, og fra sætning 3.6 ved vi, at $(x^2)' = 2x$. Vi kan bruge produktreglen for differentiation i sætning 3.44 til at bestemme differentialkvotienten for x^3, idet vi kan skrive funktionen som produktet $x \cdot x^2$:

$$(x^3)' = (x\cdot x^2)' = (x)'\cdot x^2 + x\cdot (x^2)' = 1\cdot x^2 + x\cdot 2x = x^2 + 2x^2 = 3x^2 \qquad (23)$$

Derfra kan vi gå videre:

$$(x^4)' = (x\cdot x^3)' = (x)'\cdot x^3 + x\cdot (x^3)' = 1\cdot x^3 + x\cdot 3x^2 = x^3 + 3x^3 = 4x^2 \qquad (24)$$

Sådan kunne vi fortsætte. Ja vi kunne endda gøre det for hele, *negative* potenser af *x* (se opgave 371). Vi skal dog stoppe her og nøjes med at formulere resultaterne i den vigtige sætning nedenfor.

□

Sætning 3.47

For ethvert $n \in Z$ er funktionen $f(x) = x^n$ differentiabel, og differentialkvotienten er givet ved $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$.

Bevis: Vi nøjes med indikationerne på sætningens rigtighed i eksempel 3.46 ovenfor. Den interesserede læser kan løse opgave 372 for et nøjere bevis.

□

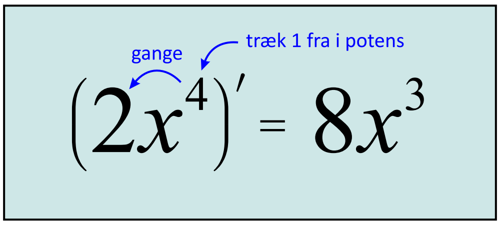
Sætning 3.47 er uhyre vigtig, og vi vil komme til at bruge den meget fremover. Faktisk gælder sætningen også for ikke-heltallige værdier af *n*, dvs. den gælder for generelle potensfunktioner, men det vil vi gemme til næste afsnit. Hvorfor er den vigtig? Jo det er fordi *polynomier* spiller en stor rolle i matematik, og et polynomiums "bestanddele" er netop faktorer på formen x^n. Vi skal se nærmere på det i næste eksempel.

Eksempel 3.48

Vi ønsker at differentiere $f(x)=2x^4$. Konstantreglen fra sætning 3.42 siger, at vi kan sætte konstanten 2 "udenfor", og så ellers bare differentiere x^4 ved hjælp af sætning 3.47:

(25) $$(2\cdot x^4)' = 2\cdot(x^4)' = 2\cdot 4x^{4-1} = 8x^3$$

Konstantreglen er benyttet til første lighedstegn. Effekten af det, der er sket kan illustreres således:



Har vi derimod et polynomium med flere led, som i nedenstående tilfælde, så bruger vi desuden sumreglen og differensreglen fra differentiation fra sætning 3.42:

(26) $$\begin{aligned}(2x^4+x^3-3x^2+3x+5)' &= (2x^4)'+(x^3)'-(3x^2)'+(3x)'+(5)' \\ &= 8x^3+3x^2-6x+3+0 \\ &= 8x^3+3x^2-6x+3\end{aligned}$$

Normalt vil vi faktisk skrive resultatet uden mellemregninger, fordi processen forekommer så nærliggende. Differentierer vi et polynomium, får vi altså altid et nyt polynomium med en grad, som er én mindre.

□

Eksempel 3.49

Lad os se på et par eksempler mere:

$$\begin{aligned}(10x^3-2x^2+11x+6)' &= 30x^2-4x^4+11 \\ (-3x^5+8x^4-7x^2-5)' &= -15x^4+32x^3-14x\end{aligned}$$

Men sætning 3.47 kan også bruges i tilfældet med negative eksponenter og 0:

$$\begin{aligned}(x^{-2}+5x^{-1}-14+2x^2)' &= -2x^{-1}-5x^{-2}-0+4x \\ &= -2x^{-1}-5x^{-2}+4x\end{aligned}$$

□

Eksempel 3.50 (Et gensyn med andengradspolynomier)

Med differentialregningen som redskab, kan vi nu nemt på en alternativ måde bevise den toppunktsformel for en parabel, som er opgivet i sætning 2.6. For et generelt andengradspolynomium $f(x)=a\cdot x^2+b\cdot x+c,\, a\neq 0$ har vi $f'(x)=2ax+b$. I parablens toppunkt gælder der ifølge sætning 3.23, at $f'(x)=0$. Vi løser derfor ligningen:

(27) $$f'(x)=0 \Leftrightarrow 2ax+b=0 \quad f'(x)=0 \Leftrightarrow 2ax+b=0 \Leftrightarrow x=\frac{-b}{2a}$$

For at bestemme y-koordinaten til toppunktet, indsættes x-værdien i forskriften:

(28)
$$\begin{aligned} f(x) &= a\cdot x^2+b\cdot x+c \;=\; a\cdot\left(-\frac{b}{2a}\right)^2+b\cdot\left(-\frac{b}{2a}\right)+c \\ &= a\cdot\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{2a}+c \;=\; \frac{b}{4a}-\frac{2b^2}{4a}+\frac{4ac}{4a} \\ &= \frac{-b^2+4ac}{4a} \;=\; \frac{-(b^2-4ac)}{4a} \;=\; -\frac{d}{4a} \end{aligned}$$

Vi overlader detaljerne til læseren. Vi mangler at bevise sætning 2.9 fra kapitel 2. Her påstås det, at b kan fås som tangenthældningen i $(0,c)$. Det er nemt at verificere:

(29)
$$f'(0)=2a\cdot 0+b=b$$

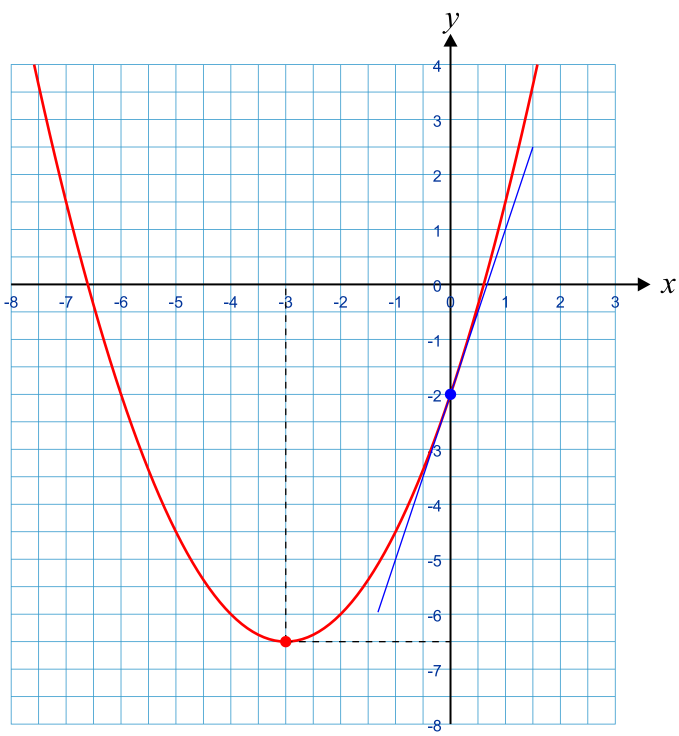
Hvorved det ønskede er vist.

Lad os betragte eksemplet $f(x)=0{,}5x^2+3x-2$. Det gier følgende diskriminant:

$$d=b^2-4ac=3^2-4\cdot 0{,}5\cdot(-2)=9+4=13$$

Toppunkt: $\left(-\frac{b}{2a},-\frac{d}{4a}\right) = \left(-\frac{3}{2\cdot 0{,}5},-\frac{13}{4\cdot 0{,}5}\right) = (-3;-6{,}5)$

Grafen er tegnet nedenfor, og vi ser, at det stemmer at tangenten til grafen i skæringspunktet $(0,-2)$ med y-aksen er lig med 3.



□

Vi mangler endnu en differentiationsregel, nemlig den for sammensatte funktioner. Begrebet sammensat funktion kiggede vi på i afsnit 1.5 i kapitel 1. Der gælder følgende:

Sætning 3.51 (Differentiation af sammensat funktion)

Antag at funktionen g er differentiabel i x_0, og funktionen f er differentiabel i punktet $y_0 = g(x_0)$. Da er den sammensatte funktion $f \circ g$ differentiabel i x_0 med følgende differentialkvotient:

(30) $$\left(f \circ g\right)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$$

Bevis: Beviset er kompliceret, så vi udelader det.

□

Reglen kan sprogligt udtrykkes noget i retningen af følgende: "Man differentierer en sammensat funktion ved at differentiere den ydre funktion, sætte den indre funktion ind og gange med den indre funktion differentieret":

$$\left(f \circ g\right)'(x_0) = \overbrace{f'(g(x_0))}^{\text{ydre funktion differentieret med indre funktion indsat}} \cdot \overbrace{g'(x_0)}^{\text{indre funktion differentieret}}$$

Der er en hel del situationer, hvor denne regel er nødvendig for at kunne differentiere en given funktion. Vi skal se på nogle eksempler på brug af reglen.

Eksempel 3.52

Givet funktionen $h(x) = \sqrt{x^2 + 1}$. Bestem differentialkvotienten.

Vi kan betragte denne funktion som værende sammensat af den *ydre* funktion $f(y) = \sqrt{y}$ og den *indre* funktion $g(x) = x^2 + 1$. Man kan opskrive følgende:

$$\text{Ydre:} \quad f(y) = \sqrt{y}\,, \quad f'(y) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{y}}$$

$$\text{Indre:} \quad g(x) = x^2 + 1\,, \quad g'(x) = 2x$$

Heraf fås:

$$h'(x) = \left(f \circ g\right)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x^2 + 1}} \cdot 2x = \frac{2x}{2 \cdot \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

□

Bemærkning 3.53

I eksempel 3.52 har vi benævnt den variable i den ydre funktion med y. Dette er udelukkende af pædagogiske årsager. Man kunne således sagtens have kaldt den variable for x:

$$f(x)=\sqrt{x}\,,\quad f'(x)=\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}$$

Men ved at kalde den *y*, kan man bedre forstå, at man indsætter $y=g(x)=x^2+1$.

□

Eksempel 3.54

Lad $h(x)=(4x-5)^3$. Vi ønsker at differentiere funktionen.

Vi kan betragte *h* som en sammensat funktion af den ydre funktion $f(y)=y^3$ og den indre funktion $g(x)=4x-5$.

Ydre: $f(y)=y^3\,,\quad f'(y)=3y^2$
Indre: $g(x)=4x-5\,,\quad g'(x)=4$

Heraf fås:

$$h'(x) \;=\; \left(f\circ g\right)'(x) \;=\; f'(g(x))\cdot g'(x) \;=\; 3\cdot\left(4x-5\right)^2$$

I dette tilfælde kunne man have startet med at have ganget parenteserne i udtrykket for $h(x)$ ud, og efterfølgende have differentieret funktionen som et polynomium ifølge sætning 3.47. Det ville imidlertid have givet et meget stort arbejde. Så derfor er det meget smartere her at bruge reglen for differentiation af sammensat funktion.

□

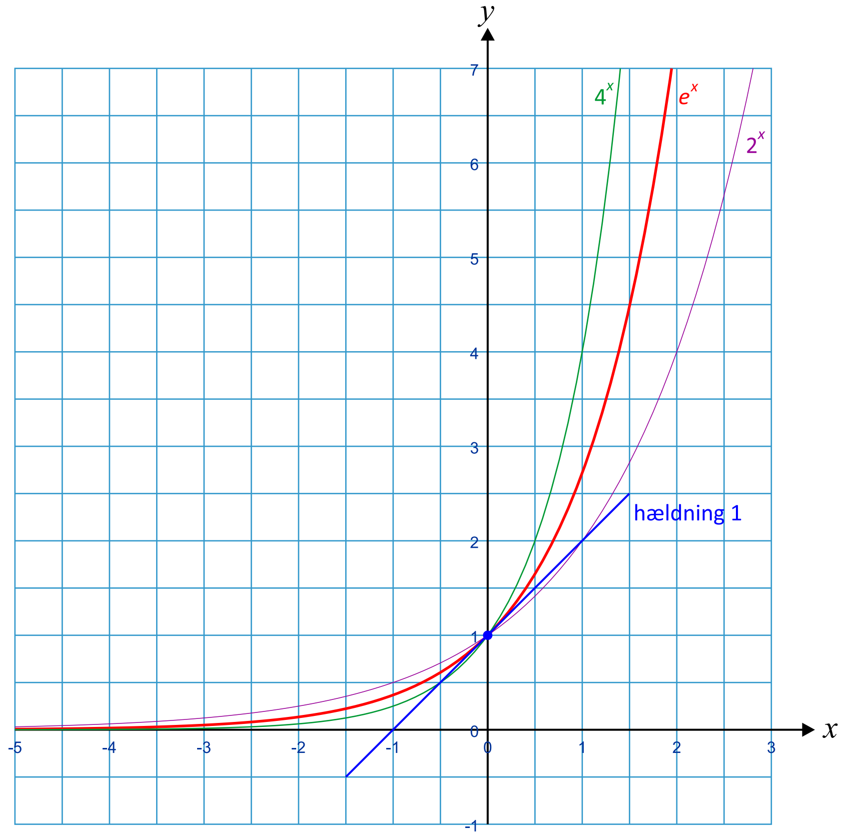
3.9 Differentiation af specielle funktioner

Med teknikken fra afsnit 3.8 fik vi kraftigt udvidet mængden af de funktioner, vi kan differentiere, men spørgsmålet er stadig, hvordan man differentierer funktioner som e^x, a^x, $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\tan(x)$, $\ln(x)$, etc. Det vil vi kigge på i dette afsnit.

Sætning 3.55

Den naturlige eksponentialfunktion $f(x)=e^x$ er differentiabel for alle $x\in R$ med differentialkvotient $f'(x)=e^x$.

Bevis: Vi vil ikke bevise sætningen fuldstændigt, da det er lidt kompliceret. Vi vil derimod bevise den under den antagelse, at vi allerede ved, at *f* er differentiabel i $x_0=0$ med differentialkvotient 1. Det er det samme som at sige, at hældningen af tangenten til grafen i punktet $(0,1)$ er lig med 1. På figuren på næste side er graferne for tre forskellige eksponentialfunktioner afbildet. Det "naturlige" ved den med grundtal $e=2{,}7182818...$ er netop, at den har den "pæne" differentialkvotient 1 i $x_0=0$, og som følge heraf har sig selv som differentialkvotient.



Antagelsen om at $f'(0)=1$ kan vi bruge til at konkludere, at differenskvotienten i $x_0=0$ har grænseværdien 1 for $\Delta x \to 0$:

$$(31) \qquad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x} = \frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x} \to 1 \quad \text{for} \quad \Delta x \to 0$$

idet $x = x_0 + \Delta x = 0 + \Delta x = \Delta x$. Vi vil herefter benytte *potensreglerne* til at finde differentialkvotienten i ethvert punkt $x_0 \in R$. Igen starter vi med differenskvotienten:

$$(32) \qquad \begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \frac{e^{x_0+\Delta x}-e^{x_0}}{\Delta x} \\ &= \frac{e^{x_0}\cdot e^{\Delta x}-e^{x_0}}{\Delta x} = \frac{e^{x_0}\cdot(e^{\Delta x}-1)}{\Delta x} = e^{x_0}\cdot\left(\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}\right) \to e^{x_0} \quad \text{for } \Delta x \to 0 \end{aligned}$$

hvor vi har udnyttet, at parentesen netop er differenskvotienten i 0. Ifølge (31) ved vi, at den går mod 1, når $\Delta x \to 0$. Størrelsen e^{x_0} er fast, dvs. afhænger ikke af Δx. Derfor fås, at differenskvotienten i x_0 går mod e^{x_0} for $\Delta x \to 0$. Vi konkluderer, at *f* er differentiabel i x_0 og at differentialkvotienten er lig med grænseværdien, dvs. e^{x_0}. Det ønskede er dermed vist: $f'(x_0) = e^{x_0}$.

□

Sætning 3.56

Den naturlige logaritmefunktion $f(x)=\ln(x)$, $x \in \left]0,\infty\right[$ er differentiabel i ethvert punkt i definitionsmængden med differentialkvotient $f'(x)=1/x$.

Bevis: Vi vil ikke bevise sætningen her. Den interesserede læser kan studere opgave 381*, hvor det også introduceres, hvordan man differentierer en omvendt funktion.

□

Sætning 3.57

Lad $k \in R$ være en konstant. Da er funktionen $f(x)=e^{k\cdot x}$ differentiabel for alle $x \in R$ med differentialkvotient $f'(x)=k\cdot e^{k\cdot x}$.

Bevis: Funktionen kan betragtes som en sammensat funktion, hvor den indre funktion er $g(x)=k\cdot x$, mens den ydre funktion er $h(y)=e^y$.

Ydre: $h(y)=e^y$, $h'(y)=e^y$
Indre: $g(x)=k\cdot x$, $g'(x)=k$

Ved af brug af reglen for differentiation af sammensat funktion i sætning 3.51 fås:

(33) $$f'(x)=\left(h\circ g\right)'(x)=h'(g(x))\cdot g'(x)=e^{k\cdot x}\cdot k$$

hvormed det ønskede er vist.

□

Bemærkning 3.58

Man kan omskrive en generel eksponentialfunktion a^x, hvor $a>0$, til en funktion på formen $e^{k\cdot x}$, som følgende omskrivning viser:

(34) $$a^x=\left(e^{\ln(a)}\right)^x=e^{\ln(a)\cdot x}$$

hvor vi har udnyttet at e^x og $\ln(x)$ er hinandens omvendte funktioner: $e^{\ln(a)}=a$. I (34) er k altså lig med $\ln(a)$. Grunden til at funktionen på formen $e^{k\cdot x}$ er særlig interessant er, at den ofte foretrækkes fremfor funktionen på formen a^x. Ved anvendelser kan man nemlig bruge førstnævnte form med *enhed*, mens det ikke er muligt i sidstnævnte. Et eksempel fra kernefysikken er den velkendte henfaldslov: $N(t)=N_0\cdot e^{-k\cdot t}$. Den beskriver hvordan antallet af radioaktive kerner aftager eksponentielt med tiden. Her repræsenterer t tiden, og k kaldes henfaldskonstanten. Hvis t indsættes med enheden s (sekunder), kan vi lade k have enheden s^{-1}, således at produktet $-k\cdot t$ er dimensionsløst. Det er et krav, at eksponenten skal være uden enhed: Det giver ikke mening at opløfte et tal i en størrelse, som har en enhed. Det skal lige tilføjes, at det faktum, at der er et minus ikke er vigtig. Man foretrækker at den fysiske konstant k er positiv. Så må man skrive $-k$.

Sætning 3.59 (Eksponentialfunktion)

Lad $a > 0$ være et fast tal. Eksponentialfunktionen $f(x) = a^x$ differentiabel i ethvert $x \in R$ med differentialkvotient $f'(x) = \ln(a) \cdot a^x$.

Bevis: Fremgår direkte af sætning 3.57 og (34).

□

Vi springer nu fra eksponentialfunktioner til potensfunktioner. Den næste sætning er i en vis forstand en udvidelse af sætning 3.47. Den viser således, hvordan man differentierer potensfunktioner med ikke blot heltallige eksponenter. Det skal dog tilføjes, at man må begrænse definitionsmængden til de positive tal. For de fleste ikke-heltallige eksponenter vil potensfunktionen nemlig kun være defineret i $\left]0, \infty\right[$.

Sætning 3.60 (Potensfunktion)

Lad $a \in R$ være et fast tal. Potensfunktionen $f(x) = x^a$, $x > 0$ differentiabel med differentialkvotient $f'(x) = a \cdot x^{a-1}$.

Bevis: Vi skal bruge samme idé som i (34). Blot er det x, som vi vil omskrive: $x = e^{\ln(x)}$.

(35) $$x^a = (e^{\ln(x)})^a = e^{\ln(x) \cdot a}$$

I sidste skridt er en potensregel anvendt. Med omskrivningen har vi en sammensat funktion, som vi kan differentiere ved hjælp af sætning 3.51:

$$\text{Ydre:} \quad h(y) = e^y, \quad h'(y) = e^y$$

$$\text{Indre:} \quad g(x) = a \cdot \ln(x), \quad g'(x) = \frac{a}{x}$$

Ved af brug af reglen for differentiation af sammensat funktion i sætning 3.51 fås:

(36)
$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(h \circ g\right)'(x) \\ &= h'(g(x)) \cdot g'(x) \\ &= e^{\ln(x) \cdot a} \cdot \frac{a}{x} \\ &= x^a \cdot a \cdot x^{-1} \\ &= a \cdot x^{a-1} \end{aligned}$$

I fjerde lighedstegn er (35) benyttet "baglæns" og at $a/x = a \cdot 1/x = a \cdot x^{-1}$. I femte lighedstegn er en potensregel brugt. Hermed er det ønskede vist.

□

Vi er nu klar til at kigge på de trigonometriske funktioner og deres differentialkvotienter.

Sætning 3.61

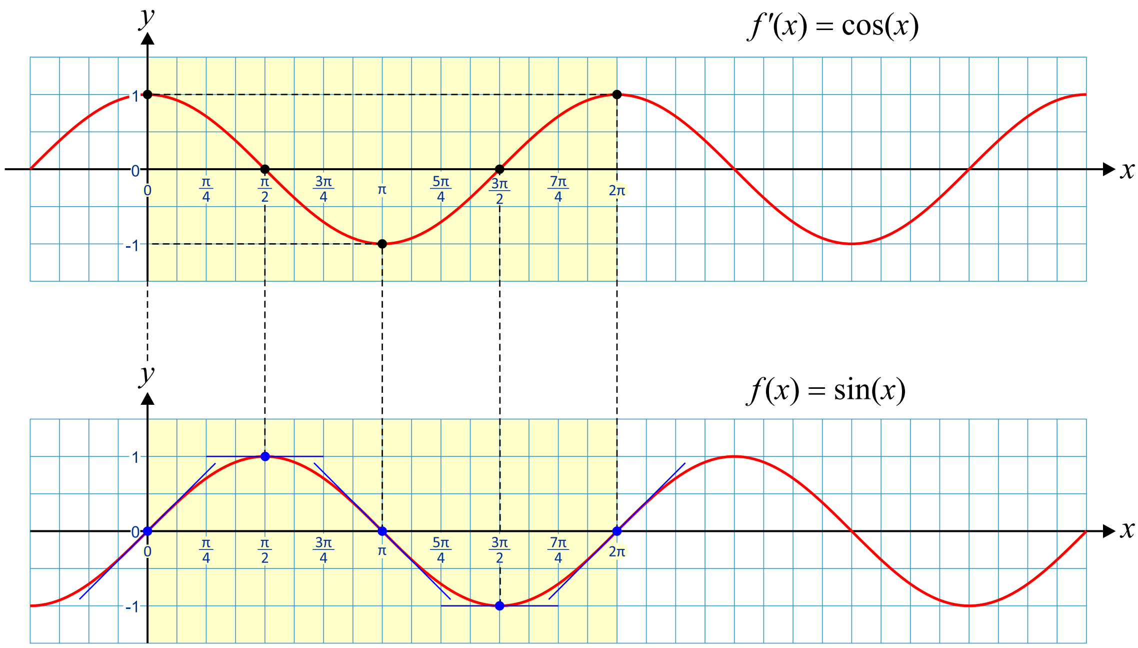
De trigonometriske funktioner $\sin(x)$, $\cos(x)$ og $\tan(x)$ er differentiable i deres definitionsmængde med følgende differentialkvotienter:

a) $(\sin(x))' = \cos(x)$

b) $(\cos(x))' = -\sin(x)$

c) $(\tan(x))' = 1 + \tan^2(x)$ eller $1/\cos^2(x)$

Bevis: Det er ret tungt og teknisk at vise, at $\sin(x)$ og $\cos(x)$ er differentiable funktioner og udlede deres differentialkvotienter. Derfor undlader vi det. Derimod vil vi rent grafisk sandsynliggøre a). Den nederste figur viser grafen for funktionen $f(x) = \sin(x)$ og den øverste figur viser den differentierede funktion $f'(x) = \cos(x)$. Da begge funktioner er *periodiske* med periode 2π, kan vi nøjes med at betragte intervallet $[0, 2\pi]$. Derfor er området markeret med gult.



På den nederste figur er tangenten til grafen for *f* tegnet i $x_0 = 0$. Vi ser, at den har hældning 1. Det stemmer med, at $f'(x)$ har værdien 1 i 0. På nederste figur er tangenten til grafen for *f* tegnet i $x_0 = \frac{\pi}{2}$. Den har hældning 0, da den er vandret. Det stemmer med at grafen for f' skærer *x*-aksen i $x_0 = \frac{\pi}{2}$. Sådanne kunne fortsættes for enhver værdi af x_0. Dermed har vi sandsynliggjort, at $(\sin(x))' = \cos(x)$. Vi mangler tangens. Her benytter vi kvotientreglen i sætning 3.45:

$$(\tan(x))' = \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)' = \frac{(\sin(x))' \cdot \cos(x) - \sin(x) \cdot (\cos(x))'}{(\cos(x))^2} =$$

$$= \frac{\cos(x) \cdot \cos(x) - \sin(x) \cdot (-\sin(x))}{(\cos(x))^2} = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$$

□

Eksempel 3.62

Differentier funktionen $f(x) = x \cdot \sqrt{x}$, $x > 0$.

Løsning: Den mest umiddelbare metode vil nok være at bruge produktreglen i sætning 3.44 direkte og derefter reducere:

$$(37) \qquad \begin{aligned} (x \cdot \sqrt{x})' &= (x)' \cdot \sqrt{x} + x \cdot (\sqrt{x})' = 1 \cdot \sqrt{x} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ &= \sqrt{x} + \frac{x}{2 \cdot \sqrt{x}} = \sqrt{x} + \tfrac{1}{2}\sqrt{x} = \tfrac{3}{2}\sqrt{x} \end{aligned}$$

Men differentialkvotienten kan faktisk regnes på en alternativ måde, nemlig ved at reducere *før* der differentieres: $x \cdot \sqrt{x} = x^1 \cdot x^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{3}{2}}$, hvorefter sætning 3.60 kan bruges:

$$(38) \qquad (x^{\frac{3}{2}})' = \tfrac{3}{2} \cdot x^{\frac{3}{2}-1} = \tfrac{3}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}}$$

Eftersom $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ kan vi se, at det giver det samme som i (37)!

□

Eksempel 3.63

Differentier funktionen $f(x) = \sin(4x)$.

Løsning: Vi kan opfatte *f* som værende en sammensætning af en ydre funktion h og en indre funktion g. Nærmere bestemt har vi:

Ydre: $h(y) = \sin(y)$, $h'(y) = \cos(y)$

Indre: $g(x) = 4x$, $g'(x) = 4$

Ved af brug af reglen for differentiation af sammensat funktion i sætning 3.51 fås:

$$(39) \qquad f'(x) = \left(h \circ g\right)'(x) = h'(g(x)) \cdot g'(x) = \cos(4x) \cdot 4 = 4 \cdot \cos(4x)$$

hvor vi i sidste skridt blot har skrevet konstanten foran.

□

Eksempel 3.64

Differentier funktionen $f(x) = \ln(3x^2 + 8)$.

Løsning: Igen har vi at gøre med en sammensat funktion:

Ydre: $h(y) = \ln(y)$, $h'(y) = 1/y$

Indre: $g(x) = 3x^2 + 8$, $g'(x) = 6x$

Ved af brug af reglen for differentiation af sammensat funktion fås:

$$(39) \qquad f'(x) = \left(h \circ g\right)'(x) = h'(g(x)) \cdot g'(x) = \frac{1}{3x^2 + 8} \cdot 6x = \frac{6x}{3x^2 + 8}$$

□

3.10 Anvendelser af differentialregning

Differentialregning er et at de absolut mest nyttige områder indenfor matematikken. Det skyldes at rigtig mange problemstillinger fra den virkelige verden kan formuleres ved hjælp af funktioner, og som bekendt er differentialregning et uundværligt redskab til at analysere funktioner. Vi skal i det følgende se på en række eksempler. Der vil også være temaer, hvor anvendelsen af differentialregning kommer i spil.

Optimering

En oplagt anvendelse af differentialregning vil være blandt en række løsninger til et givet problem at finde den løsning, som i en eller anden forstand er *optimal*.

Eksempel 3.65

Vi får som opgave at konstruere en dåse til flåede tomater med følgende krav: Dåsen skal være cylinderformet og skal have et volumen på 450 cm^3. Desuden ønsker producenten at bruge så lidt metal som muligt. Hvad skal radius og højde i dåsen være?

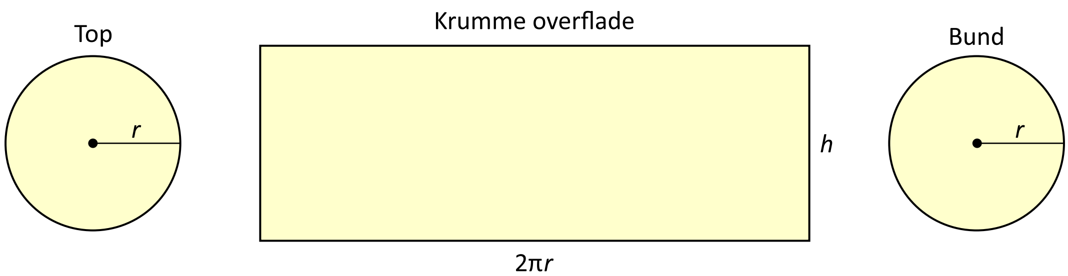
Løsning: Det sidste krav om mindst muligt metal tolker vi ved, at dåsens overfladeareal skal minimeres. I det følgende betegner vi højden af dåsen med h og radius i top og bundcirklen med r. Desuden underforstår vi enheden cm for længde, cm^2 for areal og cm^3 for rumfang. Vi skal løse opgaven i en række trin.

Trin 1

Rumfanget af en cylinder er som bekendt $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$. At rumfanget skal være 450 cm^3 giver os *bindingen* $\pi \cdot r^2 \cdot h = 450$. Højden kan da udtrykkes ved radius: $h = 450 / (\pi \cdot r^2)$.

Trin 2

Overfladearealet af dåsen er summen af arealerne af de to cirkler i bunden og toppen samt den *krumme* overflade. Når man folder den krumme overflade ud, får man et rektangel med en højde, som er lig med dåsens højde og en bredde, som er lig med omkredsen af cirklen i top og bund:



Overfladearealet er dermed lig med $2\cdot\pi\cdot r^2 + 2\pi r\cdot h$. Ifølge trin 1 kan vi udskifte h med udtrykket $450/(\pi\cdot r^2)$:

$$2\cdot\pi\cdot r^2 + 2\pi r\cdot h \;=\; 2\pi\cdot r^2 + 2\pi r\cdot\frac{450}{\pi\cdot r^2} \;=\; 2\pi\cdot r^2 + \frac{900}{r}$$

Vi har altså overfladearealet som funktion af kun én variabel, nemlig radius r.

(40) $$Over(r) = 2\pi\cdot r^2 + \frac{900}{r}$$

Før i går videre skal vi have overvejet definitionsmængden. Det er klart, at vi må kræve, at $r \geq 0$, da man ikke kan have en negativ radius. Der er derimod ingen øvre grænse på r i dette tilfælde. Det ses af udtrykket for h. En meget stor radius vil blot resultere i en meget høj dåse med meget lille radius.

Trin 3

Vi skal have undersøgt funktionen i (40). Først undersøger vi for vandrette tangenter. Vores CAS-værktøj giver følgende løsninger:

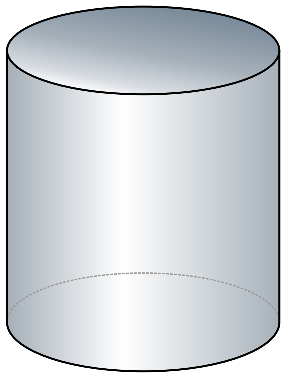
(41) $$Over'(r) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad r = 4{,}152830592$$

Som sædvanlig bestemmer vi værdien af den afledede i mellemliggende punkter. Vi vælger 1 og 5: $Over'(1) = -887{,}4$ og $Over'(5) = 26{,}83$. Da vi har at gøre med en kontinuert differentiabel funktion, får vi følgende fortegnslinje for f':

r		0		4,153	
$Over'(r)$	i.d.		$-$	0	$+$

Det ser straks, at funktionen har såvel et lokalt som et globalt maksimum i $r = 4{,}153$ med værdi $Over(4{,}152830592) = 325{,}0794777$. Indsættes den nævnte værdi for r i udtrykket for h fås: $h = 450/(\pi\cdot 4{,}152830592^2) = 8{,}305661182$.

Det kan konkluderes, at det vil være fordelagtigt at lade dåsen have en radius på 4,15 cm og en højde på 8,30 cm. Det mindst mulige areal er dermed 325,1 cm^2. Derved vil producenten spare mest muligt på metallet. Det skal siges, at der her er set bort fra kanter og sammenføjninger. At en producent ikke nødvendigvis vil vælge en sådan løsning (bemærk diameteren er lig med højden!) kan have mange årsager: Det kan være at hylder ikke er dimensioneret til formen, at det vil være sværere at åbne dåsen med så stor en radius, etc.

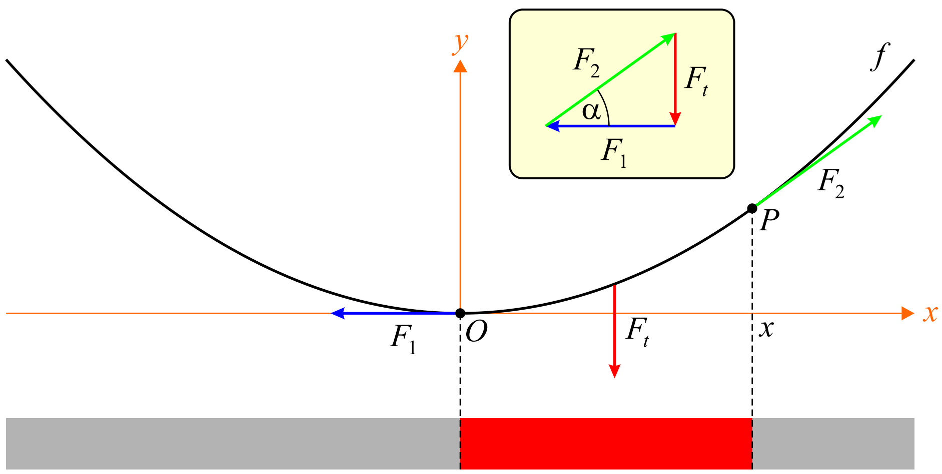


Bemærkning 3.66

Bemærk fremgangsmåden i opgaver à la eksempel 3.65. I trin 1 knyttes en sammenhæng mellem to variable (binding). I trin 2 opskrives den funktion, som skal optimeres, idet man udnytter trin 1. Endelig undersøges funktionen for et maksimum/minimum.

Eksempel 3.67 (Hængebro)

I eksempel 2.27 i kapitlet om polynomier blev det postuleret, at de midterste bærekabler på en hængebro under idealiserede forudsætninger beskriver en parabelbue. Med differentialregningen til rådighed skal vi give et argument herfor. På figuren nedenfor kigger vi på det stykke kabel, som befinder sig mellem det nederste punkt O på bærekablet og et vilkårligt andet punkt P på bærekablet. Den del af bærekablet, som befinder sig til venstre for O påvirker det angivne stykke kabel med en spænding eller snorkraft – ellers ville kabelstykket falde nedad. Vi kalder størrelsen af kraften, som klart er vandret, for F_1. På samme måde er kabelstykket i punktet P påvirket af en snorkraft fra den del af kablet, som befinder sig til højre for kabelstykket. Denne kraft, som er tangent til bærekablet i P, kalder vi F_2. Endelig er der den kraft, som stammer fra at bærekablet skal bære en del af vejbanen. Den del af vejbanen, der er tale om, er den del, som ligger umiddelbart under den betragtede bærekabelstykke. De andre dele af vejbanen bæres af andre dele af bærekablet. For at bærekablet befinder sig i ro kræves det, at de tre kræfter, der påvirker kabelstykket, opvejer eller udbalancerer hinanden. I vektorsprog kan det udtrykkes ved, at summen af vektorerne lig med nulvektor.



Vi lægger et koordinatsystem ind, så O bliver origo og y-aksen sammenfaldende med bærekablets lodrette symmetriakse. På figuren er akserne farvet orange. Den funktion, hvis graf er bærekablet, betegner vi med f. Førstekoordinaten for kabelpunktet P betegner vi med x. Differentialkvotienten for en funktion i et punkt x er som bekendt hældningen af tangenten til grafen i punktet $P(x, f(x))$. Af delfiguren med trekanten får vi derfor:

$$(42) \qquad f'(x) = \frac{F_t}{F_1} = \frac{m_\ell \cdot x \cdot g}{F_1} = \frac{m_\ell \cdot g}{F_1} \cdot x = k \cdot x$$

Her har vi ladet m_ℓ betegne massen af vejbanen pr. længdeenhed. Når der ganges med længden x af det med rødt markerede vejbanesegment fås den samlede masse af vejbanesegmentet: $m_\ell \cdot x$. Når der yderligere ganges med tyngdeaccelerationen g, får man tyngdekraften på vejbanesegmentet: $F_t = m_\ell \cdot x \cdot g$. I (42) trækkes alt det udenfor, som er konstant og betegnes under ét med k. Ifølge (42) søger vi en funktion, hvis differentialkvotient er lig med $k \cdot x$. Vi kender svaret: $f(x) = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2 + c$, hvor c er en vilkårlig konstant. Der er ikke andre løsninger, som det vil komme til at blive klart, når vi kommer til integralregningen. Da grafen skal passere igennem (0,0), har vi $\frac{1}{2}\cdot k\cdot 0^2+c=0 \;\Leftrightarrow\; c=0$. Derfor er løsningen til problemet

(43) $$f(x)=\tfrac{1}{2}\cdot k\cdot x^2$$

Umiddelbart har vi i udledningen antaget at x er positiv, men på grund af symmetrien er det klart, at (43) holder for alle x. Bærekablerne hænger altså i en parabelbue, eller hvad? Ja ideelt set. Vi har dog gjort nogle antagelser i udledningen ovenfor:

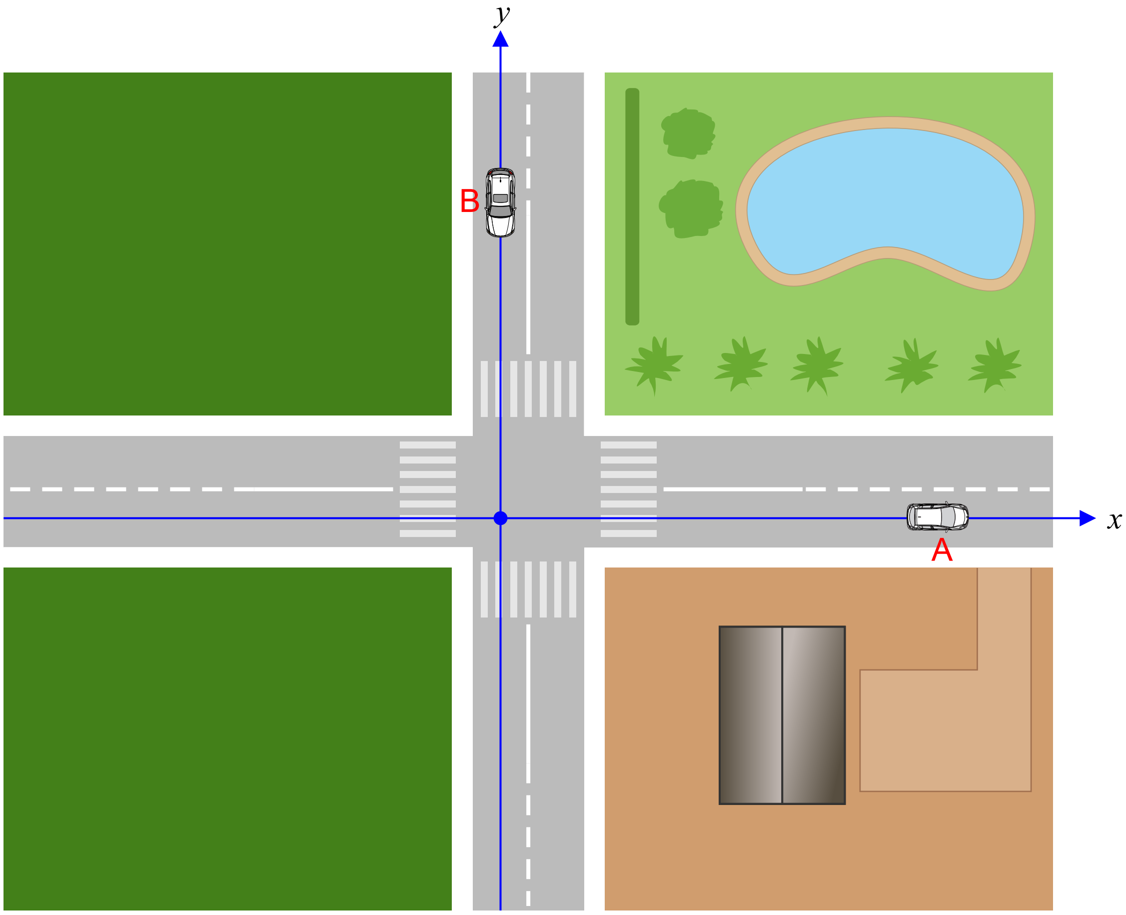
1) Bærekablet har ingen masse
2) Vejbanen er vandret
3) Vejbanen har konstant masse pr. meter

Ingen af dem er nok opfyldt præcist. I tilfældet med Storebæltsbroen kan man for eksempel se på fotoet i eksempel 2.27, at 2) ikke holder. Punkt 1) holder selvfølgelig ikke. Jo mindre bærekablet vejer i forhold til vejbanen, jo mere præcist vil tilnærmelsen med en parabel dog være. Punkt 3) er måske opfyldt ret godt, selv om der visse steder på broen er specialinstallationer. Under alle omstændigheder, så er parabelbuen en ret god approksimation til den kurve bærekablet danner. Vi har opstillet og løst en *matematisk model*. Den kan selvfølgelig *forfines*, så man tager hensyn til ovenstående punkter. Det vil bare gøre modellen alt for kompliceret til at blive gennemgået her. Sandsynligvis vil den kræve stor computerkraft at løse numerisk. Det er sikkert sådan, man har gjort i virkeligheden, da Storebæltsbroen blev projekteret. Eksemplet er en indikation af matematikkens store styrke: at den kan hjælpe mennesket til at forudse ting, før de bliver realiseret. I tema B kan den interesserede læser udføre et lille forsøg med et kabel/kæde både belastet, som i tilfældet med en hængebro, og ubelastet, som i tilfældet med en frithængende kæde.

Eksempel 3.68

En bil A kører på en lige vej, der forløber nord-syd, mens en anden bil B kører på en lige vej, der forløber vest-øst. De to veje står altså vinkelret på hinanden. Situationen er beskrevet på figuren på næste side. Der er lagt et koordinatsystem ind, så x-aksen peger mod øst og går igennem bil A's bane, mens y-aksen peger mod nord og går igennem bil B's bane. Klokken 12.00 er bil A 10 km vest for det afbildede kryds, hvor koordinatsystemets begyndelsespunkt (oriogo) er, og bilen kører med farten 70 km/t mod øst. På samme tidspunkt er bil B 15 km nord for krydset, og bilens fart mod syd er 80 km/t. Vi nulstiller stopuret kl. 12.00.

a) Vis at bil A's position på x-aksen kan beskrives ved funktionen $X(t)=-10+70\cdot t$, hvor t angiver stopurets visning i timer og positionen regnet i km. Vis tilsvarende, at bil B's position på y-aksen kan beskrives ved funktionen $Y(t)=15-80\cdot t$.
b) Hvor på akserne er de to biler efter 3 minutters kørsel? Hvad er afstanden mellem de to biler da i fugleflugtslinje?
c) Bestem det tidspunkt, hvor afstanden i fugleflugtslinje mellem de to biler er mindst mulig.



Løsning:

a) Tilbagelagt strækning fås som bekendt ved at gange hastighed med tid, dvs. bil A har til tidspunktet t tilbagelagt strækningen $70 \cdot t$. Resultatet fås i km, da hastigheden er i km/t og tiden i timer. Men bil A starter på x-aksen 10 km til venstre for origo. Derfor vil $X(t) = -10 + 70 \cdot t$ være den funktion, som beskriver bil A's position til tidspunktet t. Det overlades til læseren at argumentere for stedfunktionen for bil B.

b) 3 minutter svarer til 0.05 time. Derfor sætter vi denne værdi ind i stedfunktionerne:

$$\begin{aligned} X(0{,}05) &= -10 + 70 \cdot 0{,}05 = -6{,}5 \\ Y(0{,}05) &= 15 - 80 \cdot 0{,}05 = 11 \end{aligned}$$

Dermed har bil A x-koordinaten –6,5 og bil B y-koordinaten 11 efter 3 minutter. Afstanden i fugleflugtslinje fås ved at benytte Pythagoras' sætning:

$$d = \sqrt{(-6{,}5)^2 + 11^2} = 12{,}78$$

Bilerne er altså 12,78 km fra hinanden efter 3 minutter.

c) I forlængelse af b) kan vi udregne et udtryk for afstanden mellem bilerne som funktion af tiden t:

$$d(t) = \sqrt{(X(t))^2 + (Y(t))^2} = \sqrt{(-10 + 70 \cdot t)^2 + (15 - 80 \cdot t)^2}$$

Funktionen er defineret for $t \in [0, \infty[$. Ved hjælp af et CAS-værktøj undersøger vi for vandrette tangenter for funktionens graf:

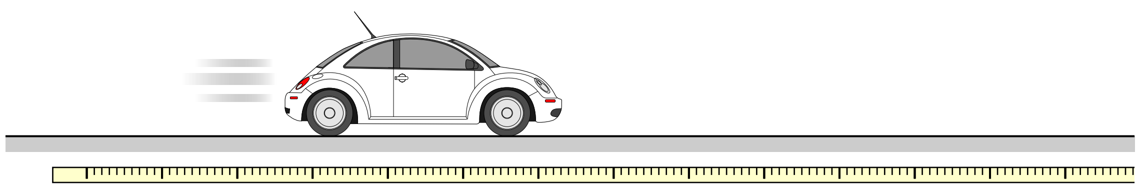
$$d'(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = 0{,}1681415929$$

Det overlades til læseren at vise, at der er tale om et lokalt og globalt minimum her. Vi konkluderer, at bilerne har den mindste indbyrdes afstand, når der er gået 0,16814 time eller 10,088 minutter.

□

Vækst og væksthastighed

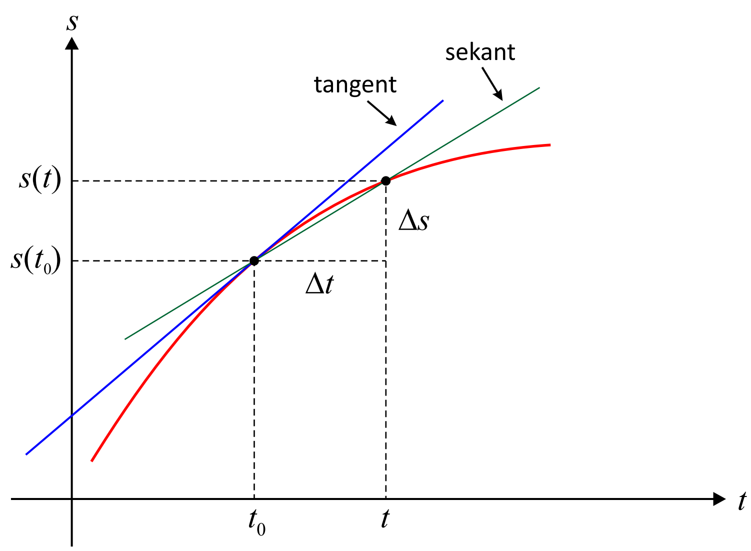
Vækst er et meget anvendt ord i mange sammenhænge i samfundet og i naturvidenskaben. Differentialregningen kan være med til at kaste lys over dette begreb, også på en mere præcis måde. Begrebet *væksthastighed* eller bare *hastighed*, kan måske nemmest beskrives ved at tage udgangspunkt i en bil, som kører ud af en lige landevej. Et målebånd er anbragt langs vejen, så man til ethvert tidspunkt t kan registrere bilens position s. Dermed har man en stedfunktion $s(t)$.



Såfremt bilen ikke vender rundt i tidsrummet mellem t og t_0, så angiver nedenstående brøk bilens *gennemsnitshastighed* i tidsrummet, regnet med fortegn:

(44) $$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$$

Det er netop den størrelse, vi kalder *differenskvotienten* for funktionen $s(t)$ i t_0. Grafisk set angiver den hældningen af sekanten mellem grafpunkterne $(t_0, s(t_0))$ og $(t, s(t))$.



Hvis vi lader t nærme sig til t_0, vil differenskvotienten nærme sig til *differentialkvotienten* $s'(t_0)$ i t_0, såfremt $s(t)$ er differentiabel i t_0. Altså:

(45) $$s'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \left(\frac{\Delta s}{\Delta t} \right) = \lim_{t \to t_0} \left(\frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0} \right)$$

og grafisk set er differentialkvotienten hældningen af tangenten i t_0. I den aktuelle situation kan differentialkvotienten fortolkes som bilens *øjeblikshastighed* eller bare *hastighed* til tidspunktet t_0. Hvis $s(t)$ er en differentiabel funktion, har man hastigheden til ethvert tidspunkt: $v(t) = s'(t)$. Såfremt *hastighedsfunktionen* $v(t)$ også er differentiabel, kan man gentage proceduren, dvs. differentiere igen. Herved får man *accelerationsfunktionen*:

(46) $$a(t) = v'(t) = s''(t)$$

som er stedfunktionen differentieret to gange, også kaldet for *den anden afledede* af stedfunktionen. Accelerationsfunktionen er i en vis forstand "hastigheden af hastigheden". Generelt set har den anden afledede af en funktion også en vigtig grafisk fortolkning, ligesom den første afledede har. Vi kigger på det i blandt andet eksempel 3.71. I det følgende skal vi se flere forskellige eksempler på, hvor begrebet hastighed eller væksthastighed kommer i spil.

Eksempel 3.69 (Det frie fald)

Et godt eksempel fra fysik er *det frie fald*. Lad os sige, at en bold slippes fra en vis højde, og at man i stil med bileksemplet anbringer et målebånd lodret, så nulpunktet på målebåndet er der, hvor bolden slippes, og i øvrigt måler positivt nedefter. Da siger fysikken, at stedfunktionen kan beskrives ved følgende stedfunktion:

(47) $$s(t) = \tfrac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

hvor $g = 9{,}82 \ \mathrm{m/s^2}$ er tyngdeaccelerationen. At bolden "slippes" (ikke kastes) hentyder til at begyndelseshastigheden er 0 m/s. Vi kan nu beregne boldens hastighed til ethvert tidspunkt:

(48) $$v(t) = s'(t) = g \cdot t$$

Vi ser, at boldens hastighed vokser *proportionalt* med tiden. Man kan tage skridtet videre og bestemme accelerationsfunktionen:

(49) $$a(t) = v'(t) = s''(t) = g$$

Accelerationen er altså konstant! Sagt på en anden måde, så vokser hastigheden med den konstante værdi 9,82 m/s for hvert sekund, der går.

Eksempel 3.70 (Vægtudvikling af en nyfødt)

Tabellen på næste side indeholder (indirekte) data fra WHO. Der er tale om median-vægten af drengebørn for hver måned i løbet af drengenes første to leveår.

Tid (mdr.)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Vægt (kg)	3,35	4,45	5,58	6,39	7,00	7,50	7,92	8,28	8,60	8,90	9,19	9,41	9,62

Tid (mdr.)	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	
Vægt (kg)	9,85	10,10	10,32	10,52	10,73	10,93	11,16	11,36	11,57	11,75	11,95	12,18	

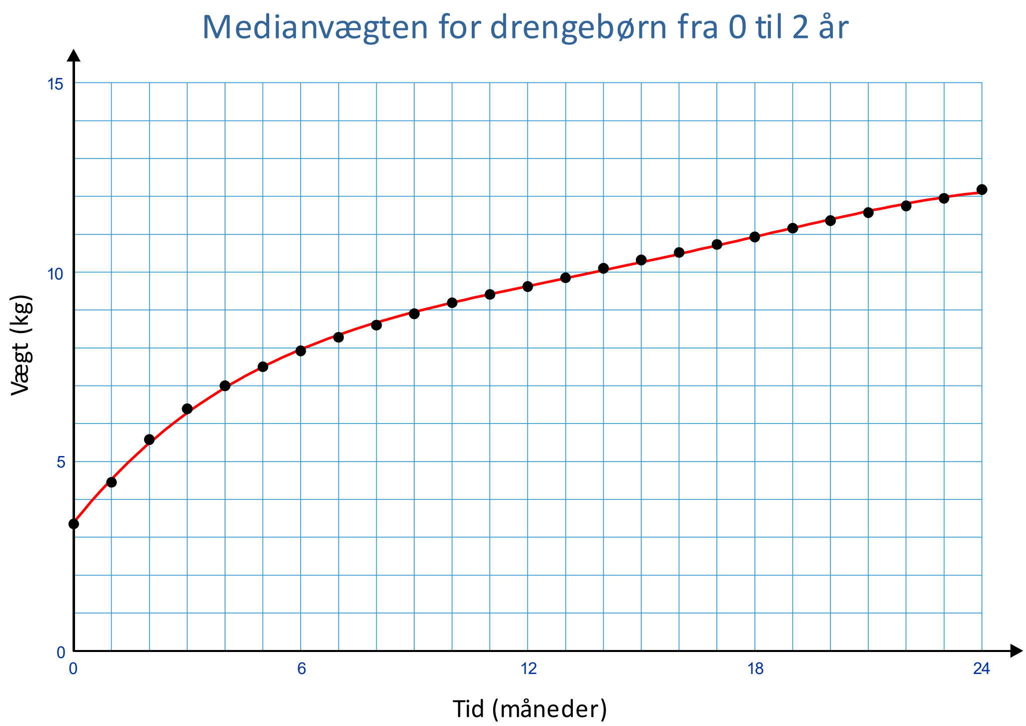
Vi vil bestemme den hastighed, hvormed drengene tager på i vægt til tidspunkterne 1 mdr. og 18 mdr. Man kunne anvende numerisk differentiation her, jf. Tema C, men vi vil i stedet foretage et fit af data med et polynomium af grad 4, og derefter differentiere denne funktion med henblik på at bestemme væksthastigheder. Et CAS-værktøj giver følgende resultat, når man beder om at det foretager et fit med et polynomium af grad 4:

$$f(t) \;=\; -0{,}000073629\cdot t^4 + 0{,}0046006\cdot t^3 - 0{,}10449\cdot t^2 + 1{,}2387\cdot t + 3{,}3904$$

Herefter er det blot at indsætte tidspunkterne i hastighedsfunktionen, dvs. den afledede:

$$f'(1) = 1{,}0432083882 \quad \text{og} \quad f'(18) = 0{,}231224503$$

Vi konkluderer, at drengenes vægt til tidspunktet 1 måned vokser med 1,04 kg/mdr., mens væksthastigheden er 0,23 kg/mdr. til tidspunktet 18 måneder. Grafen nedenfor viser også, at væksthastigheden er klart størst lige efter fødslen.



Eksempel 3.71 (Logistisk vækst - bakteriekultur)

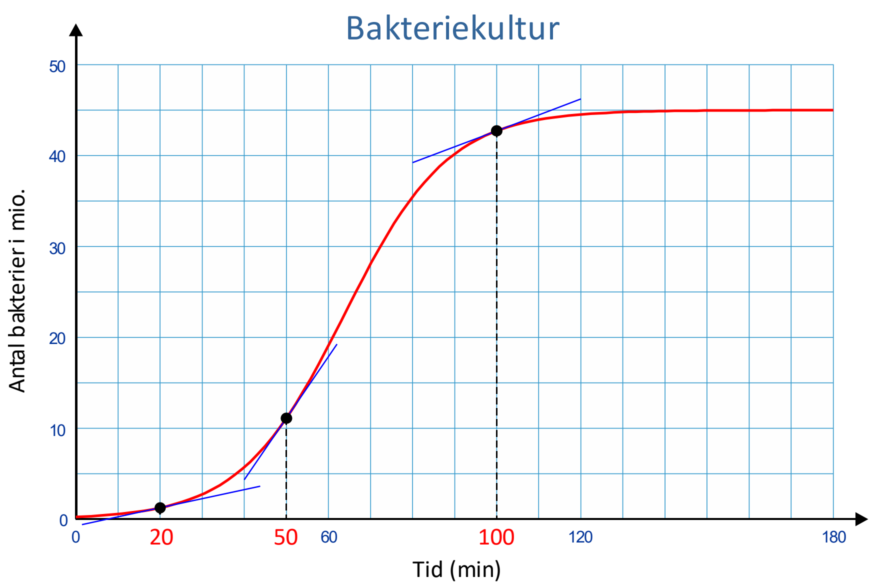
Den eksponentielle vækst er velkendt. Den overordnede begrundelse for, at den ofte forekommer i forbindelse med forskellige populationers udvikling er, at der her er tale om en *konstant procentvis vækst*. Men vi ved også, at populationer ikke kan vokse i det uendelige. Den erkendelse havde den belgiske matematiker *Pierre François Verhulst* (1804-1849) også gjort sig, da han en vinterdag i 1833 sad på sit studerekammer i Bruxelles. Du kan læse mere om denne spændende historie i [10]. For at gøre en lang historie kort, så ledte Verhulst efter en funktion, som bedst kan beskrive udviklingen af en population, når resurserne gradvist udtømmes. Han kom frem til den funktion, som vi i dag kalder for en *logistisk udvikling*. Funktionen kan se ud på lidt forskellig måde, blandt andet således:

Pierre François Verhulst (1804-1849)

(50) $$N(t) = \frac{M}{1+c\cdot e^{-a\cdot M\cdot t}}$$

Funktionen har tre frie parametre. Hvis man har en række dataværdier indeholdende populationsstørrelser til forskellige tidspunkter, kan man for eksempel bruge et CAS-værktøj til at foretage en logistisk regression, med henblik på at afgøre, om datapunkterne tilnærmelsesvist følger en logistisk kurve eller ej. I det følgende vil vi blot antage, at en bakteriekulturs udvikling kan beskrives med den logistiske forskrift (50) med følgende parametre: $M = 45\cdot 10^6$, $c = 175$ og $a = 1{,}8\cdot 10^{-9}$. Tiden t regnes i minutter.

(51) $$N(t) = \frac{45\cdot 10^6}{1+175\cdot e^{-0{,}081\cdot t}}$$



På forrige side er grafen for den logistiske vækst tegnet. Vi ser, at bakteriekulturen godt kan se ud til at vokse tilnærmelsesvist eksponentielt i begyndelsen. Derefter flader kurven ud som en følge af de begrænsede resurser. Det kan være mangel på føde, plads eller lignende. På figuren er tangenterne til grafen til tidspunkterne 20, 50 og 100 minutter indtegnet på figuren. Tangenternes hældning angiver væksthastigheden. I et CAS-værktøj finder vi nemt:

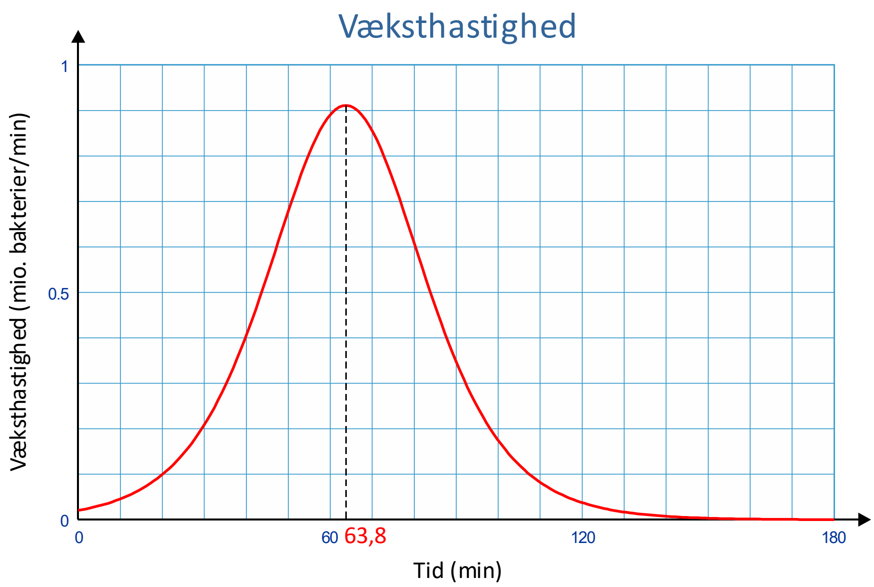
$$N'(20) = 99424{,}05747\,; \quad N'(50) = 677899{,}7752\,; \quad N'(100) = 174580.2430$$

Det fortæller os, at til tidspunktet 20 min. er væksthastigheden ca. 99000 bakterier/min., mens den til tidspunkterne 50 min. og 100 min. er henholdsvis ca. 678000 bakterier/min og ca. 175000 bakterier/min.

Men der må være et tidspunkt, hvor væksthastigheden $v(t) = N'(t)$ er størst. Til dette tidspunkt må grafen for væksthastighedsfunktionen have vandret tangent. Derfor differentierer vi igen: $v'(t) = N''(t)$ og løser for, hvornår størrelsen er 0:

$$v'(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = 63{,}76278980$$

Det overlades til læseren at vise, at der er tale om et lokalt og globalt maksimum for hastighedsfunktionen $v(t)$. Sagt på en anden måde: Bakteriekulturen vokser hurtigst til tidspunktet $t_{\text{max}} = 63{,}8$ min. Vi kan tegne grafen for væksthastigheden:



Dette eksempel lærer os desuden noget om den *anden afledede*. Væksthastigheden topper, når accelerationen er 0! Fra tiden 0 og indtil t_{max} vokser væksthastigheden, hvilket kan ses ved at hældningskoefficienterne for tangenterne til grafen for $N(t)$ (grafen på forrige side) vokser. Efter tidspunktet t_{max} vil væksthastigheden aftage, hvilket ses ved at hældningskoefficienterne for tangenterne aftager. Lidt mere løst kan man udtrykke det sådan: Før tidspunktet t_{max} drejer tangenterne til grafen for $N(t)$ i positiv omløbsretning, mens tangenterne drejer i negativ omløbsretning, når tiden passerer t_{max}. Lige til tidspunktet t_{max} har grafen for $N(t)$ det, som undertiden kaldes for en *skrå vendetangent*.

Når tiden går mod uendelig, vil populationens størrelse nærme sig til M. Det fremgår direkte af (50), idet leddet $e^{-a \cdot M \cdot t}$ vil nærme sig til 0, når $t \to \infty$. Vi har altså:

(52) $$N(t) \;=\; \frac{M}{1+c \cdot e^{-a \cdot M \cdot t}} \;\to\; M \qquad \text{for } t \to \infty$$

Oversat til vort eksempel betyder det, at bakteriekulturen vil nærme sig til 45 mio. bakterier over tid, hvilket stemmer fint overens med grafen for $N(t)$ to sider tidligere.

I øvrigt kan man vise den overraskende egenskab for en logistisk vækst, at væksthastigheden er størst, når populationen har nået halvdelen af sin grænse, altså:

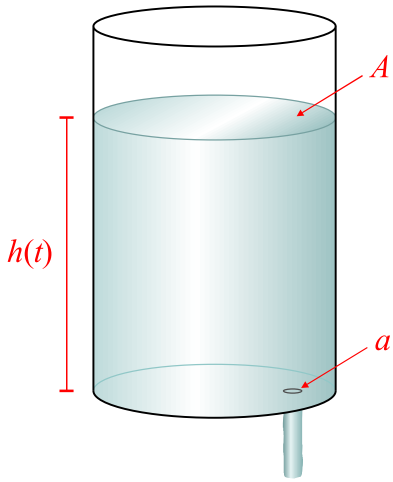
(53) $$N(t_{\max}) \;=\; \tfrac{1}{2} M$$

Lad os slutte eksemplet her og blot gøre læseren opmærksom på, at den logistiske vækst er en vigtig model, som ofte benyttes i biologien.

□

Eksempel 3.72 (Tømning af beholder)

En cylindrisk beholder med tværsnitsarealet A er fyldt med vand. Vandet løber ud af et lille cirkulært hul med tværsnitsareal a i bunden. Ved at anvende massebevarelse og bevarelse af den mekaniske energi kan man vise, at vandstanden $h(t)$ i beholderen som funktion af tiden t er givet ved forskriften:



(54) $$h(t) \;=\; \left(\sqrt{h_0} - \tfrac{1}{2} k \cdot t\right)^2$$

hvor h_0 er begyndelseshøjden, g er tyngdeaccelerationen og $k = a/A \cdot \sqrt{2g}$.

I det følgende kigger vi på et eksempel, hvor starthøjden er 45 cm, beholderens indre diameter er 40 cm, og diameteren af udløbshullet er 3 cm. Det giver følgende værdier for de forskellige størrelser, underforstået regnet i SI-enheder:

$$A = \pi \cdot R^2 = \pi \cdot 0{,}20^2 = 0{,}1256637062$$
$$a = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot 0{,}015^2 = 0{,}0007068583472$$
$$h_0 = 0{,}45$$
$$g = 9{,}82$$

Efter omskrivning giver (54) anledning til følgende forskrift for vandstanden:

$$h(t) = (0{,}6708203932 - 0{,}01246416739 \cdot t)^2$$

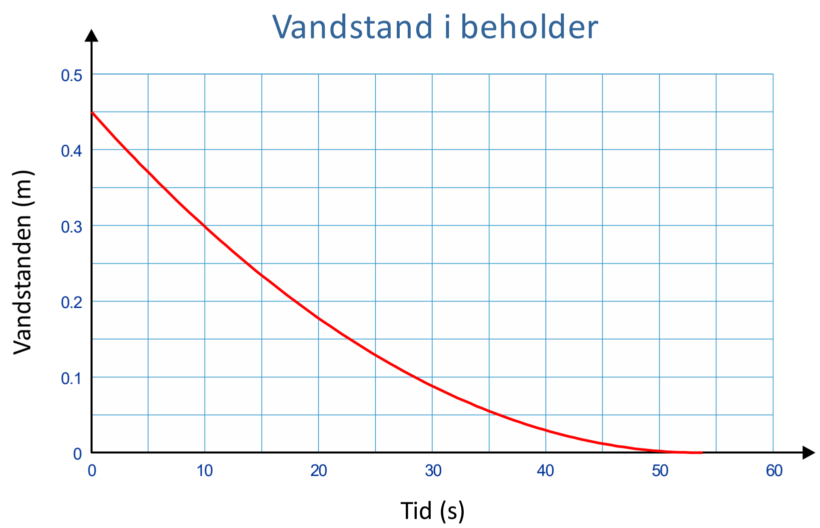
Hastighederne til tidspunkterne 10 s og 40 s:

$$h'(10) = -0{,}01361532597 \;\text{ og }\; h'(40) = -0{,}00429399784$$

Til tidspunktet 10 s aftager vandstanden altså med 1,36 cm/s, mens vandstanden til tidspunktet 40 s kun aftager med 0,42 cm/s. Vi kan også tegne en graf for vandstanden som funktion af tiden. Først bruger vi dog *solve*-funktionen i vort CAS-værktøj til at bestemme, hvornår beholderen er tom:

$$h(t) = 0 \;\Leftrightarrow\; t = 53{,}81991209\,.$$

Beholderen er altså tom efter godt 54 sekunder.



□

Eksempel 3.73 (Økonomi)

Differentialregning finder også anvendelser indenfor økonomi. En producent vil nok i høj grad kigge på sin fortjeneste, når denne foretager valg. Hvor mange enheder skal man producere? Umiddelbart kunne man tro, at det bare gælder om at producere så meget som muligt, for så må fortjenesten vel også vokse tilsvarende? Men det er ikke så nemt endda. Omkostningerne pr. enhed er for eksempel ikke konstante. Normalt vil det være sådan, at omkostningerne pr. enhed aftager på grund af stordriftsfordele; men produceres tilstrækkelig mange enheder, kan omkostningerne også pludseligt vokse pr. enhed, hvis der for eksempel opstår råvaremangel. Så er der indtægterne. Her er prisfastsættelsen pr. enhed vigtig. Normalt vil man kunne sætte prisen pr. enhed ned, hvis man producerer mange enheder. Sker det, vil man tjene mindre pr. enhed, men det kan være, at man derved kan sælge flere varer. *Efterspørgslen* vil således normalt afhænge af enhedsprisen. For at gøre en lang historie kort, vil vi i det følgende definere nogle funktioner, som repræsenterer enhedsprisen, indtægterne, omkostningerne og fortjenesten. De er alle funktioner af antal producerede enheder x. Funktionerne kan virke lidt vilkårlige, og man kan sagtens diskutere hvor realistiske de vil være i en konkret situation, hvor der er så mange ting i spil, så man ikke vil være i stand til at putte det hele ind i en matematisk formel. Alligevel illustrerer analysen nogle mekanismer i en virksomheds økonomi. Det kan give nogle kvalifikative fingerpeg om hvilke størrelser, man skal kigge på, for at optimere sin produktion. Derfor er der også en del matematik involveret, når man læser økonomi på universitetet.

x : Antal producerede enheder

Enhedsprisen som funktion af antal enheder: $enhedspris(x) = \dfrac{3200-6x}{3}$

Indtægterne er dermed (overvej): $ind(x) = x \cdot enhedspris(x) = x \cdot \left(\dfrac{3200-6x}{3}\right)$

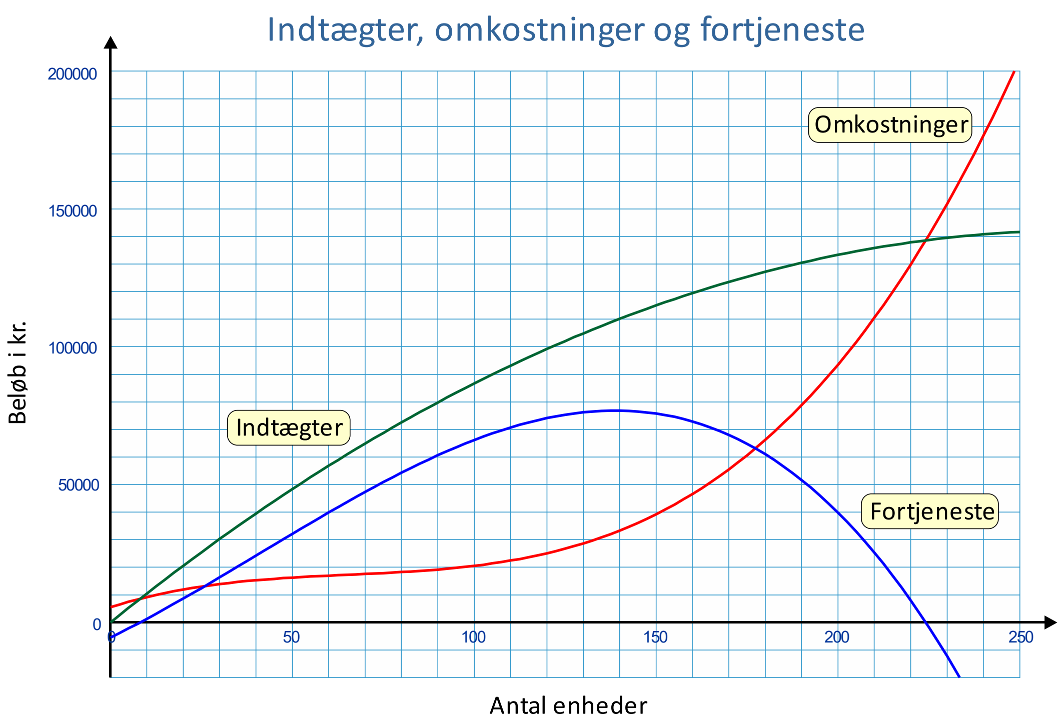
Omkostningsfunktionen sættes til: $om(x) = 0{,}028 \cdot x^3 - 5{,}5 \cdot x^2 + 420 \cdot x + 5500$

Fortjenesten: $F(x) = ind(x) - om(x) = -0{,}028 \cdot x^3 + 3{,}5 \cdot x^2 + \dfrac{1940}{3} \cdot x - 5500$

Lad os udregne differentialkvotienten af fortjeneste-funktionen i $x = 100$. CAS-værktøjet giver: $F'(100) = 506{,}67$. Hastigheden, hvormed fortjenesten vokser ved en produktion af 100 enheder, er dermed ca. 507 kr./enhed. Det indikerer, at det kan betale sig at producere mere, hvis man ønsker en større fortjeneste. Men hvilken produktionsstørrelse giver da den største fortjeneste? For at besvare det, undersøger vi for vandrette tangenter:

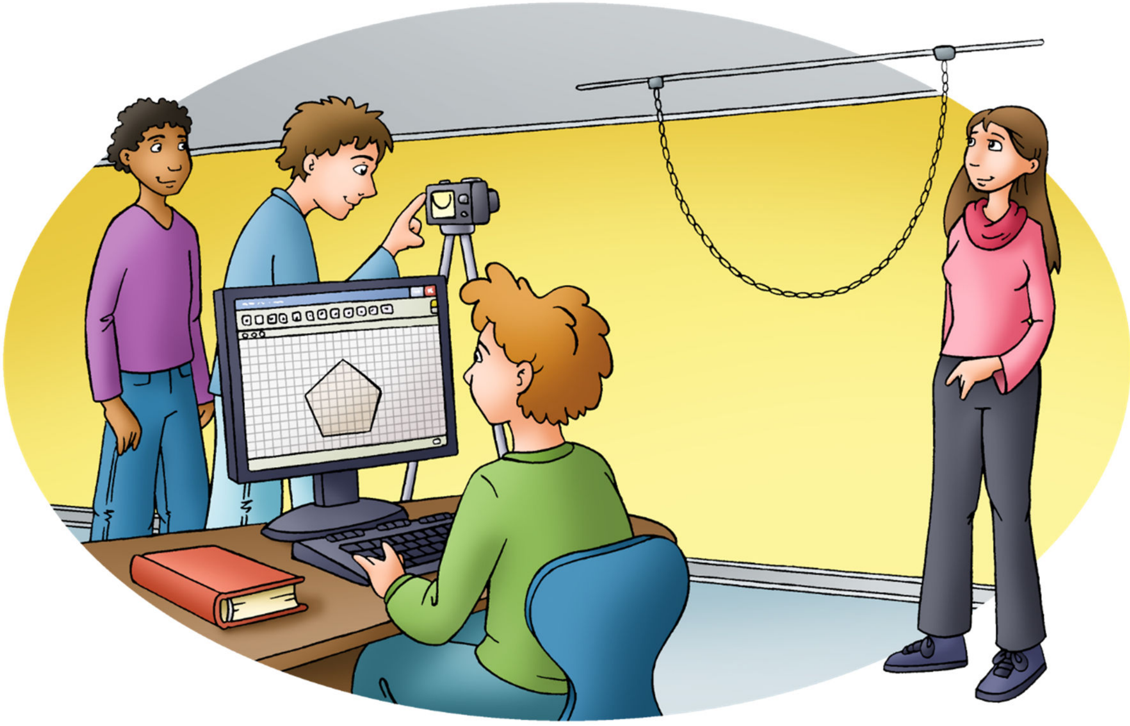
$$F'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -55{,}46481026 \ \vee \ x = 138{,}7981436$$

Da x skal være ikke-negativ, er svaret altså, at der er vandret tangent til grafen for fortjeneste-funktionen, når $x = 138{,}7981436$. Det overlades til læseren at vise, at der her er tale om et lokalt og globalt maksimum for $F(x)$. Det er med andre ord optimalt at producere ca. 139 enheder, hvis man vil optimere fortjenesten. Lad os afslutningsvist plotte graferne for indtægtsfunktionen, omkostningsfunktionen og fortjeneste-funktionen i samme koordinatsystem:

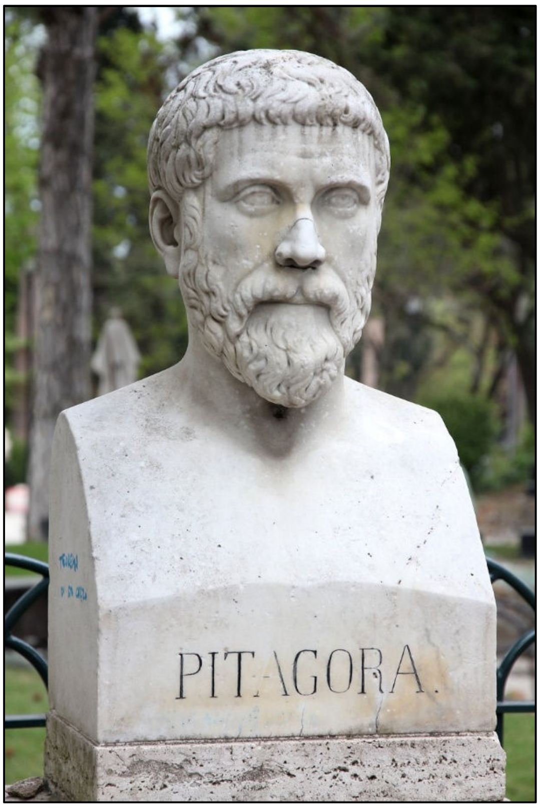


Den interesserede læser kan finde mere om økonomi i Tema E.

Temaer

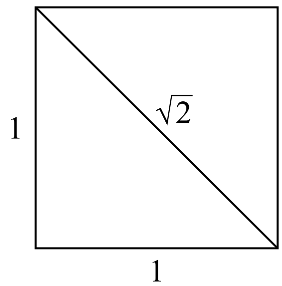


Tema A: Fra græsk matematik til det gyldne snit



Buste af Pythagoras

Man kender matematik hos babylonerne og ægypterne, men det var først med grækerne, at vi ser, at det *matematiske bevis* tager form. Grækerne tænkte i *tal* og i *geometri*. Blandt de allerførste græske matematikere, som vi har kendskab til, er *Thales* (ca. 624-547 f.Kr.), og den i folkeskolen så velkendte *Pythagoras* (ca. 572-497 f.Kr.) menes at have lært matematik af Thales. I det hele taget er vores viden om Pythagoras meget dunkel og obskur, og det er usikkert, hvad han overhovedet bidrog med. Måske skyldes mange resultater hans disciple eller studenter? Faktisk ved man med sikkerhed, at *Pythagoras' læresætning* var kendt allerede over 1000 år tidligere af babylonerne. Pythagoras flyttede i ca. 530 f.Kr. fra sit fødested på den græske ø Samos til en græsk by i det nuværende Syditalien. Her grundlagde han en filosofisk skole. Den eksisterede i små 200 år, og dens medlemmer blev kaldt *pythagoræerne*. Der var tale om et slags broderskab, hvor man blandt andet studerede matematik i sammenhæng med en naturfilosofi, der i dag kan virke lidt underlig. Således betragtedes *tal* (positive hele tal) som værende substansen i alting. Hermed mente de, at tal er basis for alle fysiske fænomener. Det er derfor heller ikke underligt, at man i musiske strenginstrumenter tilstræbte harmoni ved at strenglængderne og dermed tonernes frekvenser skulle have passende heltallige forhold: *Oktaven* med forhold 2:1, *kvinten* med forhold 3:2, *kvarten* med forhold 4:3, etc. De kendte himmellegemer blev også koblet til musiske harmonier. Vi skal ikke gå dybere ind i datidens verdensbillede, men mere vende os mod matematikken. Pythagoræerne bidrog med en del teori om tal og geometri. Oprindeligt troede man, at man altid vil være i stand til at måle både diagonalen og siden i et kvadrat. Med "måle" mente man her finde et mål eller enhed, således at både siden i kvadratet og diagonalen er et multiplum heraf. Pythagoræerne fandt dog ud af, at det ikke er tilfældet, og man mener det skete omkring 430 f.Kr. Hermed havde man opdaget de *inkommensurable* (ikke målelige) størrelser. I dag vil vi sige, at det svarer til opdagelsen af de *irrationale* tal. Pythagoræerne kunne ikke regne med det tal, som svarer til fx $\sqrt{2}$, men tallet kunne geometrisk være præsenteret ved en længde. Det er nok årsagen til, at geometrien derefter blev sat i centrum i de matematiske studier. I øvrigt blev den i dag verdensberømte filosof *Platon* (ca. 428 f.Kr. til ca. 348 f.Kr.) selv meget inspireret af matematik, da den repræsenterer den ideelle og rene tanke. Man var interesseret i *eksakte*



resultater, ikke tilnærmelser. Praktiske ting overlod de til slaver. De græske matematikere var filosoffer, som ville trænge ind til tingenes inderste væsen. Platon udtrykker følgende i hans bog *Republikken*: "Studiet af matematik udvikler og aktiverer en mental organisme, der er mere værdifuld end tusind øjne, fordi sandhed alene erfares gennem dette studium".

Der kan nævnes mange betydningsfulde græske matematikere, men nu springer vi til *Euklid* (ca. 300 f.Kr.). Euklid leverede sandsynligvis ikke vigtige bidrag til matematikken selv, men han samlede en masse matematiske resultater, som andre var nået frem til, i et imponerende værk på 13 bind, kaldet *Euklids elementer*. Det fik enorm betydning og anvendt i århundreder. I værket anvendes den axiometisk, deduktive metode til at bevise sætninger. Axiomerne, danner en basis, hvorpå man kunne deducere, altså foretage logiske følgeslutninger. Euklid kom også med definitioner og postulater. På den måde var grækerne tæt på den stringente måde, hvorpå vi i dag opbygger teorier og beviser sætninger. Man kan læse nogle af Euklids bøger i dansk oversættelse ved Thyra Eibe i [4].

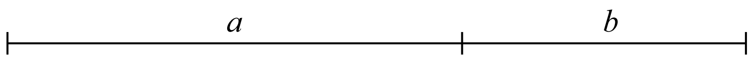
Øvelse A1

Se opgave 109: Forsøg at forstå beviset for at $\sqrt{2}$ er irrational. Et bevis, som svarer til dette modstridsbevis, blev tilføjet Euklids Elementer, bog 10.

I Euklids Elementer kan man også finde beskrevet det *gyldne snit*, som er temaet i resten af dette appendiks. Det vil sige navnet "Det gyldne snit" dukker først op omkring 1830, men selve det matematiske indhold er det samme nu som dengang.

Definition A2 (Det gyldne snit)

Man siger, at et linjestykke deles i *det gyldne snits forhold*, hvis *hele linjestykket forholder sig til det lange stykke, som det lange stykke til det korte stykke*. På figuren nedenfor er det således a/b, som betegnes det *gyldne snits forhold*, og tallet betegnes ofte med det græske bogstav φ (phi).



Idet vi har kaldt længden af det lange stykke for a og længden af det korte stykke for b, kan vi udtrykke betingelsen i definitionen således:

(A1)
$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$$

Øvelse A3

Lad $\varphi = a/b$ og brug derefter ligningen (A1) til at vise, at φ tilfredsstiller andengradsligningen $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$. Vis dernæst ved at løse andengradsligningen, at det gyldne snits forhold er givet ved

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}61803...$$

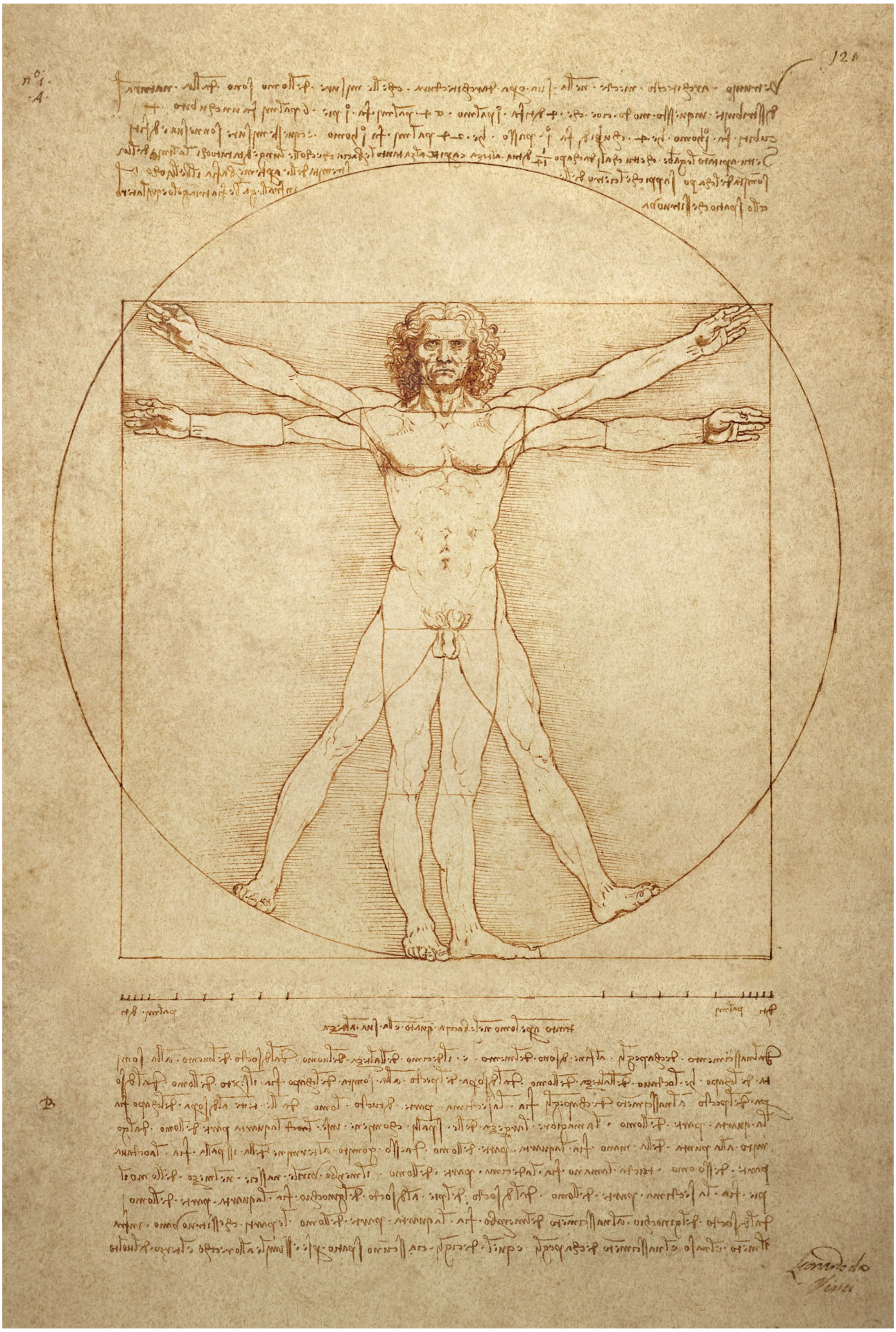
Hjælp: Benyt at $b/a = 1/\varphi$.

□

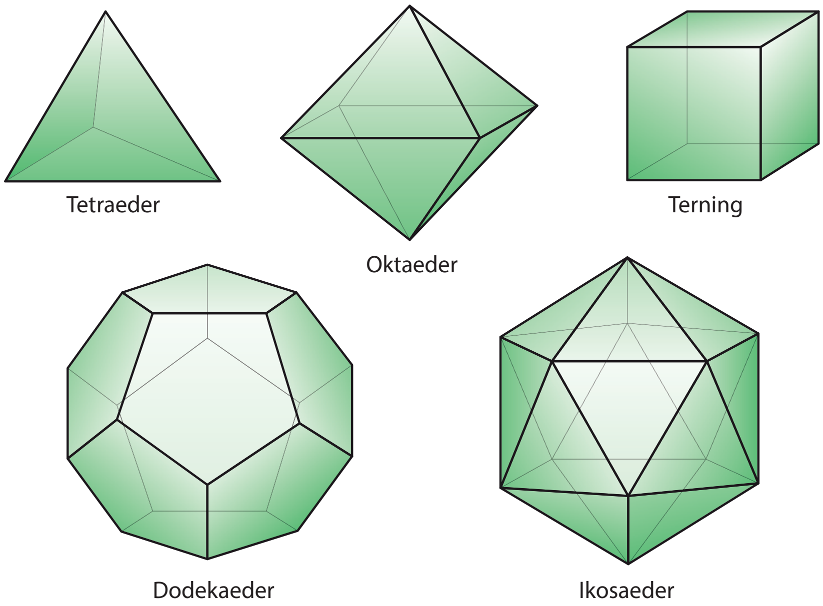
Euklid havde i øvrigt brug for dette forhold til at kunne konstruere en regulær femkant. Man kan så spørge om, hvorfor netop dette matematiske forhold fik den ophøjede status, som det har i dag? Her skal vi nok frem til 1509, hvor den italienske munk og matematiker, Luca Pacioli (1445-1517) udgav bogen *De Divina Proportione*. Bogen handler om matematiske forhold og deres anvendelser i geometri, perspektivet og kunst. Det faktum, at bogen desuden var illustreret af hans gode ven *Leonardo da Vinci* (1452-1519), har uden tvivl hjulpet med at få bogen til at blive kendt udover bare matematiker kredse. Men hvor kommer det gyldne snits forhold da ind? Jo, Pacioli var meget inspireret af Platon, og sidstnævnte havde i antikken koblet det sidste *regulære polyeder*, nemlig *dodekaederet* til det himmelske og guddommelige. De første fire regulære polyedre (der er fem i alt), var koblet til de fire elementer *jord*, *vand*, *luft* og *ild*. Men dodekaederet er netop sammensat af regulære femkanter, og så er vi tilbage til konstruktionen af en regulær femkant, som kræver, at man kan konstruere det gyldne snit. Derfor, konkluderede Pacioli, måtte det gyldne snit også være guddommeligt. En af Leonardo da Vincis illustrationer i De Devina Proportione er et dodekaeder. Tilsyneladende har Leonardo været begejstret for udtrykket "det guddommelige forhold", for han brugte det siden i et af sine egne værker til at karakterisere skønheden i formen, dog uden dermed at mene det gyldne snit. Og det er her, at de første tegn på misforståelser kan være opstået, som beskrevet i artiklen [5] med titlen "Ikke alle skæringer er gyldne". Leonardo var helt sikkert interesseret i forskellige forhold, som ikke nødvendigvis er gyldne. Vi kender hans illustration af *Vitrivius manden*, hvor han afbilder et menneske indskrevet i en cirkel og et kvadrat. Her er forholdet mellem afstanden fra fingerspids til fingerspids og mandens højde som 1:1. Ordet "Renæssance" kommer af det franske "genfødsel" og bruges om tiden, hvori Leonardo levede. Her genopdagede man den græsk-romerske politisk-kulturelle tradition. Derfor er det ikke underligt, når man i kunsten tog forhold mellem hele tal til sig, ligesom de gamle pythagoræere gjorde. Forhold og proportioner var med andre ord noget man tænkte meget over, sammen med symmetrier. Leonardos brug af betegnelsen "det guddommelige forhold" i sit eget værk kan muligvis have fået nogle til at tro, at han mente det samme med udtrykket som Pacioli, dvs. det gyldne snit. Det kan yderligere have ansporet nogle til at tro, at Leonardo mente, at det var tilrådeligt at anvende det gyldne snit i kunst og arkitektur. Det er uvist, hvor meget datidens kunstnere tænkte på at inddrage det gyldne snit i deres kunst. Når man har fundet forhold i et kunstværk, som omtrent forholder sig som det gyldne snit, kan det være svært at afgøre, om det er en bevidst handling eller en tilfældighed. Man har ikke fundet skriftlige kilder, der omtaler brugen af det gyldne snit i renæssance-kunsten. Det har ført til, at en del historikere har udtrykt skepsis over, hvorvidt det gyldne snit spillede en rolle i kunsten før ca. midten af 1800-tallet. Blandt de personer, som har fremmet myten om, at det gyldne snit bevidst skal have været brugt i kunsten i renæssancen eller endda helt tilbage til antikken er ifølge [5] den intellektuelle Adolf Zeising og matematikerne Hermann Hankel og Moritz Cantor. Nok om det her. Uanset hvad der er rigtigt, så er historien om det gyldne snit spændende, og det matematiske forhold har en masse interessante egenskaber. Efter Zeisings bog udkom i 1854 er mange blevet interesseret i det gyldne snit, og derefter har diverse kunstnere med sikkerhed anvendt det i deres kunst. Forfatteren Dan Brown har med sin internationale bestseller af en bog, *Da Vinci Mysteriet* (The Da Vinci Code) fra 2009, også givet liv til historien og mysteriet om det gyldne snit (*The Devine Proportion*).

Portræt af italieneren Luca Pacioli (1445-1517) med student

En ting der lige skal nævnes er, at de forhold mellem hele tal, som pythagoræerne tilstræbte, jo repræsenterer rationale tal, mens det gyldne snit er et irrationalt tal, som det fremgår af øvelse A3.



Den berømte tegning af *Leonardo da Vinci* (1452-1519) forestillende *Vitrivius-manden*. Leonardo studerede forhold i den menneskelige krop. Her er det 1:1 og altså ikke det gyldne snit.



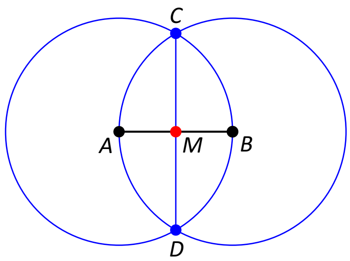
Man kan bevise matematisk, at der findes de fem konvekse regulære polyedre, som vist på figuren ovenfor, og at der *ikke* eksisterer andre. Kravet til, at et polyeder kan kaldes *regulært* er, at sidefladerne alle er ens og er *regulære polygoner*, hvis hjørner alle ligger på den samme omskrevne kugle. De fem regulære polyedre kendes også under navnet de fem *platoniske legemer*. En *regulær polygon* er en polygon, hvor alle siderne er lige lange og hvor alle hjørner ligger på den samme omskrevne cirkel.

Konstruktioner med passer og lineal

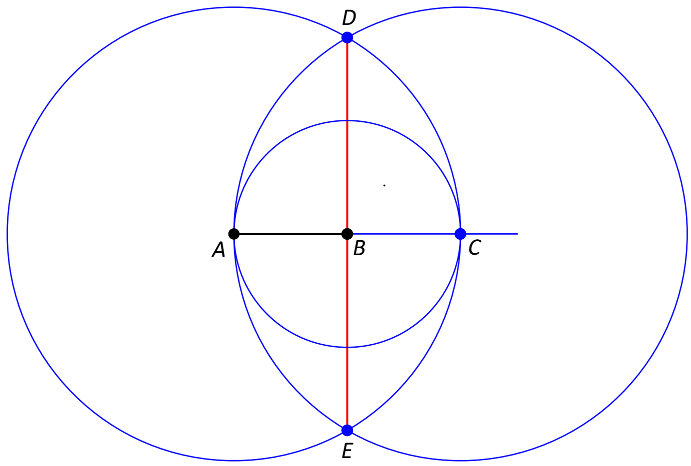
Vi skal prøve at foretage nogle konstruktioner i grækernes ånd. Konstruktion med passer og lineal dækker over følgende tilladte operationer:

1. Tegne den rette linje igennem to allerede fundne eller givne punkter. Eller at forlænge et linjestykke, så langt man ønsker.
2. Tegne en cirkel med et allerede fundet eller givet punkt som centrum og med en radius, som er lig med afstanden mellem to allerede fundne eller givne punkter.
3. Finde nye punkter som skæringspunkterne for allerede fundne eller givne rette linjer og cirkler.

De anførte regler kan synes noget begrænsende. Det er de på en måde også, for alt kan ikke konstrueres med passer og lineal. Der er dog overraskende meget, der kan. Det skal nævnes, at man fra start har to punkter til rådighed. Afstanden mellem disse kan man betegne med 1 (en *enhed*). To punkter er nødvendige for at kunne starte konstruktionen af nye linjer og punkter. Hvad der *ikke* er tilladt er at måle afstande med en lineal og afsætte punkter ved opmåling! Man må heller ikke tegne vinkler, hvor vinklen er opmålt med en vinkelmåler. Blandt basiskonstruktionerne er at kunne konstruere *midtpunktet på en given linje* samt at *oprejse en normal til et linjestykke i dets endepunkt*.



Konstruere midtpunkt
på linjestykke



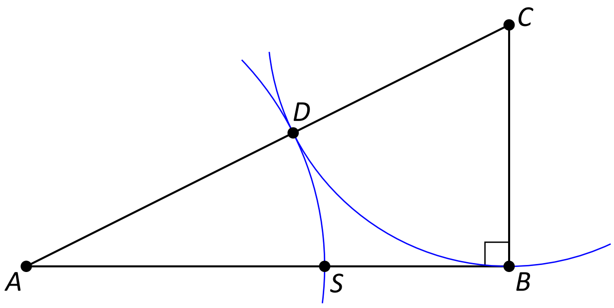
Oprejse normal til linjestykke
i dets ene endepunkt

Konstruktionen af midtpunktet på linjestykket AB kan beskrives således: Med AB i passeren og centrum i henholdsvis A og B tegnes to cirkler. Cirklernes skæringspunkter betegnes C og D. Linjen gennem C og D tegnes. Skæringspunktet M mellem linjestykket AB og linjestykket CD er det søgte midtpunkt.

Øvelse A4

Givet linjestykket AB. Giv en sproglig beskrivelse af konstruktionen af normalen i B antydet på den højre del af figuren ovenfor. Husk at en *normal* til et linjestykket er en linje, som står vinkelret på det oprindelige linjestykke.

Vi er nu klar til at beskrive, hvordan man kan dele et givet linjestykke AB i det gyldne snits forhold: Oprejs en normal til AB i punktet B. Afsæt punktet C op ad normalen, så $|BC| = \frac{1}{2} \cdot |AB|$. Sidstnævnte kan gøres ved først at konstruere midtpunktet M på linjestykket AB, tage BM i passeren og tegne en cirkel med centrum i B til skæring med normalen i C. Tegn linjestykket AC, så trekanten er fuldendt. Tag BC i passeren og tegn en cirkel med centrum i C til skæring med linjestykket AC i et punkt, der beregnes D. Tag endelig AD i passeren og tegn en cirkel med centrum i A. Skæringspunktet med linjestykket AB kaldes S. Punktet deler linjestykket i den gyldne snits forhold: $\varphi = |AB| / |AS| = |AS| / |BS|$.



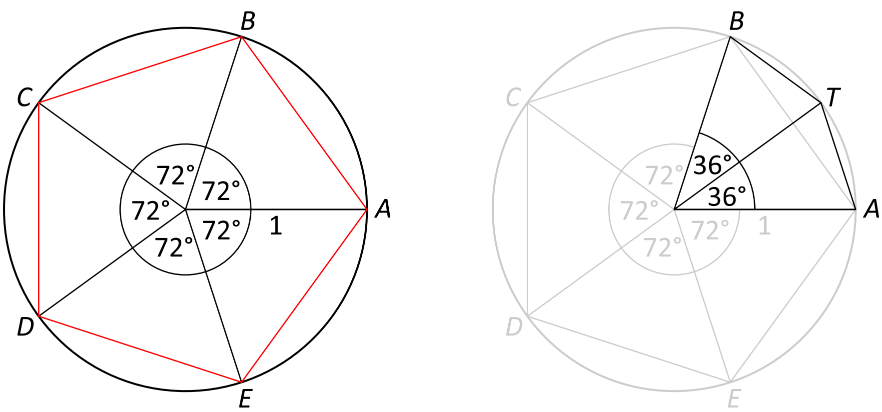
Konstruktion af det gyldne snit

Øvelse A5

a) Gennemfør selv de tre konstruktioner beskrevet på forrige side. Du kan gøre det med en gammeldags passer og lineal, men vil du have en meget præcis konstruktion, kan du med fordel gøre det med programmet GeoGebra.

b) Bevis at S virkelig deler linjestykket AB i det gyldne snits forhold. *Hjælp*: Lad linjestykket AB have længden 1. Hvor lang er BC så? Benyt herefter Pythagoras' sætning til at bestemme længden af AC. Du skal regne eksakt som grækerne, ikke i kommatal.

I det følgende er vort mål at konstruere en regulær femkant. Vi skal som tidligere anført indse, at det involverer det gyldne snit. For at kunne konstruere en regulær femkant, er det nødvendigt at kunne konstruere en vinkel på $360°/5 = 72°$. Kan vi konstruere en vinkel på 36°, kan vi også konstruere en vinkel på 72°. Har vi nemlig konstrueret stykket AT, er det indlysende nemt også at konstruere stykket AB.



Øvelse A6

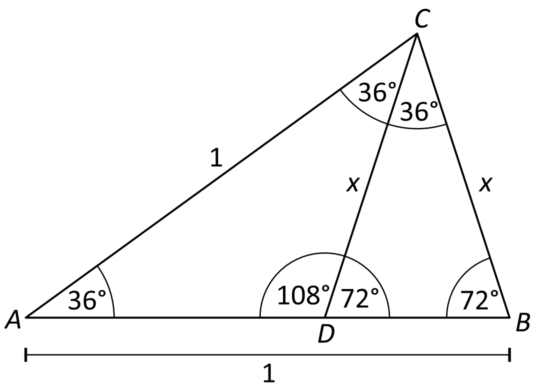
Nedenfor er ΔABC med vinkel 36° og to hosliggende sider med længderne 1 indtegnet. Et punkt D er afsat på siden AB, så ΔCDB er en ligebenet trekant.

a) Redegør for, at de angivne vinkler er korrekte.

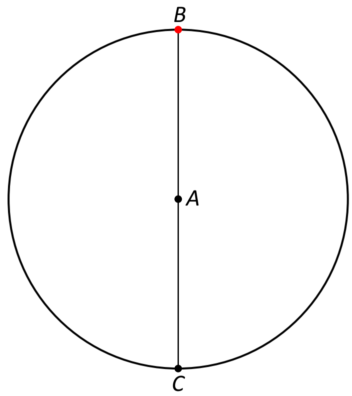
b) Forklar hvorfor $|AD| = x$ og $|DB| = 1 - x$.

c) Vis ved at udnytte, at ΔABC og ΔCDB er ensvinklede trekanter, at $x/(1-x) = 1/x$.

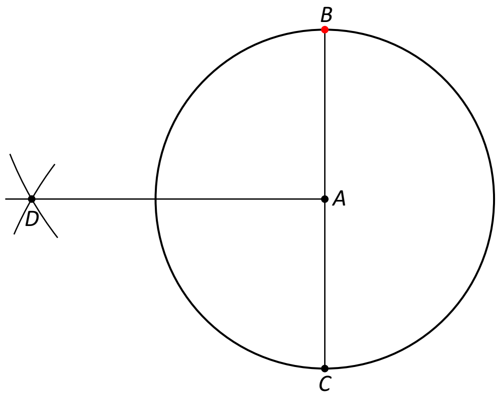
d) Vis at x opfylder $x^2 + x - 1 = 0$, og vis at den positive løsning er $\frac{1}{2} \cdot (\sqrt{5} - 1) = 1/\varphi$.



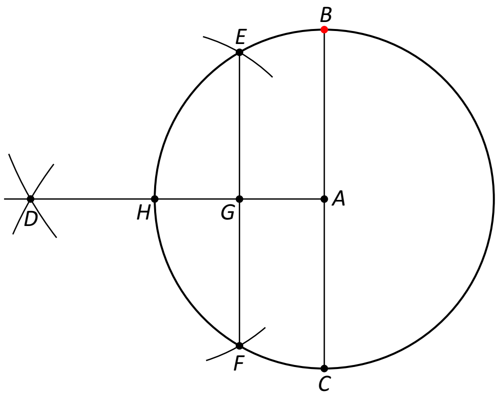
Vi er klar til at se en opskrift på, hvordan man kan konstruere en regulær femkant.



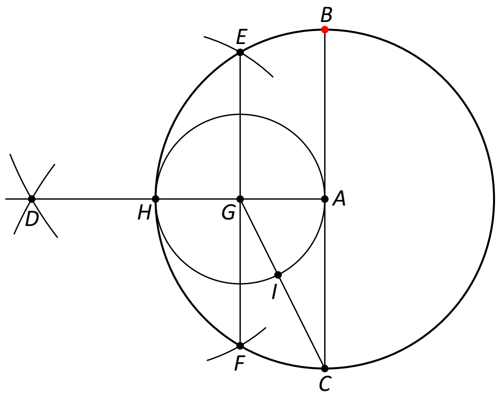
Start med linjestykket *AB*, som repræsenterer en enhed. Stykket behøver ikke være tegnet lodret. Tegn cirklen med stykket *AB* i passeren og centrum i *A*. Forlæng linjestykket *AB* til skæring med cirklen i *C*.



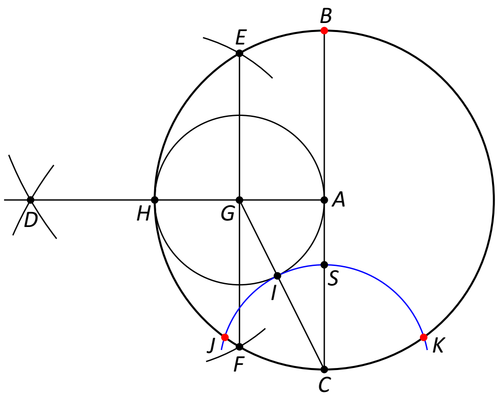
Tag stykket *BC* i passeren og tegn en cirkelbue med centrum i *B*. Det samme gøres med centrum i *C*. Skæringspunktet mellem cirkelbuerne kaldes *D*. Tegn en linje gennem *A* og *D* (er normal til *AB*).



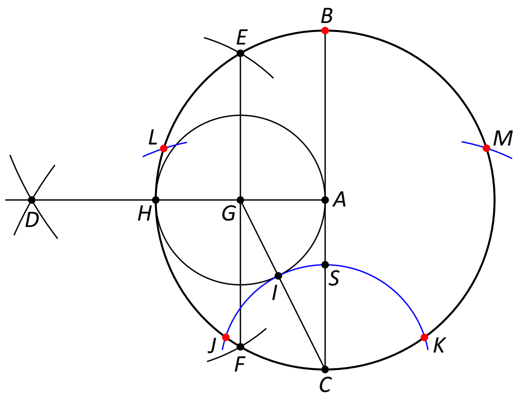
Skæringspunktet mellem *AD* og cirklen kaldes *H*. Tegn cirkelbuer med *AH* i passeren og centrum i *H*. Deres skæringer med cirklen kaldes *E* og *F*. Linjestykket *EF* er midtnormal til *AH*. Skæringspunktet kaldes *G*.



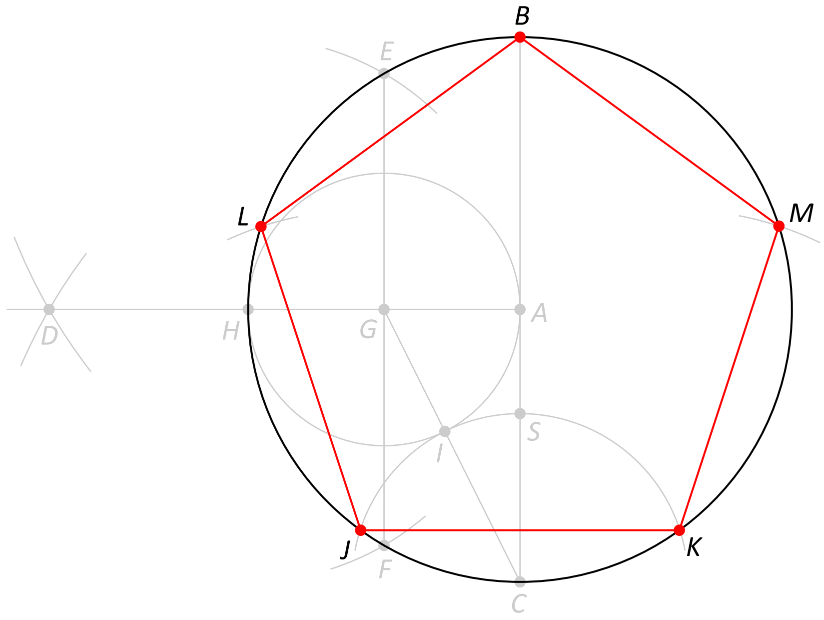
Tag stykket *GA* i passeren og tegn en lille cirkel med centrum i *G*. Tegn linjen gennem *G* og *C* til skæring med den lille cirkel i et punkt, vi betegner *I*.



Tag stykket *CI* i passeren og tegn en cirkel med centrum i *C*. Cirklens skæringspunkter med den oprindelige store cirkel betegnes *K* og *L*.



Tag stykket *JK* i passeren og tegn en cirkel med centrum i *J* til skæring med den store cirkel i punktet *L*. Tag stykket *JK* i passeren og tegn en cirkel med centrum i *K* til skæring med den store cirkel i punktet *M*.



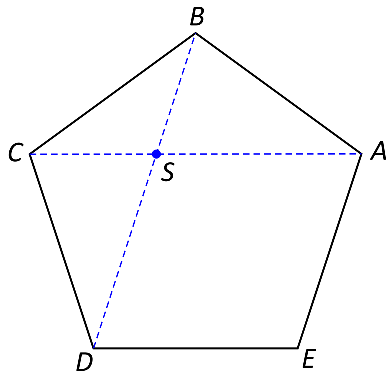
På figuren ovenfor har vi forbundet punkterne *J*, *L*, *B*, *M* og *K* med linjestykker. Påstanden er, at punkterne er hjørner i en regulær femkant.

Øvelse A7

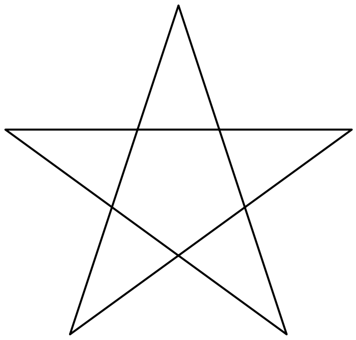
Gennemfør ovenstående konstruktionsproces i praksis, gerne med GeoGebra.

Bevis for at ovenstående konstruktionsproces virkelig giver en regulær femkant: Betragt ΔCAG på figuren ovenfor. Ifølge konstruktionen af det gyldne snit omtalt på side 63, er $|CS| = 1/\varphi$. Dermed er også $|CJ| = 1/\varphi$. ΔCAJ har altså siderne 1, 1 og $1/\varphi$. Det er netop den trekant, vi har studeret i øvelse A6. Vi konkluderer, at $\angle CAJ = 36°$ og heraf endelig, at $\angle KAJ = 72°$. Herefter kan man bare tage stykket *JK* i passeren og tegne en cirkel med centrum i punktet *J* til skæring med den oprindelige store cirkel i *L*. Samme afstand i passeren og centrum i punktet *K* vil give punktet *M*. Dermed har man konstrueret den regulære femkant.

Den regulære polygon eller *pentagonen*, som den også kaldes, har en række smukke egenskaber. Det gyldne snit kan genfindes i den geometriske form på forskellig vis. Vi angiver uden bevis, at to diagonaler, der ikke mødes i et endepunkt, skærer hinanden i det gyldne snits forhold. På venstre figur på næste side gælder således $|AS|/|CS| = \varphi$. Forholdet mellem en diagonal og en side er også det gyldne snit: $|CA|/|DE| = \varphi$. Pentagonen spillede en stor rolle for pythagoræerne. Hvis man forlænger siderne på den regulære femkant, får man dannet en fem-takket stjerne kaldet et *pentagram*. Pythagoræerne brugte pentagrammet som deres hemmelige logo for at ønske hinanden sundhed og lykke. Andre kulturer har tillagt pentagrammet guddommelige og magiske kræfter. Pentagrammet kan ses på højre del af figuren på næste side.



Regulær femkant (Pentagon)



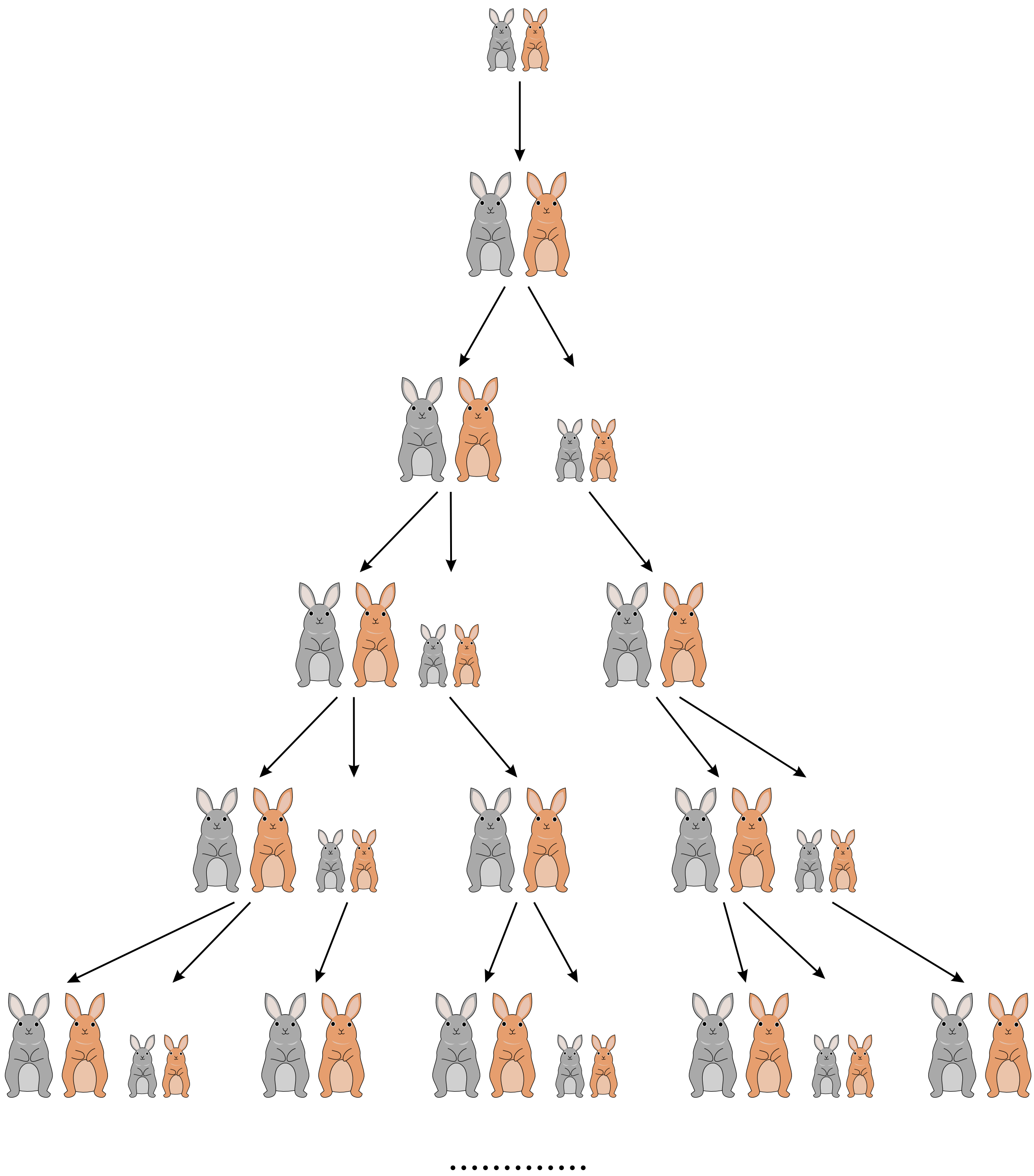
Pentagram

Konstruktioner med passer og lineal er i det hele taget en fascinerende disciplin. Man kan halvere en vinkel med passer og lineal, men ikke *tredele en vinkel*. Grækerne prøvede forgæves at finde metoder hertil. Først i 1800-tallet blev det endelig bevist, at det ikke kan lade sig gøre. Man kan heller ikke *kvadrere cirklen* eller *fordoble kuben*, som er to andre klassiske problemer. Vi skal ikke komme nærmere ind på dette her. Interesserede kan eventuelt konsultere [2]. Angående kunsten at konstruere regulære polygoner, så var det længe uklart, hvilke man kunne konstruere med passer og lineal. En af historiens største matematikere, *Carl Friedrich Gauss* (1777-1855) angav i en alder af 19 år en metode til at konstruere den regulære 17-kant! Gauss kom i øvrigt med en fuldstændig løsning på spørgsmålet om konstruerbare regulære polygoner, og det blev publiceret i hans berømte værk *Disquisitiones arithmeticae* fra 1801. Nok om det her.

Fibonacci tallene

Vi foretager igen et spring i tid. Denne gang er vi i Norditalien i begyndelsen af 1200-tallet. *Leonardo af Pisa* (ca. 1170-ca. 1250), eller som han også blev kaldt, *Fibonacci*, var søn af en forretningsmand og embedsmand. Pisa var dengang en livlig handelsby, hvor man blandt andet handlede med krydderier fra Fjernøsten. Den megen handel krævede bogføring af lagre og priser. At regne med romertal er langt fra effektivt. At lægge sammen og trække fra går lige an. At gange tal sammen er håbløst. Det hjalp dog lidt, at man kunne regne på kuglerammer, men det uhensigtsmæssige talsystem var en stor hæmsko. Leonardo hjalp i en periode sin far som handelsmand og toldfunktionær i Bugia i det nuværende Algeriet, og rejste senere til flere andre Middelhavslande. Her stiftede han bekendtskab med det hindu-arabiske talsystem, som han erfarede var alle andre talsystemer overlegent. Efter at have fået udvidet sin matematiske horisont, gik han i gang med at skrive en bog, hvori han beskrev, hvordan man kan anvende det hindu-arabiske talsystem i praksis. Bogen indeholder et væld af eksempler, som spænder lige fra hestekøbsopgaver til tømning og fyldning af cisterner. Leonardos bog med navnet *Liber Abaci* udkom i år 1202. Han høstede stor anerkendelse for værket. Den var et kærkomment bidrag til matematikken i Vesteuropa, som på den tid var meget tilbagestående, ikke mindst som en følge af kirkens store dominans. Men tilbage til Liber Abaci. Grunden til, at bogen omtales her er, at der er en helt særlig opgave fra kapitel XII: udviklingen af antal kaniner i en kanin-population. Som man måske kan gætte, har den forbindelse til det gyldne snit!

Et par kaniner (en han og en hun) føder et nyt par kaniner hver måned. Nyfødte kaniner bliver dog først kønsmodne efter 2 måneder. Vi starter med ét par nyfødte kaniner. Efter 1 måned er de blevet større, men stadig ikke kønsmodne. Derfor er der stadig kun ét par. Efter 2 måneder er parret kønsmodent og får et nyt par som afkom. Sammen med det oprindelige par er der dermed to par. Efter 3 måneder føder det oprindelige par igen et nyt par, mens det andet par ikke er fødedygtigt endnu. Sådan fortsættes måned efter måned. Skematisk kan det stilles således op:



Øvelse A8

Nævn flere antagelser, der ligger til grund for ovenstående udvikling i kaninbestanden. Er de realistiske i en praktisk sammenhæng?

Selv om opgaven er meget urealistisk, fik den alligevel stor opmærksomhed, eftersom den har teoretisk interesse. Udviklingen måned efter måned i kaninbestanden kan nemlig beskrives ved en *rekursiv talfølge*. Hermed menes en talfølge, hvor man kan bestemme det nye tal i talfølgen ud fra kendskab til de forrige. Lad i det følgende V_n, B_n og F_n betegne henholdsvis antal voksne kaninpar, antal børnekaninpar og det samlede antal kaninpar efter $n-1$ måneder. Da haves: $V_n = F_{n-1}$ og $B_{n-1} = V_{n-2}$ og heraf: $F_n = V_n + B_n$ $= F_{n-1} + V_{n-1} = F_{n-1} + F_{n-2}$. Det samlede antal kaninpar en given måned er altså lig med summen af de samlede antal kaninpar de to forrige måneder. Vi kan skrive det således:

$$\begin{aligned} &F_1 = 1, F_2 = 1. \\ &F_n = F_{n-1} + F_{n-2}\,, \quad n \geq 3 \end{aligned} \tag{2}$$

Vi har her tilføjet de to første værdier i talfølgen. Med dem og den angivne regel, kan vi finde alle efterfølgende værdier i talfølgen. Nedenfor er udregnet de første tal i talfølgen, hvilket ses at stemme overens med vores figur med kaniner på forrige side.

$$\begin{aligned} F_3 &= F_2 + F_1 = 1+1 = 2 \\ F_4 &= F_3 + F_2 = 2+1 = 3 \\ F_5 &= F_4 + F_3 = 3+2 = 5 \\ F_6 &= F_5 + F_4 = 5+3 = 8 \\ F_7 &= F_6 + F_5 = 8+5 = 13 \\ &\cdots \end{aligned}$$

Øvelse A9

Prøv selv at generere en liste over de første 50 Fibonacci-tal. Det kan være en fordel at bruge et regneark såsom Excel hertil.

Det viser sig, at forholdet mellem to på hinanden følgende Fibonacci-tal nærmer sig til det gyldne snit, når n går mod uendelig. Denne egenskab blev i 1611 opdaget af den berømte tyske astronom *Johannes Kepler* (1571-1630). Det blev først bevist langt senere.

$$\begin{aligned} 1/1 &= 1.000000 \\ 2/1 &= 2.000000 \\ 3/2 &= 1.500000 \\ 5/3 &= 1.666666 \\ 8/5 &= 1.600000 \\ 13/8 &= 1.625000 \\ 21/13 &= 1.615385 \\ 34/21 &= 1.619048 \\ 55/34 &= 1.617647 \\ 89/55 &= 1.618182 \\ 144/89 &= 1.617978 \\ &\cdots \end{aligned}$$


Fibonacci (ca. 1170-ca. 1250)

I det følgende ønsker vi at give et bevis for påstanden på forrige side, altså af forholdet mellem to på hinanden følgende Fibonacci-tal konvergerer mod det gyldne snit. Hertil får vi først brug for at bevise en egenskab for Fibonacci-tallene.

Sætning A10

Lad $\{F_n\}$ være Fibonacci-talfølgen givet ved (B2). Da gælder:

(A3) $$F_{n+1}^2 - F_{n+1}\cdot F_n - F_n^2 = (-1)^n$$

Bevis: For at bevise formlens rigtighed skal vi bruge en teknik, som kaldes *induktion*. Metoden går ud på at vise formlens rigtighed for den eller de første værdier af n og derefter vise, at *hvis* formlen gælder for n, så gælder den også for $n+1$. Kan vi vise det, kan vi konkludere, at formlen gælder for alle værdier af $n \in N$. Er formlen rigtig for $n=1$, så er den det nemlig også for $n=2$. Når den er rigtig for $n=2$, så er den det også for $n=3$, etc. Først indsætter vi $n=1$ i (A3):

Basisskridt: $F_2^2 - F_2 \cdot F_1 - F_1^2 = (-1)^1 \;\Leftrightarrow\; 1^2 - 1\cdot 1 - 1^1 = -1$ stemmer!

Induktionsskridt:

$$F_{n+1}^2 - F_{n+1}\cdot F_n - F_n^2 = (-1)^n$$
$$\Updownarrow$$
$$\left(F_n + F_{n-1}\right)^2 - \left(F_n + F_{n-1}\right)\cdot F_n - F_n^2 = (-1)^n$$
$$\Updownarrow$$
$$F_n^2 + 2F_n\cdot F_{n-1} + F_{n-1}^2 - F_n^2 - F_n\cdot F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$$
$$\Updownarrow$$
$$-F_n^2 + F_n\cdot F_{n-1} + F_{n-1}^2 = (-1)^n$$
$$\Updownarrow$$
$$F_n^2 - F_n\cdot F_{n-1} - F_{n-1}^2 = (-1)^{n-1}$$

hvor i det første ensbetydende tegn har udnyttet, at F_{n+1} er summen af de to forrige, altså F_n og F_{n-1}. I sidste ensbetydende tegn har vi gange med -1 på begge sider af lighedstegnet. Den sidste linje er netop (A3), hvor n er udskiftet med $n-1$. Vi har dermed bevist (A3) for alle $n \in N$.

□

I stil med (A3) findes der utallige andre smukke egenskaber for Fibonacci-tallene. Det er alt sammen meget fascinerende. Faktisk så meget, så der er skabt et helt tidsskrift *Fibonacci Quarterly*, som tager sig af disse egenskaber. Vi skal ikke gå dybere ind i det her, blot bruge sætning A10 til at bevise sætningen vedrørende det gyldne snit.

Sætning A11

Talfølgen bestående af forholdet mellem to på hinanden følgende Fibonacci-tal konvergerer mod det gyldne snit:

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} \to \varphi \quad \text{for} \quad n \to \infty$$

Bevis: Lad os dividere med F_n^2 på begge sider af lighedstegnet i (A3):

$$\text{(A4)} \qquad \frac{F_{n+1}^2 - F_{n+1} \cdot F_n - F_n^2}{F_n^2} = \frac{(-1)^n}{F_n^2} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{F_{n+1}}{F_n}\right)^2 - \left(\frac{F_{n+1}}{F_n}\right) - 1 = \frac{(-1)^n}{F_n^2}$$

Vi sætter $K_n = F_{n+1}/F_n$, hvorefter vi ser, at K_n tilfredsstiller følgende andengradsligning:

$$\text{(A5)} \qquad x^2 - x - \left(1 + \frac{(-1)^n}{F_n}\right) = 0$$

med løsningerne:

$$\text{(A6)} \qquad x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot \left(1 + (-1)^n / F_n\right)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5 + 4 \cdot (-1)^n / F_n}}{2}$$

For alle n har vi, at $F_{n+1} \geq F_n$, hvoraf vi slutter, at $K_n \geq 1$. Derfor må K_n være løsningen, der kommer fra plusset i (A6). Eftersom der klart gælder, at $F_n \to \infty$ for $n \to \infty$, får vi:

$$\text{(A7)} \qquad K_n = \frac{1 + \sqrt{5 + 4 \cdot (-1)^n / F_n}}{2} \to \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \varphi \quad \text{for} \quad n \to \infty$$

Vi har dermed bevist sætningen.

□

Som sædvanligt stillede matematikerne sig en masse ekstra spørgsmål for at udvide forståelsen af Fibonacci-tallene. Et af dem var, om det virkelig er nødvendigt for eksempel at udregne de første 999 Fibonacci-tal for at kunne udregne Fibonacci-tal nummer 1000? Svaret er, at det behøver man ikke. I det 19. århundrede viste franskmanden *Jacques Philippe Marie Binet* (1786-1856), at der findes en formel til bestemmelse af det n'te Fibonacci-tal. Formlen, som tilsyneladende allerede var kendt i det 18. århundrede af *Leonhard Euler* (1707-1783) og *Abraham de Moivre* (1667-1754), angives her uden bevis:

Sætning A12 (Binets formel)

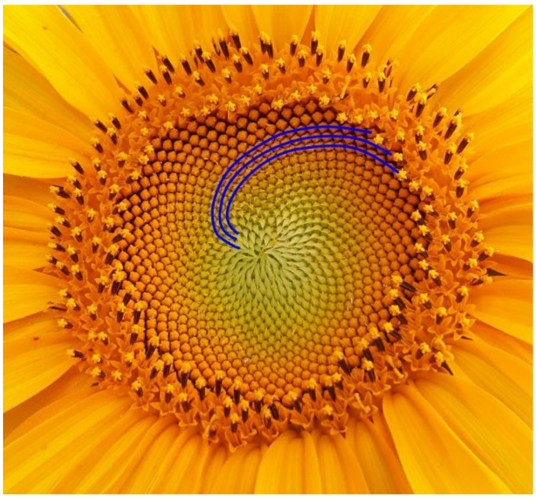
Det n'te Fibonacci-tal kan bestemmes af følgende formel:

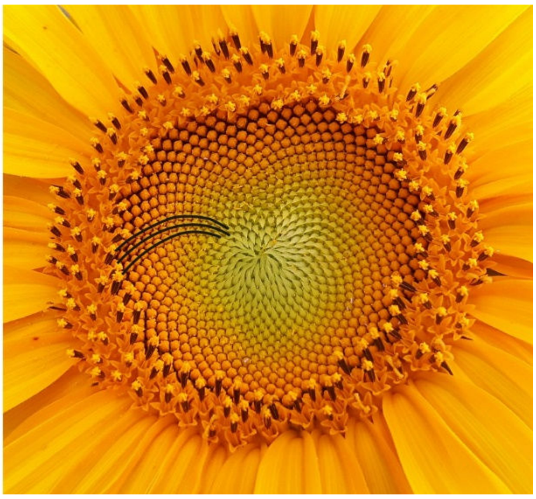
$$\text{(A8)} \qquad F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \right)$$

Det kan synes overraskende, at en formel, som giver et helt tal for alle værdier af n, faktisk indeholder kvadratrødder. I øvrigt kan Binets formel alternativt skrives således:

(A9) $$F_n = \frac{\varphi^n - \psi^n}{\sqrt{5}}$$

hvor $\psi = -1/\varphi$ er den anden løsning til andengradsligningen $x^2 - x - 1 = 0$, udover φ selv. Ved i udviklingen af en kaninpopulation at indføre, at kaniner først kan få unger efter to måneder, skabte Fibonacci altså en højst interessant talfølge. Hvis kaninerne kunne formere sig straks efter første måned, ville der blot være tale om en lidt "kedelig" eksponentiel vækst! En anden årsag til, at Fibonacci-tallene er blevet så berømte er, at de dukker op i så mange uvante situationer. Stamtræet fra en *drone* (hanbi) udvikler sig således efter en Fibonacci talfølge. Et andet eksempel er energitilstandene i en elektron (se [8]). Ikke nok med det: Fibonacci-tal genfindes i planter! Når blade gror på en kvist eller grene gror på en stamme, så gør de det på en måde, så der opnås optimal adgang til lys, regn og luft. Det ville for eksempel være uhensigtsmæssigt for grene at placere sig over hinanden. Typisk spiralerer de op langs stammen. At naturen således automatisk optimerer sine egne betingelser er fascinerende. Emnet hedder *fyllotaksi* eller *Phyllotaxis* på engelsk. Hos en solsikke består blomsterkurven af gule randblomster og i midten en mængde små mørke skiveblomster. Sidstnævnte danner et kompliceret spiralmønster, både mod højre og mod venstre, som indikeret med tre eksempler på figurerne nedenfor. Den spændende egenskab er, at antallet af højredrejede spiraler og venstredrejede spiraler altid er Fibonacci-tal! I dette tilfælde kan man tælle 55 venstredrejede spiraler og 34 højredrejede spiraler!





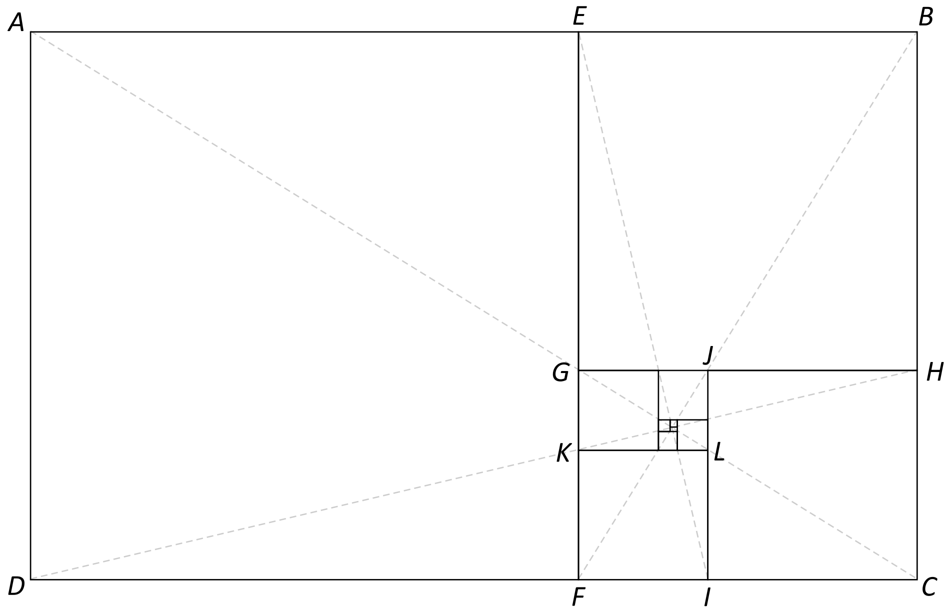
Øvelse A13

Søg efter billeder af solsikker på Internettet og tæl antallet af højredrejede og venstredrejede spiraler. Får du Fibonacci-tal?

Også hos ananas kan man se et lignende fænomen. Her er hvert af de hexagonale skæl på frugtens overflade faktisk en del af hele tre forskellige spiraler! Igen er antallet altid Fibonacci-tal! Vi skal ikke gå mere detaljer med det her.

Det gyldne rektangel og den gyldne spiral

Et rektangel kaldes for et *gyldent rektangel*, hvis forholdet mellem dets sider er som $1:\varphi$. Det interessante er, at hvis man fjerner et kvadrat fra rektanglet, så er resten også et gyldent rektangel. Figuren viser det gyldne rektangel *ABCD*. Når kvadratet *AEFD* fjernes, er det tilbageværende rektangel *EBCF* altså også gyldent.

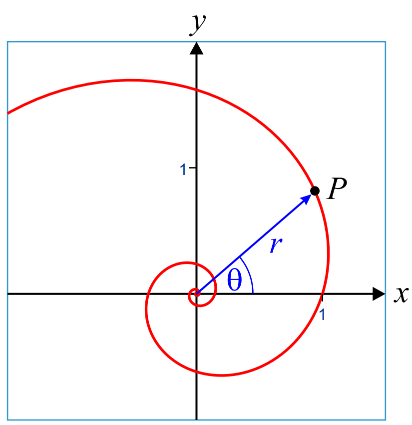


Vi kan fortsætte processen: Når kvadratet *EBHG* fjernes, er der et gyldent rektangel tilbage, nemlig *GHCF*, etc. Det viser sig, at diagonalerne, tegnet med grå stiplede linjer ovenfor, møder hinanden i samme punkt. De "fjernede kvadrater" vil nærme sig til dette punkt, når processen fortsættes i det uendelige.

Øvelse A14

Vis at når man fjerner et kvadrat fra et gyldent rektangel, så er der et gyldent rektangel tilbage. *Hjælp*: Kald den korte side for *a*. Så er den lange side $a\cdot\varphi$. Udnyt derefter egenskaben $\varphi = 1/(\varphi-1)$ for det gyldne snit.

Men der er også noget, som hedder den *gyldne spiral*. Spiralens ligning er nemmest at angive i *polære koordinater*, hvor den ser således ud:



(A10) $$r = \varphi^{\frac{2\theta}{\pi}}\ ,\ \text{hvor } \varphi = 1{,}61803...$$

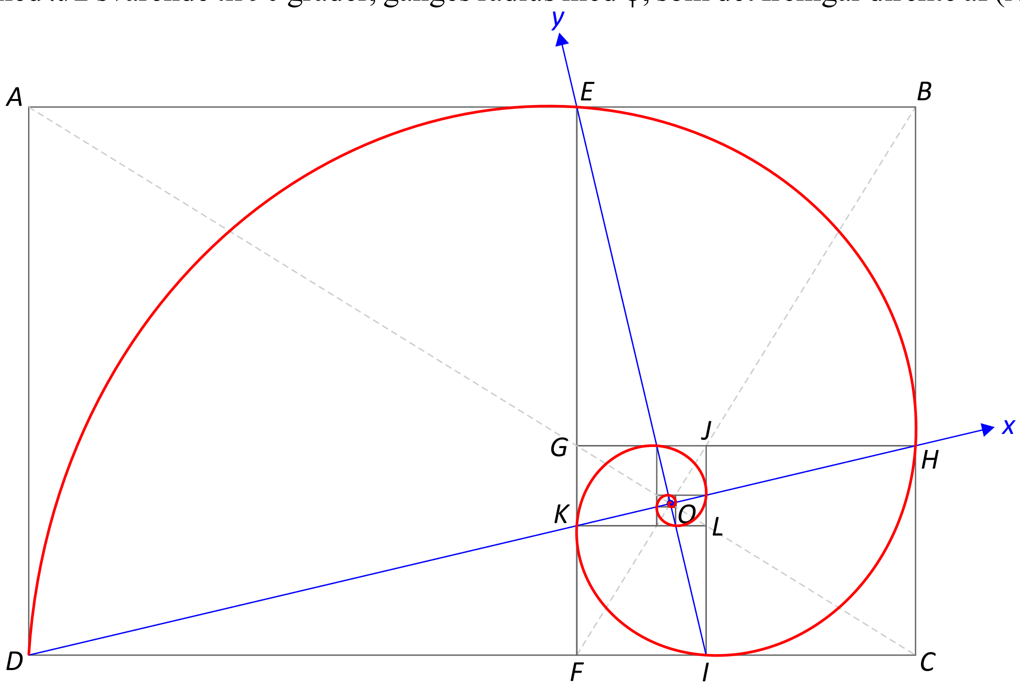
eller i almindelige rektangulære koordinater:

(A11) $$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cdot\cos(\theta) \\ r\cdot\sin(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi^{2\theta/\pi}\cdot\cos(\theta) \\ \varphi^{2\theta/\pi}\cdot\sin(\theta) \end{pmatrix}$$

Øvelse A15

Brug et CAS-værktøj til at tegne banekurven for vektorfunktionen givet ved (A11). Tegn kurven i området $-6\pi \leq \theta \leq 6\pi$. Du bør sikre dig, at der er samme skalering på begge akser, for at det ser realistisk ud.

Hvis man indtegner den gyldne spiral oveni figuren med gyldne rektangler på forrige side, på en måde, så de blå akser udgør det drejede koordinatsystem, så vil den gyldne spiral passere igennem hjørnerne i kvadraterne: … K, I, H, E, D, … Hver gang vinklen θ ændrer sig med $\pi/2$ svarende til 90 grader, ganges radius med φ, som det fremgår direkte af (A10).



Den gyldne spiral *tangerer* imidlertid *ikke* de gyldne rektangler i de angivne punkter, som det ellers kunne se ud til. Den gyldne spiral er i øvrigt et specialtilfælde af en såkaldt *logaritmisk spiral*, som i polære koordinater har ligningen $r = b \cdot a^{b \cdot \theta}$. En logaritmisk spiral er *selvsimilær*, hvilket vil sige, at hvis man zoomer ind i spiralen, vil det se ud som en nøjagtig kopi af helheden. Tværsnittet af et *Nautilus*' sneglehus er approksimativt en logaritmisk spiral. Dog ikke en gylden spiral, som det undertiden fejlagtigt anføres.

Kunst

Le Corbusier er kunstnernavnet for den schweiziske født arkitekt, møbeldesigner, byplanlægger, forfatter, skulptør og kunstmaler Charles-Édouard Jeanneret-Gris (1887-1965). Han studerede det gyldne snit og brugte det i sine produktioner. Blandt andet har han skabt proportionssystemet *Modulor*, som han brugte som skala i mange af sine bygninger. The Modulor er et forsøg på at opdage størrelsesforhold i den menneskelige krop, inspireret af Leonardo da Vincis *Vitruvius* mand samt andre italienske renæssance kunstnere, herunder Leon Battista Alberti.

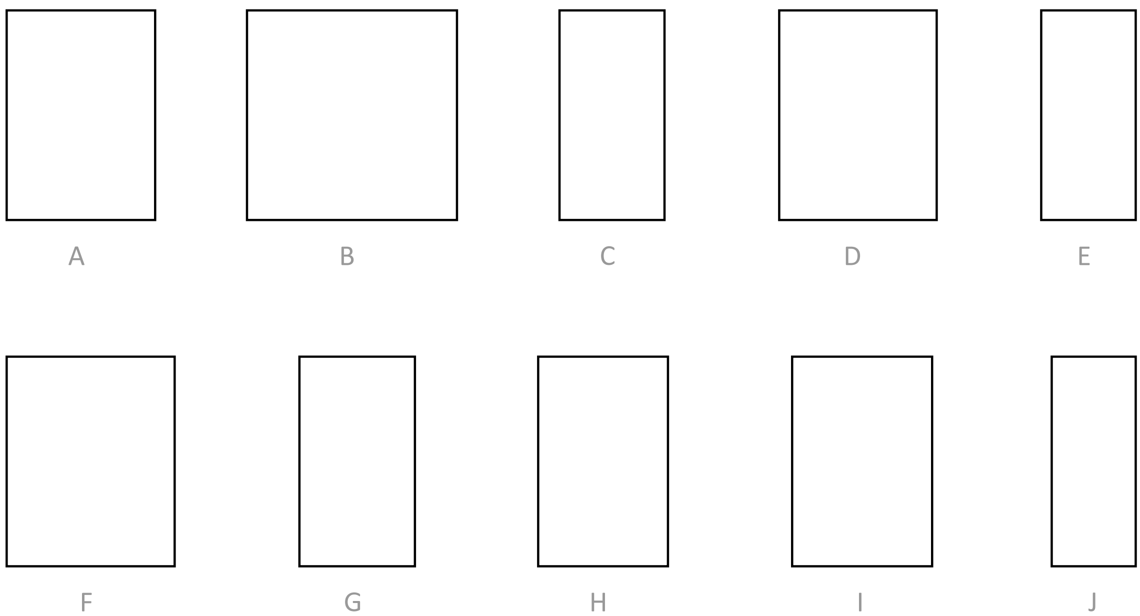
Øvelse A16

Søg på Internettet for information om Le Corbusier og hans Modulor Man. Hvor dukker Fibonacci-tallene og det gyldne snit op?

Øvelse A17

Den tyske æstetiker *Adolph Zeising* (1810-1876) udgav en række publikationer, hvori han påstod at meget i naturen, i velklingende musik og i de smukkeste arkitektoniske værker har proportioner efter det gyldne snit. En af grundlæggerne af den moderne psykologi, *Gustav Theodor Fechner* (1801-1887), gik i gang med at forsøge at verificere Zeisings påstande gennem spørgeundersøgelser, statistik og eksperimenter. Nogle gange faldt resultatet ud til fordel for teorien om, at det gyldne snit er det mest æstetiske. Andre gange var resultaterne tågede. Utallige forsøg har siden været udført, og der er ingen konklusion. Ofte bliver undersøgelserne kritiseret for ikke at ligestille alle udfald.

Nedenfor har denne e-bogs forfatter lavet sin egen lille test: Læseren opfordres til at vælge det rektangel, som forekommer at have de mest æstetiske proportioner. Om det så er det med det gyldne snits forhold kan ses på den allerbagerste side.



Tema B. Broer, kæder og kurvefit

At tilnærme en samling datapunkter med en matematisk defineret kurve kaldes at foretage et *kurvefit*, og det er en anvendelse af matematik, som man ofte støder på. Vi kender det fra *lineær regression*, hvor en række datapunkter i planen tilnærmes med en ret linje, som er grafen for en lineær funktion. I det tilfælde kalder vi også den lineære funktion for den *fittende funktion*. Andre eksempler på fit er *eksponentiel regression* og *potensregression*. Normalt skal man selv foretage et valg blandt de typer funktioner eller familie af funktioner, man ønsker at foretage et fit med i en konkret problemstilling. Én begrundelse for et givet valg kan være, at man teoretisk set forventer, at data følger en bestemt type funktioner. I andre tilfælde er man blot interesseret i at finde en tilstrækkelig pæn kurve, som tilnærmer datapunkterne pænt. Et eksempel på sidstnævnte er de såkaldte *splines*, hvor man anvender en kurve, som er stykvist. Vi skal ikke gå nærmere ind på sidstnævnte type, da det er en hel teori for sig. I stedet skal vi kigge på et par eksempler af førstnævnte type, hvor vi tilnærmer data med et andengradspolynomium.

Eksempel B1

Givet tre punkter i planen: $(-2;3,5), (1,2)$ og $(3,-4)$. Vi skal se, at der findes netop et andengradspolynomium, hvis graf går igennem disse tre datapunkter. Vi skal med andre ord bestemme koefficienterne *a*, *b* og *c*, så andengradspolynomiet $p(x) = a\cdot x^2 + b\cdot x + c$ opfylder $p(-2) = 3{,}5$, $p(1) = 2$ og $p(3) = -4$. Det giver tre ligninger med tre ubekendte, hvor de ubekendte er *a*, *b* og *c*:

$$\text{(B1)}\qquad \begin{cases} a\cdot(-2)^2 + b\cdot(-2) + c = 3{,}5 \\ a\cdot 1^2 + b\cdot 1 + c = 2 \\ a\cdot 3^2 + b\cdot 3 + c = -4 \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} 4a - 2b + c = 3{,}5 \\ a + b + c = 2 \\ 9a + 3b + c = -4 \end{cases}$$

En måde at løse de tre ligninger med tre ubekendte på er ved at isolere en af de ubekendte i den ene ligning og indsætte udtrykket i de to andre ligninger. Den anden ligning ser mest simpel ud, så vi vælger at isolere *c* i denne og indsætte udtrykket herfor i de to øvrige.

$$\text{(B2)}\qquad \begin{cases} 4a - 2b + (2-a-b) = 3{,}5 \\ c = 2-a-b \\ 9a + 3b + (2-a-b) = -4 \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} 3a - 3b = 1{,}5 \\ c = 2-a-b \\ 8a + 2b = -6 \end{cases}$$

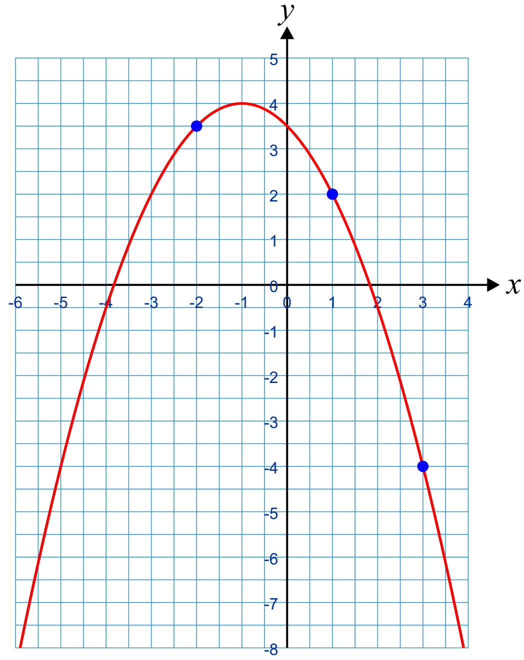
Vi fokuserer nu på første og tredje ligning. De udgør et ligningssystem bestående af to ligninger med to ubekendte. Vi isolerer *b* i den sidste og indsætter udtrykket for *b* i den anden ligning:

$$\text{(B3)}\qquad \begin{cases} 3a - 3\cdot(-3-4a) = 1{,}5 \\ b = -3-4a \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} 15a+9 = 1{,}5 \\ b = -3-4a \end{cases}$$

Den ubekendte *a* kan herefter bestemmes af den første ligning. Resultatet indsættes i den anden for at bestemme *b*.

(B4) $$\begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = -3-4\cdot(-0{,}5) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = -1 \end{cases}$$

Disse to værdier indsættes i udtrykket for c i (B2): $c = 2-a-b = 2-(-0{,}5)-(-1) = 3{,}5$. Vi har dermed bestemt det andengradspolynomium, hvis graf går igennem de tre datapunkter: $p(x) = -0{,}5x^2 - x + 3{,}5$. Tegner vi grafen for andengradspolynomiet, ser vi da også, at punkterne virkelig ligger på grafen. Der gælder generelt, at hvis man har givet tre punkter, som har forskellige x-værdier og som ikke ligger på linje, så findes der netop én parabel, som passerer igennem punkterne. Vi skal dog undlade at bevise denne påstand her.



□

Det er klart, at et CAS-værktøj lynhurtigt vil kunne udregne koefficienterne i eksempel B1. Typisk kan man definere andengradspolynomiet $p(x) = a\cdot x^2 + b\cdot x + c$ og derefter løse ligningssystemer bestående af de tre ligninger $p(-2) = 3{,}5$, $p(1) = 2$ og $p(3) = -4$ med hensyn til de ubekendte a, b og c. Hvordan det helt præcist gøres, afhænger af ens CAS-værktøj. Men hvad nu, hvis vi har fire datapunkter? Vi ser på det i et eksempel.

Eksempel B2

Lad os sige, at vi udover de tre punkter givet i eksempel B1 også har datapunktet $(-3,1)$. Det vil give anledning til en ekstra ligning, markeret med rødt nedenfor:

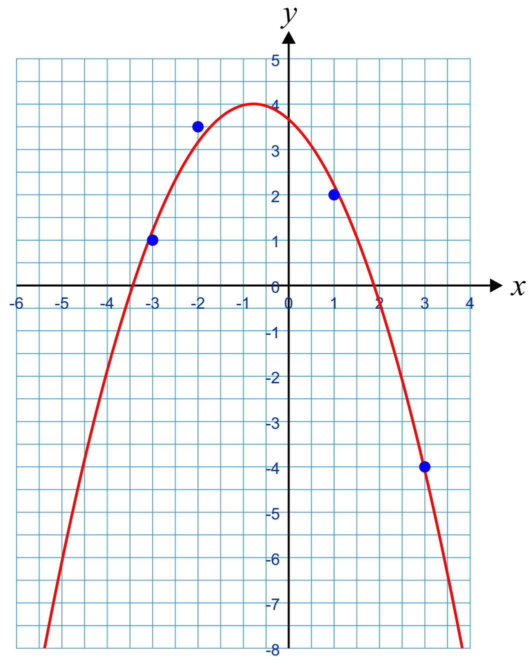
(B5) $$\begin{cases} 4a - 2b + c = 3{,}5 \\ a + b + c = 2 \\ 9a + 3b + c = -4 \\ 9a - 3b + c = 1 \end{cases}$$

Fra eksempel B1 ved vi, at de tre første ligninger har en entydig løsning. Den eneste mulighed for at hele ligningssystemet (B5) har en løsning er derfor, at løsningen til de første tre ligninger givet ved $a = -0{,}5$, $b = -1$ og $c = 3{,}5$ passer i den sidste ligning. Dette er ikke tilfældet. Hvis vi vil foretage et fit med et andengradspolynomium, må vi med andre ord stille os tilfreds med, at grafen ikke kan passere igennem alle fire datapunkter. Hvordan finder vi da den bedste løsning på problemet. Hvad der er "bedst" kan naturligvis diskuteres. Et meget anvendt valgt er at benytte *mindste kvadraters metode*.

Metoden består i at vælge *a*, *b* og *c*, så *kvadratsummen* af de lodrette afstande fra datapunkterne til parablen bliver mindst mulig. Princippet bag mindste kvadraters metode er illustreret i eksempel B3 nedenfor. Bruger man et CAS-værktøj til at lave et fit med et andengradspolynomium (søg eventuelt efter *polynomiel regression*) vil man få følgende andengradspolynomium som løsning:

$$p(x) = -0{,}56638\,x^2 - 0{,}88277\,x + 3{,}6610$$

Hvor godt polynomiet tilnærmer datapunkterne angives ved den såkaldte *forklaringsgrad* $R^2 = 0{,}99331$. Det er dog altid fornuftigt også at tage en visuel inspektion af grafen, før man fælder nogen dom.



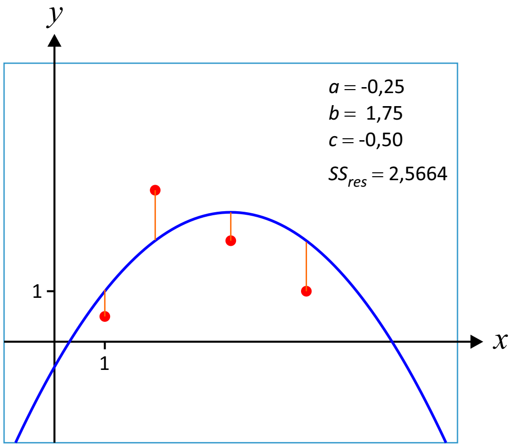
□

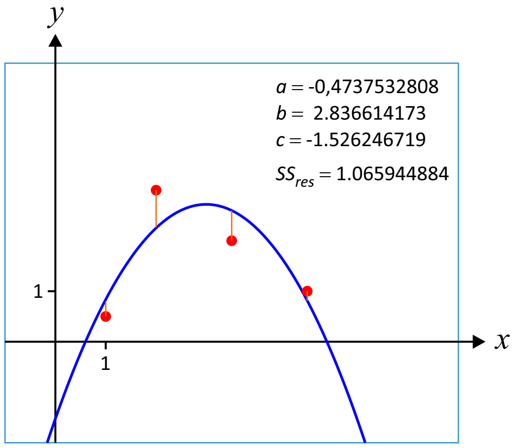
Eksempel B3 (Princippet bag mindste kvadraters metode)

Princippet bag *mindste kvadraters metode* kan nemmest forklares ved et eksempel. Vi tænker os givet de fire datapunkter $(1;\,0{,}5), (2{,}3), (3{,}5;\,2)$ og $(5{,}1)$. De fire punkter indtegnes i et koordinatsystem. Man kunne overveje at foretage et gæt på et andengradspolynomium, som er en rimelig god tilnærmelse til datapunkterne. Vi vælger andengradspolynomiet $p(x) = -0{,}25x^2 + 1{,}75x - 0{,}50$. Med *residualet* i $x = 1$ menes forskellen mellem dataværdien og funktionsværdien i $x = 1$: $0{,}5 - p(1) = 0{,}5 - 1 = -0{,}5$. Det betyder, at den lodrette afstand fra datapunktet til grafen er 0,5, og det negative fortegn fortæller, at datapunktet ligger *under* grafen (se grafen på næste side). På tilsvarende vis kan residualerne i de øvrige tre *x*-værdier bestemmes. Kvadreres de og lægger man sammen, fås:

$$\begin{aligned} SS_{res} &= \left(0{,}5 - p(1)\right)^2 + \left(3 - p(2)\right)^2 + \left(2 - p(3{,}5)\right)^2 + \left(1 - p(5)\right)^2 \\ &= \left(0{,}5 - 1\right)^2 + \left(3 - 2\right)^2 + \left(2 - 2{,}5625\right)^2 + \left(1 - 2\right)^2 \qquad \text{(B6)} \\ &= 2{,}5664 \end{aligned}$$

Her er *SS* en forkortelse af det engelske "Sum of Squares" og indekset *res* er en forkortelse for det engelske "residual". Det er nærliggende at forsøge at vælge koefficienterne *a*, *b* og *c* i andengradspolynomiet på en måde, så den ikke-negative størrelse SS_{res} bliver så lille som muligt. Kan man vælge *a*, *b* og *c*, så den bliver eksakt 0, betyder det for eksempel, at grafen for andengradspolynomiet går eksakt igennem datapunkterne. Dette er normalt ikke muligt, så det gælder om at finde koefficienter, så SS_{res} bliver så lille som overhovedet muligt. Heldigvis findes der en metode til at finde minimum for SS_{res}, men da den involverer funktioner af flere variable, afstår vi fra at forklare mere om det her. Heldigvis har de fleste CAS-værktøj et værktøj til at bestemme det andengradspolynomium, som giver den mindste værdi for SS_{res}. I dette tilfælde er den mindste værdi 1,0659 og den opnås for polynomiet $p(x) = -0{,}4738x^2 + 2{,}8366x - 1{,}5262$. Figuren på næste side viser grafen for gættet samt den optimale løsning.





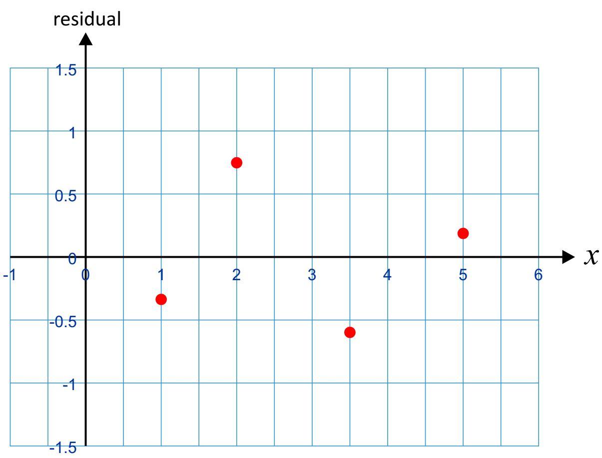
For at kunne udregne den såkaldte forklaringsgrad, skal vi have fat i endnu en størrelse, nemlig *den totale kvadratsum* SS_{tot} . Her får vi først brug for gennemsnittet af y-værdierne for datapunkterne: $\overline{y} = (0{,}5+3+2+1)/4 = 1{,}625$. Den totale kvadratsum fås ved at udregne forskellen mellem de enkelte datapunkters y-værdier og gennemsnittet $\overline{y}$, kvadrere og lægge sammen:

(B7) $$SS_{tot} \;=\; (0{,}5-1{,}625)^2+(3-1{,}625)^2+(2-1{,}625)^2+(1-1{,}625)^2 \;=\; 3{,}6875$$

Forklaringsgraden (Eng: *Coefficient of Determination*) betegnet R^2 defineres ved:

(B8) $$R^2 \;=\; 1 \;-\; \frac{SS_{res}}{SS_{tot}} \;=\; 1 \;-\; \frac{1{,}0659}{3{,}6875} \;=\; 0{,}7109$$

Hvis forklaringsgraden er tæt på 1 er det normalt et udtryk for et godt fit. I eksempel B2 så vi en forklaringsgrad på 0,99331. Andengradspolynomiet i dette eksempel ses da også tydeligt at tilnærme data bedre end tilfældet er i dette eksempel. En anden visuel måde at afgøre om data følger en bestemt type funktion, såsom et andengradspolynomium her, er at lave et *residualplot*. Her afbildes datapunkternes x-værdier henad 1. aksen og det tilhørende residual opad 2. aksen.



Residualplottet er ikke særlig interessant her, hvor der kun er fire datapunkter. Ofte har man rigtig mange datapunkter, og hvis punkterne i residualplottet så for eksempel ligger konsekvent under grafen i den ene ende og over grafen i den anden, kan det give anledning til at forkaste hypotesen om, at data følger den pågældende graf. Derimod vil det styrke hypotesen, hvis punkterne i residualplottet ser ud til at være spredt tilfældigt.

□

Bemærkning B4

Lad os opsummere til en mere generel situation end det i eksempel B3: Lad der være givet *n* datapunkter $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$. Man ønsker at foretage et fit med en funktion *f*, som indeholder én eller flere frie *parametre*. Spørgsmålet er, hvilke værdier af parametrene, der giver det "bedste" fit. Lad $\overline{y} = (y_1 + y_2 + \ldots + y_n)/n$ være gennemsnittet af datapunkternes *y*-koordinater. Da er *kvadratsummen af residualer* givet ved:

(B9) $$SS_{res} = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - p(x_i) \right)^2$$

Det er denne kvadratsum, som man ønsker at minimere med hensyn til de parametre, som indgår i funktionen *f*. *Den totale kvadratsum* er tilsvarende givet ved:

(B10) $$SS_{tot} = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \overline{y} \right)^2$$

Endelig er *forklaringsgraden* R^2 givet ved:

(B11) $$R^2 = 1 - \frac{SS_{res}}{SS_{tot}}$$

Hvis forklaringsgraden er eksakt 1, betyder det, at vi har at gøre med et perfekt fit: Alle datapunkter ligger på grafen for *f*. Jo mindre SS_{res} er i forhold til SS_{tot} jo nærmere vil forklaringsgraden være på 1. Det sker typisk, når funktionen er et godt fit til data.

□

Øvelse B5

Benyt metoden fra eksempel B1 til at bestemme forskriften for det andengradspolynomium, hvis graf går igennem punkterne $(-2,9)$, $(1;\,1{,}5)$ og $(4,3)$. Udfør først beregningerne manuelt og benyt derefter dit CAS-værktøj til at løse opgaven automatisk. Får du samme resultat?

Øvelse B6

Givet datapunkterne $(-5,8), (-2,-1), (2,1), (3,4)$ og $(4,7)$.

a) Benyt dit CAS-værktøj til at bestemme det bedste fit af formen $p(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ til de fem datapunkter. Angiv *a*, *b* og *c*.

b) Bestem residualerne og lav et residualplot.

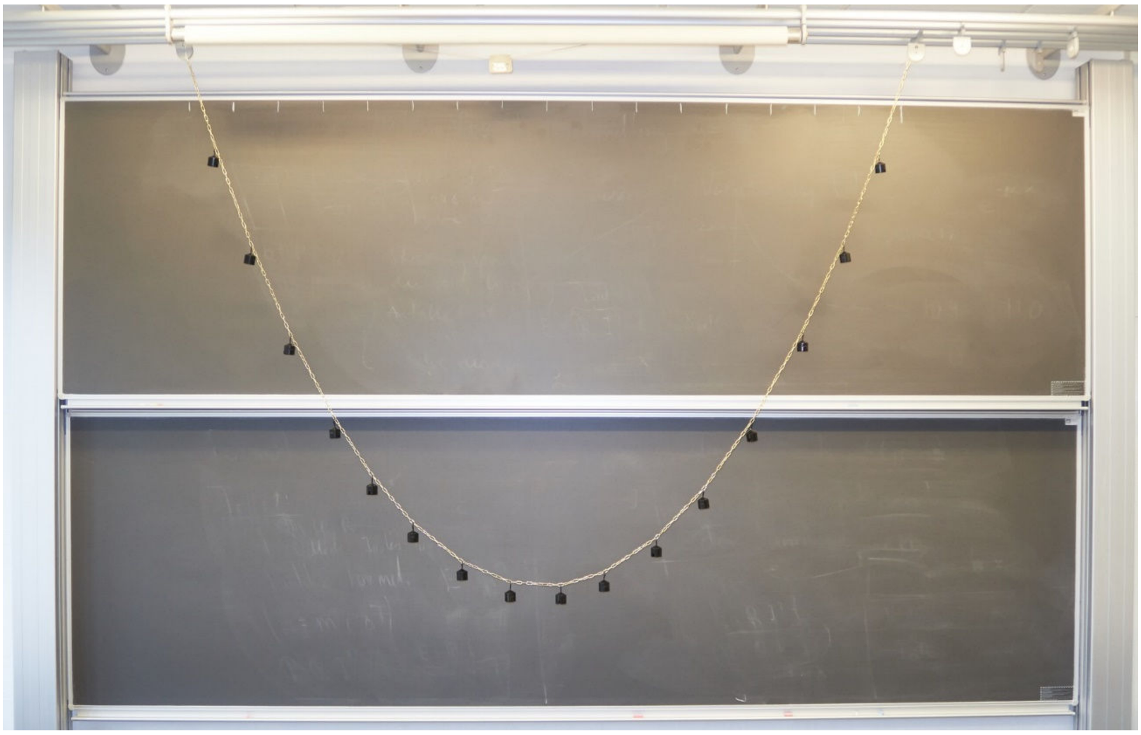
c) Hvilken forklaringsgrad giver CAS-værktøjet?

d) Bestem forklaringsgraden manuelt ved hjælp af formlen i (B11). Stemmer den overens med værdien fra c)?

I de følgende to øvelser skal vi udelukkende bruge et færdigt softwareprogram til at bestemme et kurvefit, uden at dykke ned i, hvordan dette kurvefit bliver beregnet. Et oplagt softwareprogram hertil er *Logger Pro*, da man kan "prikke en kurve ud på et foto".

Øvelse B7 (Hængebro-model)

Teorien forudsiger, at de kabler, som bærer vejbanen på en hængebro, former en parabel. Vi skal undersøge, om det er rigtigt ved at bruge programmet *Logger Pro*. Anskaf for det første en metalkæde fra et byggemarked. Kæden hænges op i to kroge. Som bekendt er vejbanen båret oppe af lodrethængende kabler, som er forbundet til det bærende kabel. Vi vil simulere denne belastning ved at hænge en række lodder op i forskellige kædeled. Lodderne skal alle have samme vægt, og de skal hænge nogenlunde med *samme vandrette afstand*, som antydet på figuren herunder. Tag et foto af situationen. Vær omhyggelig med at fotografere vandret samt vinkelret ind på det plan, som kæden hænger i.



a) Indsæt fotoet i Logger Pro via menuen *Indsæt > Billede > Billede med fotoanalyse…*. Ved at vælge med fotoanalyse, får man rådighed over en række værktøjer i højre side af billedet. Dem skal vi bruge i det følgende.

b) Indsæt begyndelsespunktet for koordinatsystemet (Origo) ved at prikke det ud på fotoet med det rette værktøj. Hvor man gør det i billedet er lidt ligegyldigt her.

c) Man skal sætte *skalaen*, dvs. fortælle programmet, hvor meget en bestemt afstand i billedet svarer til i virkelig afstand. Man vælger skala-værktøjet og trækker fx en lodret eller vandret linje ud, hvorefter man i en boks skriver, hvor langt det angivne stykke i virkeligheden er - i samme plan som kæden! Har du ikke umiddelbart mulighed for at vurdere dette, sæt da bare stykket til et eller andet. Det betyder ikke så meget her, eftersom en skaleret parabel stadig er en parabel.

d) Du er nu klar til at afsætte punkter langs kæden ved hjælp af punkt-værktøjet. Afsæt mange punkter langs kæden og gør det så præcist, som du kan. Kommer du til at afsæt et punkt lidt skævt, kan du bruge **Ctrl+Z** for at fortryde det sidst afsatte punkt.

e) Klik på kurvetilpasningsværktøjet. Vælg i det fremkomne vindue AX^2+BX+C og klik derefter på *Prøv tilpasning*. Programmet vil da forsøge at bestemme parametrene A, B og C i andengradspolynomiet, således at man opnår det bedste fit. Resultatet kan findes på en graf bag billedet. Du kan vælge, om billedet eller grafen skal ligge bagerst eller forrest ved at højreklikke på det forreste element og evt. vælge *Flyt bagest*.

f) Punktet *Korrelation* i den lille boks, der indeholder oplysninger om fittet, er kvadratroden af forklaringsgraden. Som bekendt er en forklaringsgrad tæt på 1 – og dermed også en Korrelation tæt på 1 – som oftest et udtryk for, at der er tale om et godt fit. Husk dog, at det især er en visuel inspektion, som bør afgøre, hvor godt andengradspolynomiet tilnærmer datapunkterne. Kan du godtage at de bærende kabler på en hængebro former en parabel?

Øvelse B8 (Kædelinje)

En *kædelinje* (Eng: *Catenary*) er den kurve, som en kæde danner, når den hænger frit ned fra to kroge. Teorien siger, at kurven er graf for følgende funktion:

(B12) $$f(x) = a \cdot \cosh\left(\frac{x}{a}\right)$$

hvor $\cosh(x)$ er den funktion, der betegnes "cosinus hyperbolsk". Du skal nu udføre et forsøg ligesom det med hængebroen med henblik på at afgøre, om kæden virkelig hænger i den kurve, teorien forudsiger. Bemærk, at hvis du forsøger at foretage et fit med funktionen i (B12), hvor der kun er parameteren a, så skal du være meget omhyggelig med at udvælge origo. Dette er ikke ønskeligt og vil give væsentlig usikkerhed i forsøget. Bedre er det at definere en ny funktion, som har en graf, som er en parallelforskydning af grafen for f. Dermed behøver man ikke være præcis med at sætte origo nøjagtigt, men kan sætte det et vilkårligt sted på fotoet.

a) Benyt sætning 2.3 til at vise, at hvis man parallelforskyder grafen for f med vektoren (b,c), så får man grafen for følgende funktion:

(B13) $$g(x) = a \cdot \cosh\left(\frac{x-b}{a}\right) + c$$

Denne funktion har nu de tre parametre a, b og c.

b) Gennemfør forsøget ligesom i øvelse B7, blot med den forskel, at der ikke skal hænges lodder på kæden. Foretag et fit med funktionen g. Kan dit forsøg og analyse bekræfte, at en frithængende kæde følger en kædelinje?

Tema C. Bevægelse på cykel og numerisk differentiation

En af de mest oplagte anvendelser af differentialregning er i fysik til illustration af begreber som *sted*, *hastighed* og *acceleration*. En mulighed er at filme et par elever, som hver for sig cykler langs en vandret lineær bane. Det kan sættes op som en konkurrence, hvor det gælder om at komme hurtigst muligt frem. Hvad har elevens hastighed været i starten af bevægelsen eller på et senere tidspunkt? Vælger man at gå skridtet videre, kan man endda analysere accelerationen i bevægelsen.

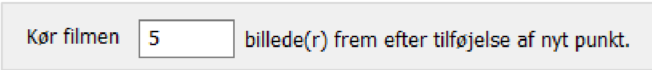
Forsøget kræver, at man kan optage bevægelsen på video, og at man har software til rådighed til at analysere filmen. Et godt program hertil er *Logger Pro*. I det følgende antages det at læseren har dette program til rådighed, foruden regnearket Microsoft *Excel*. Er det ikke tilfældet har læseren måske adgang til lignende programmer?

Forberedelse og udførelse af forsøg:

1. Apparatur: Anskaf et videokamera, et stativ, en meterstok og en cykel.
2. Sørg for at personen cykler fra venstre mod højre, set fra videokameraets synspunkt.
3. Kameraet rettes *vinkelret* på banen samt indstilles *vandret*, så filmens billedplan er parallel med det lodrette plan, hvori den virkelige bevægelse med cyklen foregår! En almindelig framerate på 24 f/s eller 30 f/s er passende.
4. Anbring en meterstok i det lodrette plan, som bevægelsen foregår i, gerne tæt ved hvor cyklisten starter bevægelsen. Det skal bruges til at fastsætte *skaleringsfaktoren*, så man ved, hvor meget 1 meter i virkeligheden svarer til i billedet!

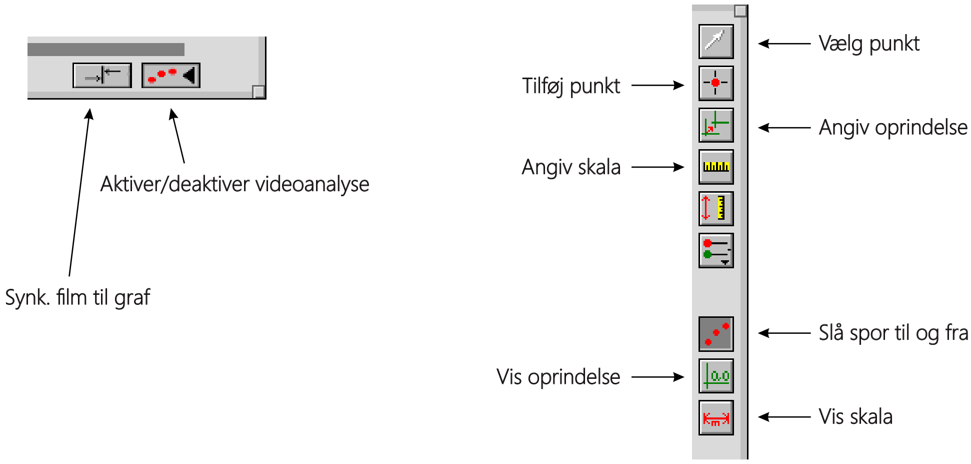
Bearbejdning i Logger Pro efter filmen er optaget:

5. Opret en ny mappe, hvori video-filen anbringes.
6. Åbn Logger Pro og gem straks filen i samme mappe som video-filen.
7. Indsæt videoen i Logger Pro via menuen *Indsæt* > *Film…*
8. Marker video-vinduet i Logger Pro og vælg menuen *Indstillinger* > *Filmindstillinger*. Sørg for at anbringe et 5-tal i følgende felt:

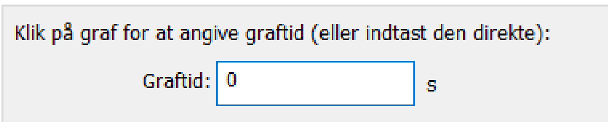


Meningen er, at vi kun vil benytte hver femte frame i filmen.

9. Klik på *Aktiver/deaktiver videoanalyse* nede i højre hjørne af video-vinduet. Derved fremkommer nye videoværktøjer i højre side af video-vinduet, som vist på figuren.



10. Kig filmen igennem via Play-knappen. Læg mærke til der, hvor cyklen sætter i gang. Spol tilbage og find lige præcis den frame, hvor cyklen sætter i gang. Klik herefter på knappen *Synk. film til graf* (se figur). I den fremkomne boks sættes graftiden til 0:



Det har som konsekvens, at tiden internt i Logger Pro vil blive sat til 0 i det øjeblik, hvor cyklen sætter i gang.

11. Vælg værktøjet *Angiv oprindelse* og venstreklik i centrum af det forreste hjul. Derved vil centrum af hjulet koordinatsystemets begyndelsespunkt (origo).
12. Vælg værktøjet *Angiv skala* og træk en lille grøn linje ud langs med meterstokken i videoen, så Logger pro ved, hvor meget 1 meter i virkeligheden svarer til i videoen.
13. Du skal nu til at afsætte punkter: Vælg værktøjet *Tilføj punkt* og klik i det forreste hjuls centrum. Derved er der blevet afsat et punkt og filmen er spolet 5 frames frem (se punkt 8). Afsæt et nyt punkt, der hvor forhjulets centrum nu er og så fremdeles. Bemærk, at visningen af både punkter og koordinatsystem kan slås til/fra (se figur). Skulle du komme til at afsætte et punkt forkert, kan du bruge **Ctrl+Z** til at fortryde handlingen. Når du er færdig kan du klikke på pileværktøjet *Vælg punkt*, så du ikke kommer til at blive ved med at afsætte punkter.

Analyse af data og grafer:

14. Efter punkterne er afsat, vil der automatisk være genereret fem kolonner med data i Logger Pro: Tid, X, Y, Vx, Vy med enhederne henholdsvis s, m, m, m/s og m/s. Da der er tale om en vandret og dermed 1-dimensional bevægelse kan man se bort fra kolonnerne Y og Vy. Man kan dog lige kontrollere, om værdierne i kolonnen Y er konstante og omtrent 0 i Vy, op til usikkerheder. Vi skal altså kun benytte de tre kolonner Tid (s), X (m) og Vx (m/s).
15. Der er også automatisk blevet fremstillet en graf af både X og Y som funktion af tiden. Venstreklik på aksebetegnelsen på 2. aksen og vælg *Mere...*. Fjern fluebenet ud for Y(m), så kun x-koordinaterne afbildes som funktion af tiden.
16. Lav en ny graf via menuen *Indsæt* > *Graf*. Sørg for hastigheden Vx bliver afbildet som funktion af tiden. Hvis man vil have ændret symbolernes farve og udseende, kan man gøre det i en boks, der fremkommer, når man venstreklikker på et af punkterne.

Øvelse C1

Beskriv sted-grafen og hastigheds-grafen for hver af eleverne med ord:

a) Hvornår i bevægelsen var hastigheden størst og mindst? Beskriv bevægelsen.
b) Benyt hastigheds-grafen til at vurdere hvornår i bevægelsen accelerationen er lav og høj. Er der passager i bevægelsen, hvor accelerationen er omtrent konstant? *Hjælp*: Husk at øjebliksaccelerationen er øjeblikshastigheden differentieret, så man skal have fat i tangenthældningerne til hastighedsgrafen ...

NB! Bemærk at Logger Pro har et tangentværktøj, som kan bruges både for sted-grafen og for hastighedsgrafen: Marker grafen og benyt menuen *Analyser* > *Tangent*.

□

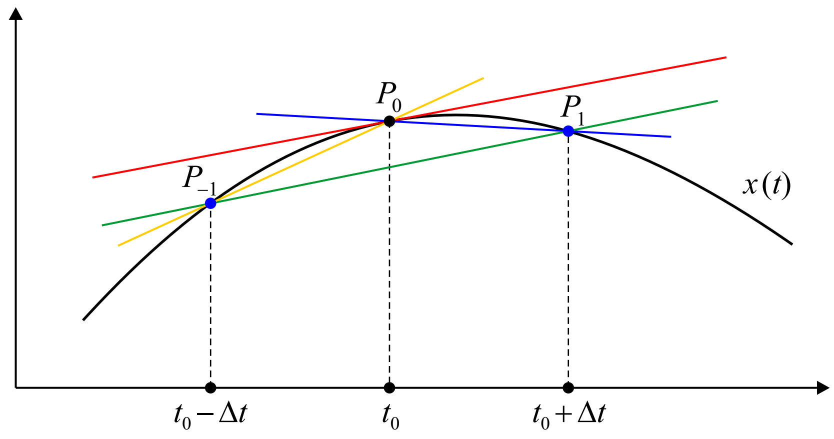
Man kan godt få Logger Pro til at udregne en kolonne med accelerationerne, men værdierne viser sig ikke at være særligt pålidelige, medmindre Δt er meget lille *og* usikkerhederne på målingerne er små. Dette er ikke så tit opfyldt. Afsnittet med numerisk differentiation nedenfor kan være med til at kaste lys over denne problematik. Vi vil se på, hvordan Logger Pro overhovedet er i stand til at beregne en kolonne med hastigheder.

Numerisk differentiation

Hvis stedfunktionen $x(t)$ er differentiabel i punktet t_0, så fås *hastigheden* til tidspunktet t_0 som bekendt som differentialkvotienten af stedfunktionen i t_0. Differentialkvotienten er grænseværdien af differenskvotienterne:

$$\text{(C1)} \qquad \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t_0+\Delta t)-x(t_0)}{\Delta t} \to x'(t_0) \quad \text{for} \quad \Delta t \to 0$$

Geometrisk betragtet er hastigheden i t_0 lig med hældningen af *tangenten* til grafen i punktet $P_0(t_0, x(t_0))$, mens differenskvotienten er hældningen af *sekanten* gennem punkterne P_0 og P_1 vist på figuren på næste side.



På figuren er også indtegnet punktet P_{-1}, som har 1. koordinat $t_0 - \Delta t$. I sætningen nedenfor skal vi se, at hældningen af sekanten gennem P_{-1} og P_1 også nærmer sig til differentialkvotienten i t_0, når $\Delta t \to 0$.

Sætning C1

Hvis $x(t)$ er en funktion, som er differentiabel i t_0, så gælder følgende:

(C2) $$\frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0 - \Delta t)}{2 \cdot \Delta t} \to x'(t_0) \quad \text{for} \quad \Delta t \to 0$$

Bevis: Fra definitionen af differentiabilitet ved vi, at grænseværdien af differenskvotienten skal være den samme, uanset om Δt nærmer sig til 0 fra højre eller fra venstre. I stedet for at sige at Δt går mod 0 fra venstre, kan vi udskifte Δt med $-\Delta t$ i (C1), uden at det ændrer på grænseværdien. Vi har altså:

(C3) $$\frac{x(t_0 - \Delta t) - x(t_0)}{-\Delta t} \to x'(t_0) \quad \text{for} \quad \Delta t \to 0$$

Hvis vi ganger (C1) med $\frac{1}{2}$, ganger (C3) med $\frac{1}{2}$ og lægger sammen, får vi umiddelbart (C2). Detaljerne overlades til læseren.

□

Det overlades til læseren at indse, at brøken i (C2) netop er hældningen af sekanten gennem punkterne P_{-1} og P_1. Det interessante er imidlertid, at sekanthældningerne i (C2) normalt konvergerer meget hurtigere mod differentialkvotienten og dermed tangenthældningen i t_0 end sekanthældningerne i (C1) gør for $\Delta t \to 0$. For en given lille værdi af Δt vil sekanthældningen fra (C2) med andre ord normalt være en bedre tilnærmelse til tangenthældningen, end sekanthældningen i (C1) er. På figuren ses det også tydeligt, at hældningen af den grønne sekant er meget tættere på hældningen af den røde tangent end hældningen af den blå sekant er. Alt dette får betydning, når vi i et fysikforsøg *ikke* kender stedfunktionen i et helt interval af tidspunkter, men kun har kendskab til stedfunktionen i en række målte tidspunkter i skridt på Δt. Da er det nemlig oplagt at anvende en sekanthældning som en tilnærmelse til tangenthældningen, som i sig selv er uopnåelig på grund af manglende information. Her vil sekanthældningen fra (C2) normalt være det klart bedste valg. Hvor god en tilnærmelse sekanthældningen er, afhænger desuden ret kraftigt af, hvor tæt datapunkterne ligger, dvs. hvor lille Δt er. Noget andet er, at der også sniger sig måleusikkerhed ind: Data er jo tilvejebragt ved et fysisk forsøg! Er usikkerheden eller støjen her stor, bliver tilnærmelserne dårlige.

$$
\begin{aligned}
x'(t_0) &= \text{hældningen af den røde tangent i } P_0 \\
\frac{x(t_0+\Delta t)-x(t_0)}{\Delta t} &= \text{hældningen af den blå sekant gennem } P_0 \text{ og } P_1 \\
\frac{x(t_0+\Delta t)-x(t_0-\Delta t)}{2\cdot\Delta t} &= \text{hældningen af den grønne sekant gennem } P_{-1} \text{ og } P_1
\end{aligned}
$$

Den numeriske metode, hvor man anvender sekanthældningen fra (C1) kaldes med et fint udtryk for *forward difference*-metoden, mens den numeriske metode, som bruger sekanthældningen fra (C2) betegnes *central difference*-metoden.

Øvelse C2

I det følgende skal vi bruge regnearket *Excel* til at bestemme tilnærmede værdier for hastighederne i den bevægelse på cyklen, som vi fik bearbejdet i Logger Pro tidligere.

a) Åben et regneark og lav overskrifter til tre kolonner, som vist på figuren nedenfor: Tiden t i sek., stedet x i m og hastigheden v_x i m/s.

b) Kopier de to kolonner med tid og stedet x fra Logger Pro filen med cykeldata. Det er passende at vise data med 5 decimaler.

c) Sæt cursoren i cellen C4 og skriv formlen =(B5-B3)/(A5-A3). Tryk derefter på tasten **Enter**. Feltet vil nu indeholde en tilnærmet værdi for hastigheden til tidspunktet i cellen A4, beregnet ved hjælp af central-difference-metoden.

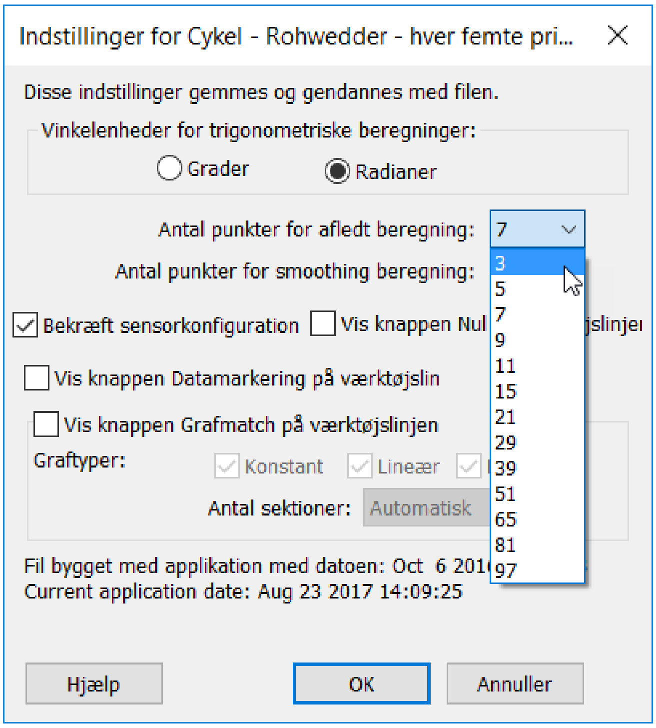
	A	B	C	D
1	*t*	*x*	v_x	
2	(sek)	(m)	(m/s)	
3	0,00000	0,00000		
4	0,16700	0,11361	=(B5-B3)/(A5-A3)	
5	0,33400	0,29539		
6	0,50000	0,54534		
7	0,66700	0,84074		
8	0,83400	1,15886		
9	1,00100	1,43153		

d) Nedkopier nu indholdet af cellen C4 på følgende måde: Marker cellen og lad cursoren bevæge sig hen over det lille mærke i cellens nederste højre hjørne, indtil cursoren omdannes til et plustegn. Træk derefter ned af til næstnederste række.

e) I kolonnen C er nu de tilnærmede værdier for hastighederne bestemt med central-difference-metoden.

	A	B	C	D
1	*t*	*x*	v_x	
2	(sek)	(m)	(m/s)	
3	0,00000	0,00000		
4	0,16700	0,11361	0,88441	
5	0,33400	0,29539	1,29649	
6	0,50000	0,54534	1,63767	
7	0,66700	0,84074	1,83686	
8	0,83400	1,15886	1,76883	
9	1,00100	1,43153	1,76883	

f) Sammenlign værdierne for hastighederne i kolonne C med de værdier for hastighederne, som Logger Pro har beregnet. Du vil sandsynligvis opdage, at de ikke er helt ens. Logger Pro bruger nemlig som default en numerisk metode, som er endnu mere nøjagtig. Man kan dog vælge en anden metode via menuen *Filer* > *Indstillinger for Cykeltur* (det sidste ord refererer til navnet på filen). Som udgangspunkt er *Antal punkter for afledt beregning* sat til 7. Prøv at sætte den til 3 i stedet for 7. Så vil du se, at alle hastighedsværdierne i Logger Pro bliver identiske med dem i dit Excel regneark! Det er fordi Logger Pro også kan anvende central-difference-metoden til hastighedsberegning.



g) Som afslutning på denne øvelse i Excel, kan du vælge at lave en graf af hastigheden som funktion af tiden: Marker kolonnen A med tidsværdierne. Hold **Ctrl**-tasten nede, mens du markerer kolonne C med hastighederne (fra række 4 til næstsidste række). Anvend derefter menuen *Indsæt* > *Punktdiagram*. Detaljer overlades til læseren.

Øvelse C3

Denne øvelse er rent matematisk, idet vi ønsker at sammenligne nøjagtighederne af de to numeriske metoder *forward difference*-metoden og *central difference*-metoden i et konkret eksempel. Vi betragter funktionen $f(x)=\sqrt{x}-\sin(x)+0{,}1\cdot x$. Den differentierede funktion er her $f'(x)=1/(2\cdot\sqrt{x})-\cos(x)+0{,}1$.

a) Åbn en nyt regneark. Gem det med navnet "To metoder til numerisk differentiation".
b) Lav de overskrifter til de syv første kolonner, som fremgår af figuren her:

	A	B	C	D	E	F	G
1	**x**	**y**	**Rigtig diff**	**Forward**	**Fejl**	**Central**	**Fejl**

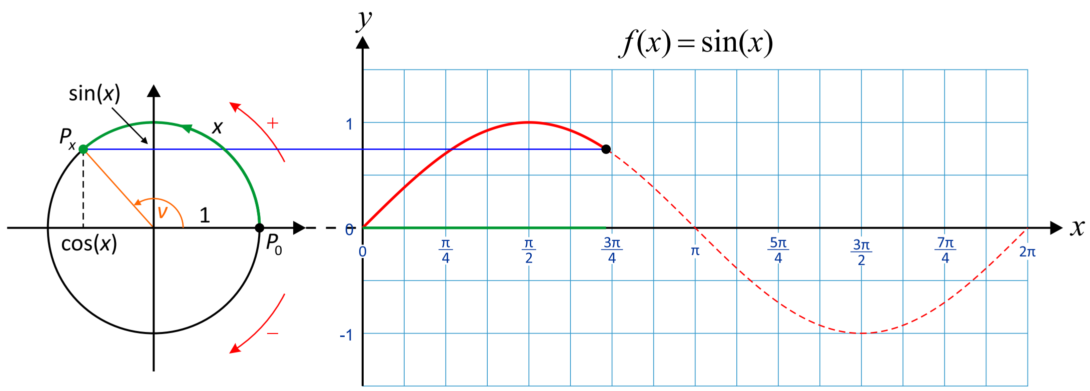
c) I kolonne A anbringes tallene fra 1,0 til 7,0 i skridt på 0,1.
d) I kolonne B skal de korrekte funktionsværdier anbringes. Skriv i cellen B2 følgende formel: =KVROD(A2)-SIN(A2)+0,1*A2 og kopier formlen ned i hele kolonnen.
e) I kolonne C anbringes de rigtige værdier for differentialkvotienterne. Skriv i cellen C2 følgende formel: =1/(2*KVROD(A2))-COS(A2)+0,1 og kopier ned.
f) I kolonne D anbringes de tilnærmede værdier for differentialkvotienten beregnet ved *forward difference* metoden. I cellen D2 skrives formlen: =(B3-B2)/(A3-A2), hvorefter der nedkopieres til næstsidste række.
g) I kolonne E udregnes forskellene mellem værdierne for differentialkvotienterne udregnet med *forward difference* metoden og de rigtige værdier for differentialkvotienterne. I cellen E2 skrives formlen: =D2-C2, og der nedkopieres til næstsidste række.
h) I kolonne F anbringes de tilnærmede værdier for differentialkvotienten beregnet ved *central difference* metoden. I cellen F3 skrives formlen: =(B4-B2)/(A4-A2), hvorefter der nedkopieres til næstsidste række.
i) I kolonne G udregnes forskellene mellem værdierne for differentialkvotienterne udregnet med *central difference* metoden og de rigtige værdier for differentialkvotienterne. I cellen G3 skrives formlen: =F3-C3, og der nedkopieres til næstsidste række.
j) Sammenlign fejlene ved de to metoder. For at få en mere visuel fornemmelse for fejlene ved de to metoder, kan du afbilde de to kolonner med fejl som funktion af x-værdierne i kolonne A. Det kan gøres på følgende måde: Marker først cellerne i kolonne A fra celle A3 til og med celle A61. Hold nu **Ctrl**-tasten nede, mens du markerer kolonne E fra celle E3 til og med celle E61 og kolonne G fra celle G3 til og med celle G61. Vælg derefter menuen *Indsæt* > *Punktdiagram*. Detaljerne overlades til læseren. Hvilken af de to metoder er mest nøjagtig i dette eksempel?
k) Hvis du har lyst på mere, kan det eventuelt undersøges, hvor meget fejlene reduceres, hvis man halverer skridtlængden fra 0,1 til 0.05.

Mere om emnet *numerisk differentiation* kan findes i følgende note på Internettet:
http://www.matematikfysik.dk/mat/noter_tillaeg/numerisk%20differentiation.pdf

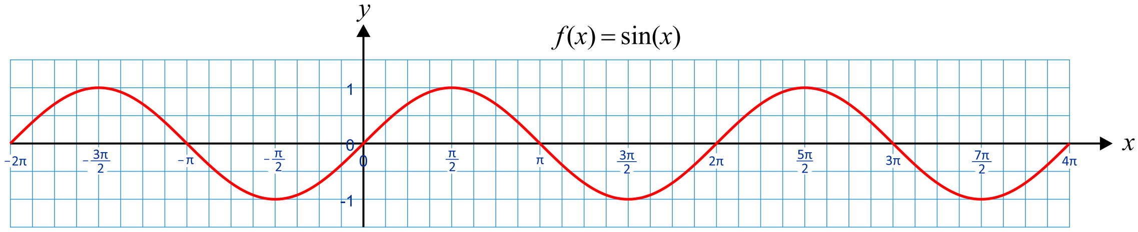
Tema D. Harmoniske svingninger

Trigonometri har vi tidligere set anvendt til beregning af vinkler i trekanter og andre geometriske figurer. Man kan imidlertid også betragte $\sin(x)$, $\cos(x)$ og $\tan(x)$ som funktioner i den variable x. Vi vil normalt altid underforstå, at argumentet x er angivet i *radianer*. Det vil være passende lige at repetere dette begreb. På figuren lidt nedenfor til venstre er tegnet en *enhedscirkel*, dvs. en cirkel med radius 1, og den er anbragt med centrum i (0,0). I det følgende kigges kun på vinkler, hvor det ene ben er underforstået at gå fra (0,0) til $P_0(1,0)$ på den positive del af x-aksen. Vinkler regnes positive, hvis man drejer *mod* uret, mens vinkler regnes negative, hvis man drejer *med* uret. Man kan repræsentere den vinkel, som er vist med en orange bue på figuren på to forskellige måder: Enten ved et gradtal eller ved længden af den del af cirkelbuen, som den pågældende vinkel udspænder. Denne cirkelbue er tegnet med grøn farve. Radiantallet er defineret som længden af denne bue. Hvis man drejer med uret, altså i negativ omløbsretning, skal radiantallet regnes negativt. En hel runde i positiv omløbsretning er 360° eller i radiantal 2π. Det sidste fordi omkredsen af en cirkel med radius 1 er $2\pi \cdot r = 2\pi \cdot 1 = 2\pi$. En hel runde i negativ omløbsretning er tilsvarende –360° eller –2π i radiantal. Man kan sagtens have vinkler, som har et radiantal, der er større end 2π. Det svarer bare til, at der drejes mere end 1 runde i positiv omløbsregning. Tilsvarende med vinkler mindre end –2π. Omsætningen mellem gradtal og radiantal er vist på den lille figur ovenfor.

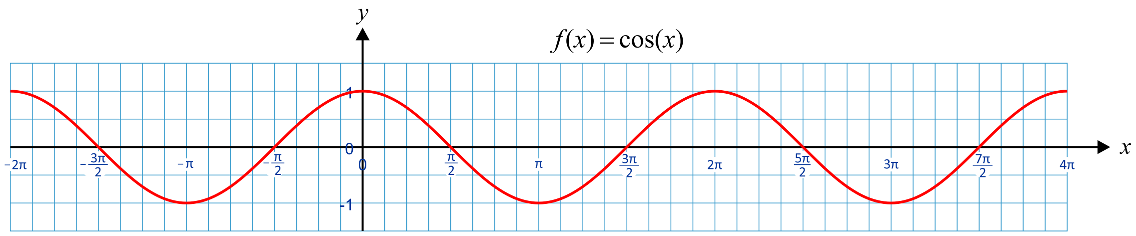
Gradtal (°)		Radiantal
360	$\longleftrightarrow$	2π
1	$\longleftrightarrow$	$\frac{\pi}{180}$
v	$\longleftrightarrow$	$\frac{\pi}{180} \cdot v$
$\frac{180}{\pi} \cdot x$	$\longleftrightarrow$	x



"Slutpunktet" på cirkelbuen hørende til vinklen med radiantal x betegnes P_x og kaldes for *retningspunktet for vinklen x*. Cosinus og sinus til x defineres nu som henholdsvis x-koordinaten og y-koordinaten til retningspunktet. Retningspunktet har med andre ord koordinaterne $(\cos(x), \sin(x))$. Det fører os direkte videre til funktionen $f(x) = \sin(x)$. For hver værdi af x fås dens funktionsværdi $\sin(x)$ som y-koordinaten til retningspunktet. Når man gennemfører en runde på enhedscirklen, svarende til at x varierer mellem 0 og 2π, giver det anledning til grafen vist til højre på figuren. I intervallet $[0, 2\pi]$ foretager sinus altså én svingning. Havde vi fortsat rundt, ville vi blot have fået gentaget kurven. Det samme ville ske, hvis vi have bevæget os i negativ omløbsretning. Vi siger, at funktionen er *periodisk* med *perioden* $T = 2\pi$. På figuren nedenfor er grafen for $\sin(x)$ afbildet i intervallet $[-2\pi, 4\pi]$, dvs. tre perioder er vist.



Funktionen $f(x) = \cos(x)$ har også klart en periode på 2π, og dens graf ser således ud i intervallet $[-2\pi, 4\pi]$:

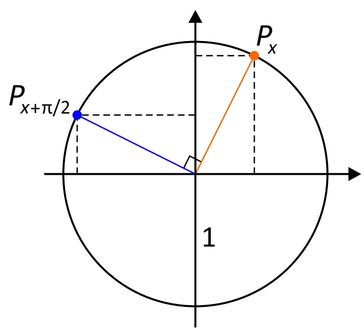


Øvelse D1

Udfyld de manglende felter i skemaet herunder, idet du udnytter omsætningen mellem gradtal og radiantal samt definitionen af sinus og cosinus via enhedscirklen på forrige side. Stemmer dine værdier med graferne herover?

Vinkel i grader	Radiantal x	$\cos(x)$	$\sin(x)$
0			
90	$\pi/2$	0	1
180			
270			
360			

Øvelse D2

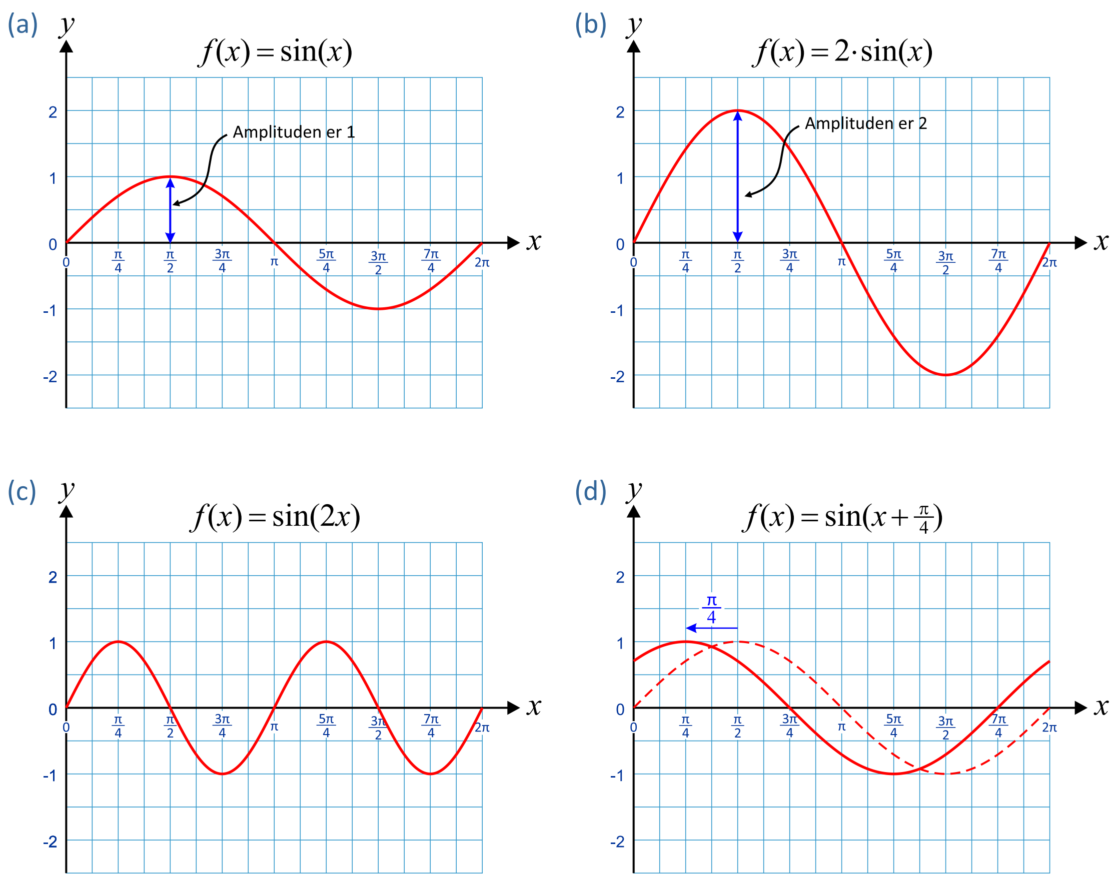


I denne øvelse skal du ved hjælp af enhedscirklen argumentere for, at $\cos(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$. Denne sammenhæng viser samtidigt (se sætning 2.1 i kapitel 2), at man får grafen for cosinus ved at *parallelforskyde* grafen for sinus med $-\pi/2$ i x-aksens retning.

Hjælp: De to involverede retningspunkter er indtegnet på enhedscirklen. Hvilke koordinater har hver af dem? Udnyt dernæst symmetrien ...

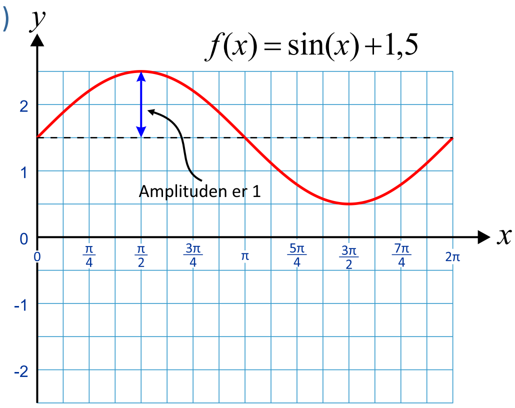
□

Resultatet af øvelse D2 viser, at der er en snæver sammenhæng mellem cosinus og sinus. Grafen for den ene funktion fås ud fra grafen for den anden funktion ved en simpel parallelforskydning i x-aksens retning. I det følgende vil vi studere, hvad der grafisk set sker, når man udfører nogle operationer på funktionen $f(x)=\sin(x)$. På figuren nedenfor viser (a) grafen for sinus-funktionen i intervallet $[0,2\pi]$. Hvis vi ganger funktionen med 2, får vi naturligvis en funktion, hvis y-værdier overalt er dobbelt så store som før. Specielt er *amplituden*, som er defineret som den numeriske værdi af det maksimale udsving fra svingningsaksen, dobbelt så stor. Det ses tydeligt på delfigur (b). Hvis vi i stedet for at gange sinusfunktionen med 2, vælger at gange x med 2, så kunne man måske tro, at man ville få en graf, som var "strukket ud" i x-aksens retning i forhold til den oprindelige i (a). Det er imidlertid lige modsat! Man får en graf, som er "trykket sammen" i x-aksens retning. Man kan argumentere som følger: Funktionen kan opfattes som en sammensat funktion, hvor den ydre funktion er $\sin(y)$ og den indre funktion er $2x$. Den variable x skal nu kun ændre sig halv så meget som før, for at man får den samme funktionsværdi, som før vi gangede x med 2!



I det sidste tilfælde udskifter vi x med $x+\frac{\pi}{4}=x-(-\frac{\pi}{4})$. Ifølge sætning 2.1 i kapitel 2 giver det en graf, som er den oprindelige graf parallelforskudt med $-\frac{\pi}{4}$ i x-aksens retning. Eller sagt på en anden måde: parallelforskudt med $\frac{\pi}{4}$ i x-aksens negative retning. Det er antydet på delfigur (d), hvor den stiplede kurve repræsenterer grafen for den oprindelige funktion $\sin(x)$. Den sidste operation vi vil kigge på, er at lægge et tal til sinus-funktionen, her 1,5. Der bliver altså lagt 1,5 til alle y-værdier. Ikke overraskende får man en graf, som er en parallelforskydning af den oprindelige med 1,5 i y-aksens retning – i øvrigt i fuld overensstemmelse med sætning 2.2 fra kapitel 2. Der er indtegnet en stiplet linje, som er *aksen* for den harmoniske svingning. Amplituden er uændret lig med 1, fordi den er det numerisk set maksimale udsving i forhold til aksen.

(e)



Definition D3 (Harmonisk svingning)

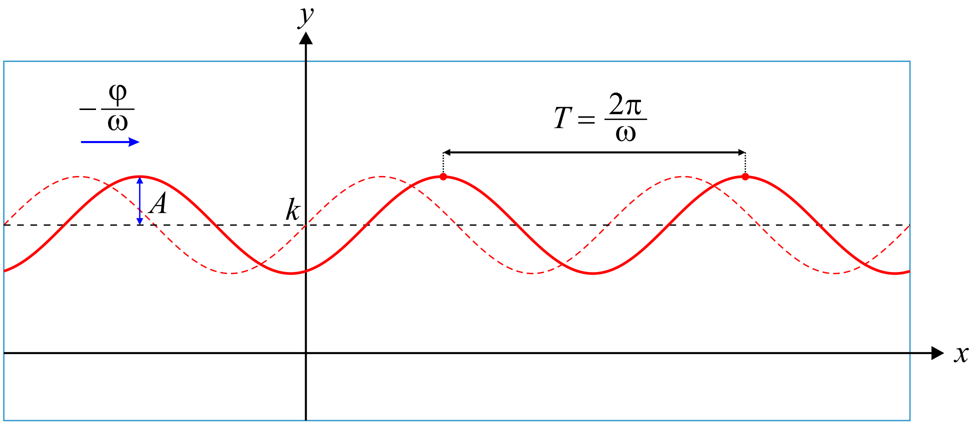
En funktion på formen $f(x) = A \cdot \sin(\omega \cdot x + \varphi) + k$, hvor A, ω, φ og k er konstanter, kaldes for en *harmonisk svingning*. I den forbindelse kaldes A *amplituden*, ω *vinkelhastigheden*, φ *faseforskydningen* og k *akseforskydningen*.

Med overvejelserne ovenfor er vi bedre rustet til at forstå betydningen af de enkelte konstanter eller *parametre*. Nu da alle konstanter kan figurere samtidigt og er generelle, er der grund til at knytte nogle kommentarer. Vi ved, at funktionsværdierne for den sammensatte sinus-funktion $\sin(\omega \cdot x)$ gentager sig, når den indre funktion $\omega \cdot x$ ændrer sig med 2π. Det betyder, at x selv skal ændre sig med $2\pi/\omega$. Perioden eller svingningstiden for $\sin(\omega \cdot x)$ er derfor lig med $T = 2\pi/\omega$. Grafen for den endelige harmoniske svingning får ud fra grafen for den simple funktion $\sin(x)$ ved nedenstående operationer. Detaljerne overlades til læseren. Bemærk dog lige, at parallelforskydningen i x-aksens retning *ikke* er med minus fase-forskydningen, som man måske kunne tro!

Start	$\sin(x)$
Skalering i x-aksens retning med $1/\omega$	$\sin(\omega \cdot x)$
Skalering i y-aksens retning med A	$A \cdot \sin(\omega \cdot x)$
Parallelforskydning i x-aksens retning med $-\varphi/\omega$	$A \cdot \sin(\omega \cdot (x - (-\varphi/\omega))$ $= A \cdot \sin(\omega \cdot (x + \varphi/\omega))$ $= A \cdot \sin(\omega \cdot x + \varphi)$
Parallelforskydning i y-aksens retning med k	$A \cdot \sin(\omega \cdot x + \varphi) + k$

Normalt vil man forlange, at A og ω er positive. Når x gennemløber et interval af længden T, vil $\omega \cdot x + \varphi$ foretage en runde på enhedscirklen. Derfor vil $\sin(\omega \cdot x + \varphi)$ antage alle værdier mellem -1 og 1, og som følge heraf vil $f(x) = A \cdot \sin(\omega \cdot x + \varphi) + k$ antage alle værdier mellem $-A + k$ og $A + k$. Værdimængden er altså $Vm(f) = [-A + k, A + k]$.

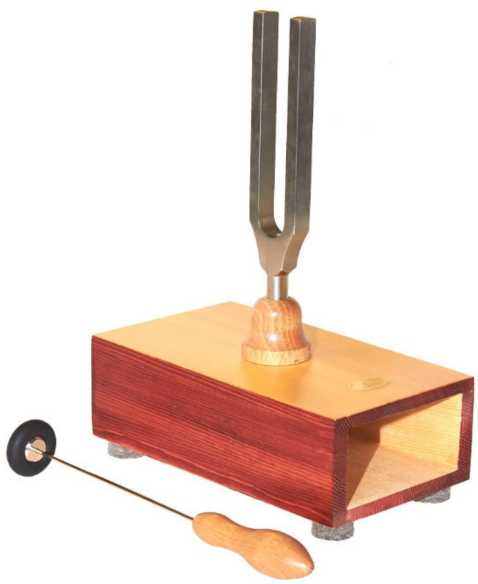
En skitse af grafen for en generel harmonisk svingning er givet herunder. Den stiplede kurve er grafen for tilfældet, hvor faseforskydningen er 0.



Anvendelser

Det er ikke overraskende, at harmoniske svingninger spiller en stor rolle i fysik: lyd, lys, fjedersvingninger, vekselstrøm, magnetisme, kvantemekanik, etc. De kan dog også benyttes til at beskrive periodiske bevægelser indenfor andre områder. Et eksempel kan være variationen af gennemsnitlige månedlige temperaturer i et bestemt geografisk område, udregnet gennemsnitligt over en række år. Vi vil se på et sådant eksempel til sidst. Under anvendelser kan den variable x for eksempel repræsentere en længde eller en tid. I sidstnævnte tilfælde vil man ofte kalde den variable for t.

Eksempel D4 (Lydbølger)



Lyd udbreder sig i luft ved at svingende luftmolekyler skubber til omkringliggende luftmolekyler, som derefter også sættes i svingninger, etc. Hvert luftmolekyle svinger frem og tilbage omkring en ligevægtsposition. En anden måde at betragte lyd på er som *trykbølger*. Der opstår overtryk, når de omkringliggende luftmolekyler rykker sammen, mens der opstår undertryk, når de rykker fra hinanden. Trykvariationerne omkring det normale tryk på 1 atmosfære er ganske små. Variationen kan optages med en mikrofon anbragt i en bestemt position. Hvis den tidsmæssige variation kan beskrives ved en harmonisk svingning, som defineret i definition D3, så siger vi, at der er tale om en *ren* tone. Rene toner kan for eksempel skabes ved at anslå en stemmegaffel eller skabes elektronisk ved hjælp af en tonegenerator. Amplituden A hænger sammen med lydstyrken. Vinkelhastigheden ω hænger sammen med lydens frekvens:

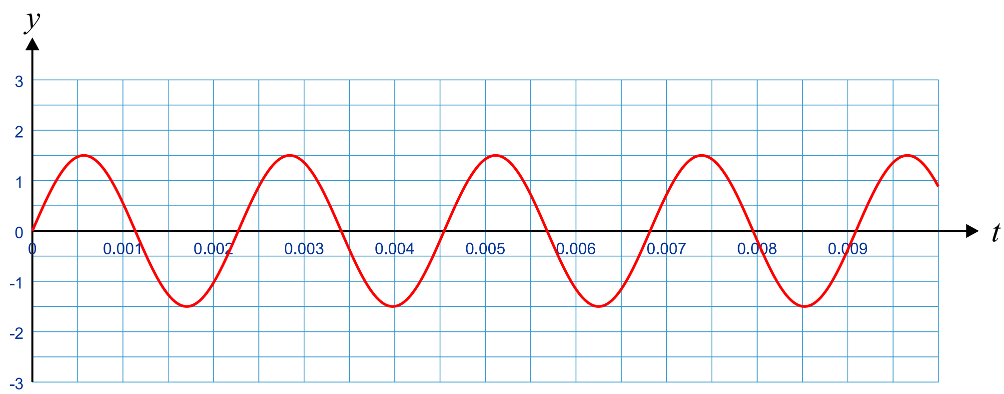
(D1) $$T = \frac{2\pi}{\omega}, \quad f = \frac{1}{T} \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \cdot \frac{1}{T} = 2\pi \cdot f$$

Den første formel med svingningstiden eller perioden er allerede omtalt lidt tidligere. At $f = 1/T$ er også logisk, for hvis én svingning for eksempel tager 0,1 sekund, så vil der være 10 svingninger pr. sekund, dvs. frekvensen f er 10 Hz.

Lad os for eksempel sige, at vi ønsker at beskrive det tidsmæssige forløb af lyden fra en 440 Hz stemmegaffel matematisk. Faseforskydningen, som blot betyder en parallelforskydning i tiden, er ikke så vigtig her. Vi kan vælge at starte stopuret, når sinus-funktionen påbegynder en ny svingning, dvs. $\varphi = 0$. Amplituden sætter vi for et syns skyld til 1,5, uden angivelse af enhed. Vi husker blot, at amplituden har relation til lydens styrke. Vi kan desuden sætte akseforskydningen til 0. Lydbølgens udsving som funktion af tiden t, kan dermed ifølge (D1) skrives:

(D2) $$g(t) = A \cdot \sin(2\pi \cdot f \cdot t) = 1{,}5 \cdot \sin(2\pi \cdot 440 \cdot t)$$

Da det er matematik og ikke fysik, undlader vi at anføre enheder og underforstår blot SI-enheder. Næste punkt kunne være at afbilde grafen for lydbølgen ved hjælp af et CAS-værktøj. Her er det vigtigt ikke blot at acceptere værktøjets default-vindue, for lydbølgen svinger rigtig mange gange pr. sekund. Faktisk vil det være hensigtsmæssigt at udregne svingningstiden først: $T = 1/f = 1/440 = 0{,}00227$. Vinduet $0 \le t \le 0{,}01$, $-2 \le y \le 2$ vil derfor give plads til mellem 4 og 5 svingninger i tidsretningen, og der vil være rigelig plads til de maksimale udsving også.



□

Øvelse D5 (Lydbølger)

I forlængelse af eksempel D4 skal vi tegne grafer.

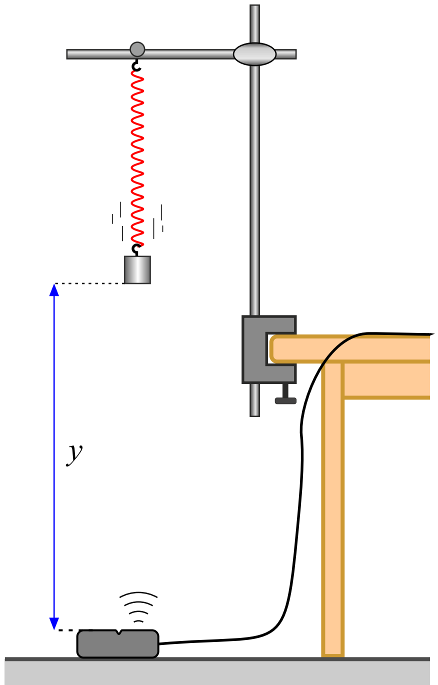
a) Benyt dit CAS-værktøj til at afbilde grafen for en ren tone med amplitude 2 og frekvens 500 Hz. Kald bølgefunktionen $g_0(t)$. Vælg et passende vindue.

b) Afbild i samme koordinatsystem grafen for den rene tone med amplitude 1,2 og frekvens 1000 Hz. Kald bølgefunktionen $g_1(t)$.

Man kalder det en *sammensat* tone, hvis lyden er sammensat af bølger med forskellig frekvens. De fleste musikinstrumenter leverer en sammensat tone, som kan opfattes som sammensat af en sinustone med en grundtone-frekvens på f_0 og en række *overtoner* med frekvenser $2f_0, 3f_0, 4f_0, \ldots$. Det er overtonerne, som giver instrumentet dets *klang* og karakteristika. En ren tone kan virke monoton. En sådan sammensat tone er således ikke en harmonisk svingning ifølge definition D3, men der er dog tale om en *periodisk* funktion, som gentager sig med perioden $T_0 = 1/f_0$.

c) Definer bølgefunktionen $g(t) = g_0(t) + g_1(t)$ i CAS-værktøjet og afbild grafen for den sammensatte tone i et passende vindue.

Øvelse D6 (Forsøg med fjedersvingninger)



Man kan vise, at et lod, der svinger i en fjeder ideelt set vil udføre en harmonisk svingning. Udfør et forsøg med fjedersvingninger som vist på figuren til højre – evt. i samarbejde med fysiklæreren. Vælg et lod på 100 g eller 200 g og anbring det i enden af en fjeder med en passende fjederkonstant, så man får en god svingning. En ultralydssensor (fx en GoMotion-sensor fra firmaet *Vernier*) tilsluttes en computer. Via den tilhørende dataopsamlingssoftware (fx Logger Pro), sættes sensoren til at foretage 50 målinger i sekundet i samlet set 10 sekunder, mens loddet svinger op og ned. Sensoren måler afstanden y fra sensoren til loddet.

a) Foretag i dataopsamlingssoftwaren et fit med en funktion af formen:

$$f(t) = A \cdot \sin(B \cdot t + C) + D$$

Kan du op til usikkerheder og måske en smule dæmpning på grund af en svag luftmodstand bekræfte, at der er tale om en harmonisk svingning?

b) Benyt værdien for B til via (D1) at bestemme svingningstiden T.

c) (ekstra) Teoretisk set er svingningstiden givet ved $T = 2\pi \cdot \sqrt{m/k}$, hvor m er loddets masse og k er *fjederkonstanten*. Indsæt m og k i formlen. Passer det med b)?

d) Argumenter for, hvorfor loddets hastighed må være 0 i yderpositionerne og numerisk set størst, når loddet passerer svingningsaksen (ligevægtspositionen). *Hjælp*: Tænk på, hvornår sinus og cosinus er henholdsvis 0, –1 og 1 på enhedscirklen ...

Bemærkning D7

Ved fit med $f(t) = A \cdot \sin(B \cdot t + C) + D$ vil der være uendeligt mange løsninger for parametrene, som giver anledning til den samme løsning – på grund af sinus-funktionens mange symmetrier. Hvilken løsning, værktøjet vælger, kan derfor være lidt vilkårligt. Undertiden er der dog mulighed for, at brugeren kan foretage nogle "gæt" som input og derved styre outputtet lidt. For eksempel bør A og B være positive.

Eksempel D8 (Gennemsnitstemperaturer)

På DMI's hjemmeside under Arkiv kan man finde gamle vejrdata, for eksempel de gennemsnitlige månedlige temperaturer i de forskellige vejrregioner i Danmark. Skemaet nedenfor viser de gennemsnitlige månedlige temperaturer i region Syd og Sønderjylland i perioden 2008-2017. I den nederste række er de gennemsnitlige månedlige temperaturer udregnet over de ti år. Besvar i den forsbindelse følgende spørgsmål.

a) Påvis ved at foretage et fit, at de gennemsnitlige månedlige temperaturer i perioden 2008-2017 med god tilnærmelse kan beskrives ved hjælp af en harmonisk svingning med en periode på 12, underforstået måneder. Lad 0 svare til nytår, 1 svare til 1. februar, etc. Det er passende at anbringe gennemsnitsværdierne midt i månederne: 0,5; 1,5; 2,5; ...; 11,5. Som en god tilnærmelse antager vi, at der er 30 dage i samtlige måneder.

b) Given en sproglig fortolkning af de værdier for amplituden og akseforskydningen, som fittet fra a) giver.

c) Hvornår på året vil temperaturen ifølge modellen være 10°C?

d) På hvilke tidspunkter af året vil man få de laveste og højeste temperaturer ifølge modellen? Omregn et kommatal, til dage ...

e) Udregn $f'(5)$ og giv en sproglig fortolkning størrelsen.

Månedlige gennemsnitstemperaturer i °C i region Syd og Sønderjylland fra 2008-2017 (DMI arkiv)												
Årstal	Jan	Febr	Mar	Apr	Maj	Jun	Jul	Aug	Sep	Okt	Nov	Dec
2008	4,4	4,6	3,9	7,4	13,0	15,2	17,4	16,5	12,9	9,7	6,2	2,7
2009	1,0	1,3	4,3	9,9	11,7	13,8	17,2	17,4	14,1	8,2	7,7	7,7
2010	-3,0	-1,8	3,2	7,4	9,2	14,0	18,7	16,0	12,7	8,9	3,0	-4,1
2011	0,4	0,3	3,3	10,1	11,5	15,1	15,8	15,9	14,3	9,9	6,6	4,4
2012	2,7	0,3	5,8	6,3	12,2	12,7	15,9	16,7	13,0	9,0	6,0	0,3
2013	0,3	-0,9	-0,8	5,3	11,8	13,7	17,0	16,9	13,1	11,0	5,8	5,4
2014	2,2	4,4	5,9	9,1	11,8	14,8	19,4	15,8	14,9	12,5	7,3	3,6
2015	3,2	2,2	4,9	7,1	9,8	12,8	15,7	17,4	13,2	9,8	8,0	7,2
2016	0,7	2,2	4,0	6,4	13,2	16,2	16,4	16,2	16,5	8,9	4,0	5,2
2017	1,6	2,2	5,1	6,3	12,2	14,8	15,6	16,0	13,5	11,6	5,9	3,9
Snit	1,35	1,48	3,96	7,53	11,64	14,31	16,91	16,48	13,82	9,95	6,05	3,63

Løsninger:

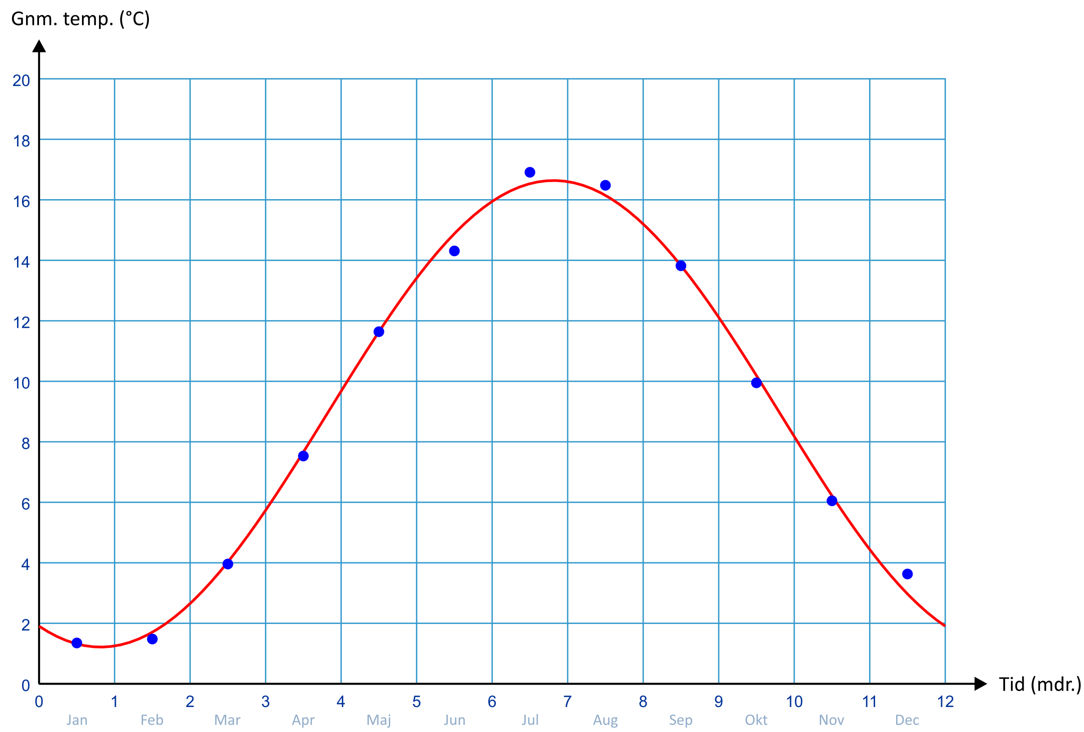
a) Vi ved, at perioden skal være 12 (mdr.). Ved hjælp af (D1) kan vinkelhastigheden dermed bestemmes: $\omega = 2\pi/T = 2\pi/12 = \pi/6$. Derfor foretager vi et fit med den harmoniske svingning $f(t) = A \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6} \cdot t + C\right) + D$. Der er altså tre parametre at bestemme. Som input benyttes disse sammenhørende værdier:

t	0,5	1,5	2,5	3,5	4,5	5,5	6,5	7,5	8,5	9,5	10,5	11,5
y	1,35	1,48	3,96	7,53	11,64	14,31	16,91	16,48	13,82	9,95	6,05	3,63

CAS-værktøjet giver os følgende resultat, afrundet til fire decimalers nøjagtighed:

$$f(t) \;=\; 7{,}7118\cdot\sin\left(\tfrac{\pi}{6}\cdot t-2{,}0125\right)+8{,}9258$$

Graf og datapunkter er afbildet nedenfor – et ganske overbevisende fit.



b) Akseforskydningen er 8,9258. Da den harmoniske svingning svinger symmetrisk omkring denne akse, kan forskydningen tolkes som at gennemsnitstemperatur over hele året i gennemsnit er ca. 8,9°C. Amplituden kan fortolkes som det antal grader, som temperaturen svinger til hver side om de 8,9°C – i gennemsnit. Temperaturen vil altså gennemsnitligt ligge i intervallet mellem 1,2°C og 16,6°C, som følgende viser: $[k-A, k+A]=[8{,}9-7{,}7\,;8{,}9-7{,}7]=[1{,}2\,;16{,}6]$.

c) Med CAS-værktøjet løser vi nedenstående ligning for $t\in[0,12]$:

$$f(t)=10 \quad\Leftrightarrow\quad t=4{,}1104 \;\vee\; t=9{,}5766$$

Vi er i maj og oktober måned. For at finde hvor omtrent i måneden, tager vi brøkdelene og ganger med 30: $30\cdot 0{,}1104=3{,}3120$ og $30\cdot 0{,}5766=17{,}2980$. I gennemsnit vil man altså kunne forvente en temperatur på 10°C den 3. maj og den 17. oktober.

d) Vi bestemmer steder med vandrette tangenter i intervallet $[0,12]$:

$$f'(t)=0 \quad\Leftrightarrow\quad t=0{,}8435 \;\vee\; t=6{,}8435$$

Det overlades til læseren at vise, at der er lokalt og globalt minimum i den første værdi og lokalt og globalt maksimum i den anden. Ved at bruge samme metode som i c) får vi, at modellen forudsiger, at den varmeste dag vil være den 25. juli og den koldeste den 25. januar.

e) CAS-værktøjet giver os umiddelbart: $f'(5) = 3{,}3200$. $t = 5$ svarer til tidspunktet 1. juni. Det betyder, at vi kan fortolke differentialkvotienten som *øjeblikshastigheden*, hvormed temperaturen stiger til tidspunktet 1. juni:

$$3{,}32°\text{C}/\text{måned} = 3{,}32°\text{C}/30\,\text{dage} = 0{,}111°\text{C}/\text{dag}$$

NB! Som nævnt er alt meget gennemsnitligt. Der kan i praksis være store udsving på den pågældende dag og det pågældende år.

□

Øvelse D9 (Gennemsnitstemperaturer i København og Nordsjælland)

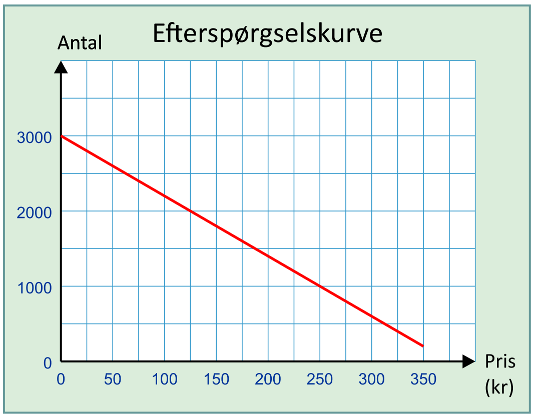
Analogt til eksempel D8 er nedenstående en tabel over de månedlige gennemsnitstemperaturer i perioden 2008–2017, denne gang blot for region København og Nordsjælland. I nederste række findes de gennemsnitlige månedlige gennemsnitstemperaturer i nævnte 10-års periode.

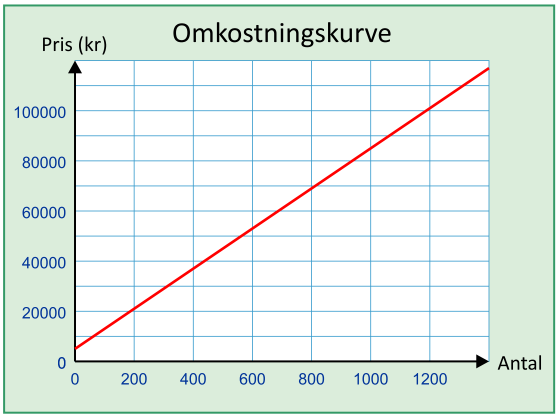
Månedlige gennemsnitstemperaturer i °C i region Kbh. og Nordsjælland fra 2008-2017 (DMI arkiv)												
Årstal	Jan	Febr	Mar	Apr	Maj	Jun	Jul	Aug	Sep	Okt	Nov	Dec
2008	3,8	4,5	3,5	7,5	12,6	15,2	17,9	16,8	13,1	9,5	6,0	2,6
2009	0,6	0,3	3,6	9,3	11,9	14,3	18,0	18,0	14,6	7,7	7,2	0,9
2010	-3,1	-1,8	2,7	7,2	9,8	14,4	19,6	16,7	12,9	8,4	3,1	-3,8
2011	-0,2	-0,4	2,8	2,8	11,7	15,8	17,2	16,5	14,3	9,7	6,7	4,2
2012	2,1	-0,9	5,6	6,4	12,6	13,3	16,7	17,1	13,4	8,7	6,2	0,4
2013	-0,2	-0,6	-0,8	6,0	12,8	15,2	18,0	17,4	13,0	11,1	5,9	4,9
2014	1,5	3,8	5,9	9,0	12,3	15,5	20,1	16,5	14,6	12,0	7,8	3,0
2015	2,8	1,8	4,7	7,5	10,3	13,5	16,4	17,8	13,6	9,6	7,2	6,4
2016	0,0	2,4	3,6	6,8	13,6	16,6	17,1	16,4	16,2	8,9	4,1	4,4
2017	0,9	1,9	4,8	6,6	12,3	15,3	15,8	16,4	13,4	10,9	5,5	3,6
Snit	0,82	1,10	3,64	6,91	11,99	14,91	17,68	16,96	13,91	9,65	5,97	2,66

a) Besvar de samme fire spørgsmål som under eksempel D8, altså a), b), c), d) og e).
b) Hvornår på året vokser og aftager temperaturen hurtigst? *Hjælp*: Vi er gået et niveau op her: Det er $f'(t)$, som skal analyseres. Overvej, hvordan det skal forstås.

Tema E. Anvendelser af differentialregning i økonomi

I det følgende vil vi betragte en simpel økonomisk model for en virksomhed. Når en virksomhed forsøger at sælge sine varer, så er prisfastsættelsen et vigtigt emne at overveje. Sættes prisen lavt, så kan der sælges mange styk, men fortjenesten pr. styk vil være mindre. Sættes prisen højere, så kan der normalt ikke afsættes så meget, men man tjener mere pr. styk. Det store spørgsmål er, hvad den optimale stykpris er? Underforstået den stykpris, som giver den største fortjeneste. Til at besvare dette spørgsmål behøves blandt andet viden om efterspørgslen og omkostningerne.





For at simplificere problemstillingen antager vi, at alle de producerede enheder sælges. Antal producerede enheder og antal solgte enheder er altså det samme. Vi antager, at *efterspørgselsfunktionen*, som angiver hvor mange enheder x, der kan sælges, når stykprisen sættes til p. Lad os se på et tilfælde, hvor sammenhængen er lineært aftagende:

(E1) $$x = 3000 - 8 \cdot p \quad \Leftrightarrow \quad p = \frac{3000 - x}{8}$$

Omkostningerne kan deles op i de *variable omkostninger og de faste omkostninger*. De variable omkostninger afhænger af antal producerede enheder, og vi vil her antage, at de variable omkostninger er proportionale med antal producerede enheder: 80 kr. pr. enhed. De faste udgifter sættes her til 5000 kr. Vi har med andre ord følgende *omkostningsfunktion*: $O(x) = 80 \cdot x + 5000$. *Indtægtsfunktionen* fås ved at multiplicere antal solgte enheder med salgsprisen pr. enhed: $I(x) = x \cdot p = x \cdot (3000 - x)/8$. Da fortjenesten er lig med indtægter fratrukket omkostninger, fås følgende *fortjenestefunktion*:

(E2) $$F(x) = I(x) - O(x) = x \cdot \left(\frac{3000 - x}{8} \right) - (80 \cdot x + 5000)$$

Øvelse E1 (Økonomisk model 1)

I forbindelse med funktionerne på forrige side, skal du besvare følgende spørgsmål:

a) Benyt differentialregning til at optimere fortjenestefunktionen: Hvor mange styk skal man sælge af varen for at opnå den størst mulige fortjeneste? Hvad skal man sætte stykprisen til, for at opnå dette. Hvor stor er den samlede fortjeneste i så fald? NB! Husk at overveje definitionsmængder.

For en given værdi af x betegner størrelsen $I'(x)$ *marginalindtægterne*, mens $O'(x)$ betegner *marginalomkostningerne*.

b) Bestem de to differentialkvotienter for en produktion af 800 enheder.
c) Redegør for, hvorfor de to differentialkvotienter angiver en tilnærmet værdi for, hvor meget henholdsvis $I(x)$ og $O(x)$ ændrer sig ved produktion af én ekstra enhed. *Hjælp*: Tænk på betydningen af differentialkvotienten generelt set.
d) Med tolkningen i c) in mente, giv en sproglig fortolkning af resultatet af b).
e) Bestem marginalindtægterne og marginalomkostningerne for det antal enheder, som giver den optimale fortjeneste, bestemt i spørgsmål a). Hvad konkluderer du?
f) Kan en voksende efterspørgselskurve tænkes? Diskutér!

Øvelse E2 (Økonomisk model 2)

Med betegnelserne ovenfor: Lad efterspørgslen for en given vare være givet ved udtrykket $x = 1000000 \cdot p^{-1.5}$, hvor x er det antal enheder, som kan sælges til stykprisen p. Lad endvidere $O(x) = 0{,}00005 \cdot x^3 - 0{,}12 \cdot x^2 + 100 \cdot x + 10000$ være omkostningsfunktionen.

a) Tegn efterspørgselskurven i dit CAS-værktøj, dvs. afbild grafen for antal solgte enheder x som funktion af prisen p. Du kan eventuelt kalde funktionen for $f(p)$. Vælg i den forbindelse vinduet $0 \leq p \leq 100$ og $0 \leq x \leq 10000$.
b) Beskriv grafen fra a): Kan den retfærdiggøres? Giv en praktisk forklaring på, hvorfor en efterspørgselskurve kan tænkes at se således ud!
c) Bestem funktionen, som angiver salgsprisen pr. styk, som funktion af antal solgte enheder, x. Kald funktionen for $P(x)$. *Hjælp*: Isoler p i udtrykket for x ovenfor.
d) Angiv et udtryk for indtægtsfunktionen $I(x)$.
e) Tegn i et CAS-værktøj graferne for indtægtsfunktionen og omkostningsfunktionen, idet du vælger vinduet $0 \leq x \leq 2000$ og $0 \leq y \leq 150000$. Beskriv graferne med ord. Hvilke aspekter ved en produktion kan få graferne til at se således ud?
f) Angiv et udtryk for fortjenestefunktionen $F(x)$ og tegn dens graf i samme vindue som i spørgsmål e). Bestem det antal producerede enheder, som giver den maksimale fortjeneste. Hvor stor er den maksimale fortjeneste? Hvad er den optimale salgspris at sætte pr. vare?
g) (Ekstra) Lad $A(p) = 1000000 \cdot p^{-1.5}$ betegne sammenhængen mellem antal solgte enheder og stykprisen p angivet i begyndelsen af denne opgave. Angiv et udtryk for den sammensatte funktion $G(p) = (F \circ A)(p) = F(A(p))$. Forklar hvad denne funktion repræsenterer og kan bruges til.

Øvelse E3* (Priselasticitet)

Denne opgave er lidt sværere end de øvrige, i kraft af en højere abstraktion. *Efterspørgselsfunktionen* $A(p)$ er den funktion, som givet en stykpris p på varen, angiver hvor mange vareenheder, som kan afsættes til den pågældende pris. Tidligere er denne størrelse blot angivet ved x. Undertiden er man i økonomi interesseret i at undersøge, hvor følsom salget er overfor en prisforøgelse. Lad os sige, at vi giver prisen en tilvækst på Δp. Vi kan da betragte følgende størrelse:

$$\frac{\text{Relativ ændring i efterspørgslen}}{\text{Relativ ændring i prisen}} = \frac{\dfrac{A(p+\Delta p)-A(p)}{A(p)}}{\dfrac{\Delta p}{p}} = \frac{A(p+\Delta p)-A(p)}{\Delta p}\cdot\frac{p}{A(p)}$$

også betegnet den *gennemsnitlige priselasticitet* ved en prisændring fra p til $p+\Delta p$. Hvis $A(p)$ er differentiabel, så har sidstnævnte udtryk en grænseværdi for $\Delta p \to 0$, og grænseværdien betegnes den *øjeblikkelige priselasticitet* ved prisen p:

(E3) $$E(p) = A'(p)\cdot\frac{p}{A(p)}$$

Efterspørgslen kaldes *uelastisk*, *neutralelastisk* eller *elastisk*, alt efter om den numeriske værdi af priselasticiteten, $|E(p)|$, er mindre end 1, lig med 1 eller større end 1. Da vi her kun betragter efterspørgselsfunktioner, som er *aftagende*, er det det samme som at sige følgende: Efterspørgslen er *uelastisk*, når $-1 < E(p) < 0$, neutralelastisk, når $E(p) = -1$ og *elastisk*, når $E(p) < -1$.

a) Beregn priselasticiteten for tilfældet med efterspørgselsfunktionen i opgave 28, når prisen p er 150 kr. Hvilken type priselasticitet er der tale om her?

Lad $B(p) = A(p)\cdot p$ betegne *omsætningsfunktionen*. Det bemærkes, at den er beslægtet med indtægtsfunktionen: $B(p) = (I \circ A)(p) = I(A(p))$.

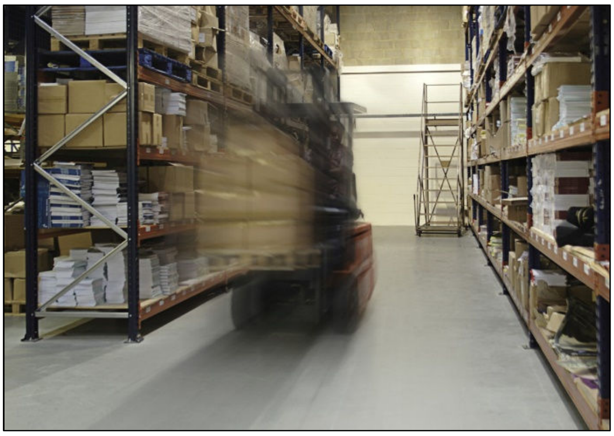
b) Vis at $B'(p) = A(p)\cdot(E(p)+1)$. *Hjælp*: Udregn venstre og højre side og vis, at de er ens, under brug af (E3).
c) Benyt formlen i b) til at vise, at hvis efterspørgslen er uelastisk, så vil en prisstigning betyde en omsætningsstigning. Hvad sker der i tilfældet med de øvrige to typer elasticitet i tilfældet med en prisstigning?
d) Hvad har størst priselasticitet, tror du? Almindelige fødevarer, luksusvarer, varer der kan erstattes af andre varer? Argumenter!

Det bemærkes, at priselasticiteten er uafhængig af de valgte enheder, fx valuta! I øvrigt benyttes betegnelsen *efterspørgselselasticitet* ofte for det samme som priselasticitet.

Øvelse E4 (Lagerstyring)

Lagerstyring er et vigtig område i organiseringen af en virksomhed. Det koster mange penge at have et stort lager. Alternativet med et lille lager har dog også sine negative sider: det koster ekstra at få tilsendt nye forsyninger i mange forsendelser. Spørgsmålet er hvilke ordrestørrelser, der er de optimale for virksomheden, så firmaets totale lager og forsendelsesomkostninger bliver så små som mulig. Indenfor faget erhvervsøkonomi arbejder man med en klassisk model for lagerstyring, som fører frem til den såkaldte Wilsons formel for den optimale ordrestørrelse. Den skal vi se på i det følgende. Vi arbejder i modellen med følgende størrelser:

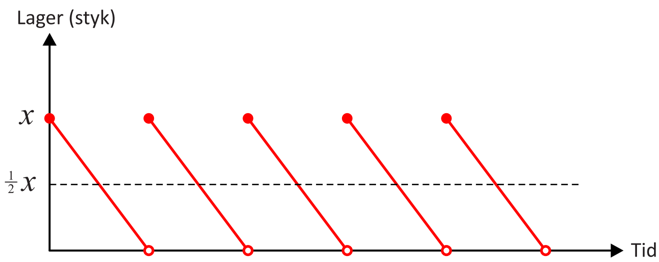
Totale årlige antal vareenheder:	V
Omkostninger pr. ordre:	F
Indkøbsprisen pr. vareenhed:	P
Lageromkostninger pr. enhed:	K
Ordrestørrelse:	x



Vi vil udregne lageromkostningerne under den antagelse, at lagersituationen over tid er som beskrevet på figuren nedenfor til højre. I gennemsnit er der $\frac{1}{2}x$ vareenheder på lager.

Vi får:

Antal ordrer pr. år:	V/x
Totale kostpris:	$V \cdot P$
Ordreomkostninger:	$F \cdot V/x$
Lageromkostninger:	$\frac{1}{2} \cdot x \cdot K$



$$\text{Totale omkostninger} = \text{Totale kostpris} + \text{ordreomkostninger} + \text{lageromkostninger}$$
$$= V \cdot P + F \cdot \frac{V}{x} + \frac{1}{2} \cdot x \cdot K$$

a) Redegør for rigtigheden af udtrykkene for antal ordrer pr. år, den totale kostpris, ordreomkostningerne samt lageromkostningerne.

b) En virksomhed regner med at indkøbe og sælge i alt 1920 kaffemaskiner på et år. Hver kaffemaskine koster i indkøb 175 kr. Udgifterne til hver ordre udgør 750 kr., mens det koster 50 kr. at have lagret én kaffemaskine i et år. Vis, at følgende udtryk angiver de totale (årlige) omkostninger, som funktion af ordrestørrelsen x:

$$f(x) = 336000 + \frac{1440000}{x} + 25x$$

Lad funktionen g angive summen af ordreomkostningerne og lageromkostningerne:

$$g(x) = \frac{1440000}{x} + 25x$$

Da funktionerne f og g kun adskiller sig fra hinanden ved kostprisen, som ikke afhænger af x og dermed er en konstant, vil grafen for f blot være en parallelforskydning af grafen for g. Det betyder, at funktionerne har samme monotoniforhold og har de samme lokale ekstremumssteder.

c) Hvor stor vil summen af ordreomkostningerne og lageromkostningerne være ved ordrestørrelser på henholdsvis 100 og 500 styk?

d) Foretag en funktionsundersøgelse af $f(x)$, idet du bestemmer monotoniforhold, og lokale ekstrema. Hvad er den optimale ordrestørrelse?

e) Tegn graferne for ordreomkostningerne, lageromkostningerne samt summen af dem i samme koordinatsystem, idet du vælger et passende vindue at vise graferne i. Beskriv de to førstnævnte grafers forløb og prøv at forstå, hvorfor de ser ud, som de gør. Bestem skæringspunktet for disse to grafer. Hvad observerer du?

f) Gå tilbage til det generelle udtryk for de totale (årlige) omkostninger og bevis *Wilsons formel* for den optimale ordrestørrelse:

(E4) $$\text{Optimal ordrestørrelse} = \sqrt{\frac{2 \cdot F \cdot V}{K}} \qquad (\textit{Wilsons formel})$$

Passer den optimale ordrestørrelse udregnet i spørgsmål d) med det, du får ved at indsætte i denne formel?

g) Analyser kvalitativt hvordan den optimale ordrestørrelse givet ved Wilsons formel påvirkes, når lageromkostningerne pr. enhed, dvs. K, øges – og de andre størrelser fastholdes. Stemmer det med den umiddelbare intuition?

h) Overvej rimeligheden i de antagelser, som ligger til grund for ovenstående model for lagerstyring. Diskuter herunder forskellige typer varer. Kom også ind på grafen, som viser lagersituationen som funktion af tiden. Er den rimelig? Kan man forestille sig andre? Du kan eventuelt betragte en anden model og analysere den matematisk.

Opgaver

1.1 Mængder

Opgave 101

Betragt følgende to mængder:

$A = \{-3, -1, 2, 14, 15, 22, 101\}, \quad B = \{-10, -1, 0, 3, 14, 17, 22, 100\}$

a) Bestem følgende mængder: $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ og $B \setminus A$.

b) Bestem $A \cap A$. Hvilken generel regel tror du, der gælder?

Opgave 102

Brug Internettet til denne opgave. Find "Liste over kommuner i Danmark efter indbyggertal" i Wikipedia og løs følgende delopgaver:

a) Opskriv mængden S af alle kommuner i region Sjælland. Hvor mange elementer har mængden?

b) Opskriv mængden N af danske kommuner, som har mindre end 22000 indbyggere i år 2014.

c) Opskriv mængden K af alle danske kommuner, hvis navn starter med bogstavet K.

d) Bestem følgende mængder: $S \cap K$ og $N \cap K$. Udtryk desuden med ord, hvad disse mængder repræsenterer.

e) Opskriv mængden $N \cup K$ og udtryk med ord, hvad mængden repræsenterer.

Opgave 103

Lad A og B være vilkårlige mængder. Tegn gerne Venn-diagrammer som en hjælp til at besvare følgende spørgsmål:

a) Vis at der altid gælder, at $A \cap B \subseteq A$.

b) Antag $A \subseteq B$. Hvad kan man så sige om $A \cup B$ og $A \cap B$?

Opgave 104

Beskriv med ord hvilke tal følgende mængder består af:

a) $R \setminus \{0\}$

b) $\{x \in R \mid x > 0\}$ NB! Denne mængde betegnes også ofte bare med R^+.

c) $\{4n \mid n \in N\}$

Opgave 105

Opskriv resultaterne af følgende mængdeoperationer som et interval:

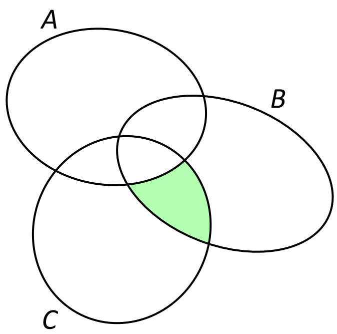
a) $[-2, 6[\cap]0, 17]$

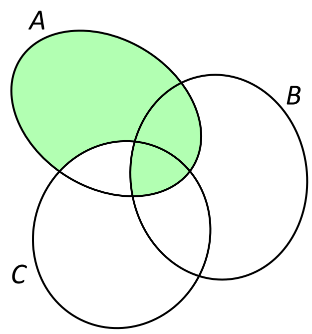
b) $]-\infty, 21] \cup]10, \infty[$

c) $[2, 8] \cap]2, 10]$

Opgave 106

Find for hver af de to familier af mængder nedenfor nogle mængdeoperationer på mængderne A, B og C, som svarer til de med grønt markerede områder.





Opgave 107*

Vis at følgende mængderegel gælder: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Du kan enten benytte teknikken fra eksempel 1.4 eller tegne Venn-diagrammer.

Opgave 108*

I denne opgave skal vi forsøge at få lidt mere styr på mængden af rationale tal.

a) Forklar hvorfor ethvert kommatal med endeligt mange decimaler er et rationalt tal.

b) Vis at mængden af rationale tal *ligger tæt* på den reelle tallinje, dvs. at ethvert nok så lille interval på den reelle tallinje altid vil indeholde rationale tal. *Hjælp*: Kald intervallets længde for L. Konstruer et "net" af udelukkende rationale tal, som har en "maskelængde" mindre end L.

c) Argumenter for, at ethvert reelt tal, hvor decimalerne fra et vist trin af gentager sig *periodisk*, er et rationalt tal. *Hjælp*: Lad $x = 0{,}156156156...$ Gang med 1000 og træk x fra: $999x = 1000x - x = 156$, dvs. $x = 156/999$. Brug idéen i dette eksempel. Hvordan klarer du $x = 0{,}8156156156...$?

Opgave 109*

I eksempel 1.3 blev det nævnt, at $\sqrt{2}$ er et irrationalt tal. Nedenfor gives et kortfattet bevis for denne påstand i et såkaldt *modstridsbevis*. Forsøg at forstå hvert trin i argumentationen. Genfortæl for sidekammeraten.

Antag modsætningsvist, at $\sqrt{2}$ er et rationalt tal. Så kan tallet skrives som en brøk mellem hele tal a/b. Vi kan antage, at brøken er uforkortelig – ellers kan vi jo bare forkorte den i bund. Vi har da: $(a/b)^2 = a^2/b^2 = 2$ og dermed $a^2 = 2b^2$. Højresiden er et lige tal. Derfor må a også selv være et lige tal. Vi kan dermed skrive a på formen $a = 2c$, hvor c er et helt tal. Dermed haves $4c^2 = 2b^2$, hvilket er det samme som $2c^2 = b^2$. Analogt til det tidligere argument er b derfor også nødt til at være et lige tal. Når både a og b er lige tal, kan brøken mellem dem forkortes med 2, i modstrid med, at vi antog brøken uforkortelig.

1.2 Lidt om ligninger og åbne udsagn

Opgave 110

Hvilke af nedenstående påstande udgør et udsagn i matematisk forstand?

a) "Moskva er en by i Rusland"
b) "Det bliver regnvejr i morgen"
c) $3 = 9$

Opgave 111

Hvilke af nedenstående sætninger udgør et åbent udsagn i matematisk forstand?

a) "Stockholm er en by i Rusland"
b) "Landet vandt verdensmesterskabet i fodbold i 2014"
c) $2x + 8 = x^2$
d) $x = 4 \wedge x = 10$

Opgave 112

Hvilket tegns skal der stå imellem venstre side og højre nedenfor?: $\Leftrightarrow, \Rightarrow, \Leftarrow, =, >, <$. Overvej først, om der er tale om åbne udsagn eller blot udtryk.

a) $2(x+7)+3 \quad ? \quad 2x+17$
b) $9 \quad ? \quad 11$
c) $x+9=3x \quad ? \quad 9=2x$
d) $x(x+5)=0 \quad ? \quad x=0 \vee x=-5$
e) "Byen ligger i Danmark" ? "Byen ligger på Fyn"
f) $x>5 \quad ? \quad x^2>25$
g) $x \in N \quad ? \quad x \in R$
h) $5x+9 \quad ? \quad 5x-1$
i) $(x+1)^2-5 \quad ? \quad x^2+2x-4$

Opgave 113

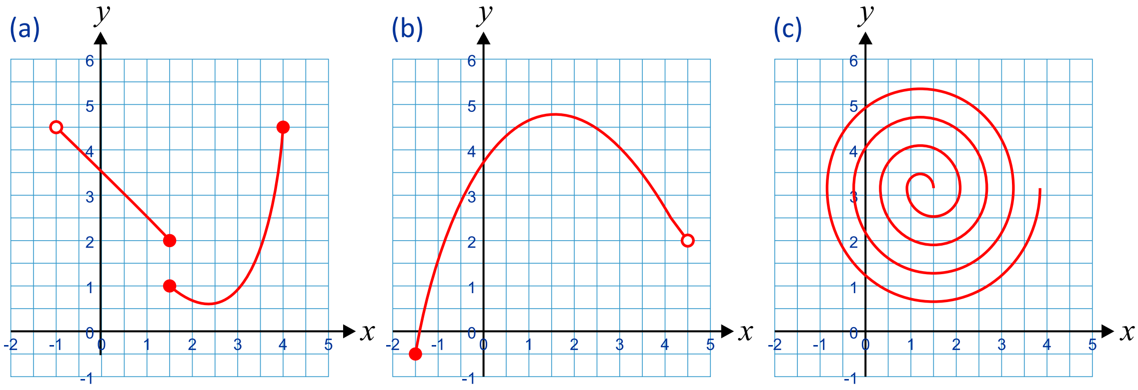
Benyt nulreglen til at løse nedenstående ligninger. Du skal eventuelt først faktorisere.

a) $2x \cdot (x-3) = 0$
b) $(10x-5) \cdot (3-x) = 0$
c) $x^2 + 8x = 0$
d) $2x^2 + 8x = 0$
e) $7x^2 + 35x = 0 \;\wedge\; x > 0$

1.3 Funktionsbegrebet

Opgave 114

Hvilke kurver nedenfor er grafer for en funktion og hvilke er ikke?



Opgave 115

Betragt graferne på næste side. Aflæs efter bedste evne definitionsmængden og værdimængden for hver af de seks funktioner givet ved de seks grafer.

Bemærk, at hvis grafen fortsætter til randen af det afbildede område, og der samtidigt ikke er anbragt nogen bolle her, så lader vi det være underforstået, a grafen fortsætter uendeligt i den pågældende retning. Stiplede linjer indikerer, at grafen "nærmer sig" vilkårligt tæt ind til denne linje.

Opgave 116

Betragt graferne på næste side. I hvert tilfælde kaldes den tilhørende funktion for *f*.

a) Aflæs funktionsværdien $f(3)$ på hver af de seks grafer.
b) Løs ligningen $f(x)=3$ grafisk for hver af de seks funktioner.

Opgave 117

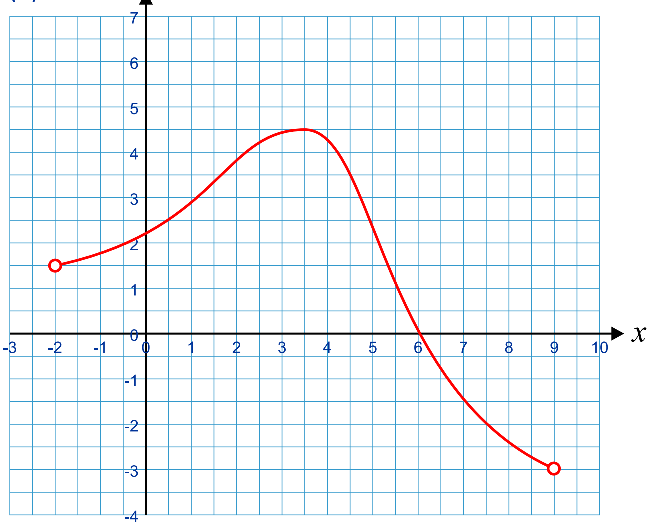
Betragt graferne på næste side. Aflæs efter bedste evne definitionsmængden og værdimængden for hver af de seks funktioner givet ved de seks grafer.

Bemærk at hvis grafen fortsætter til randen af det afbildede område, og der samtidigt ikke er anbragt nogen bolle her, så lader vi det være underforstået, a grafen fortsætter uendeligt i den pågældende retning. Stiplede linjer indikerer, at grafen "nærmer sig" vilkårligt tæt ind til denne linje.

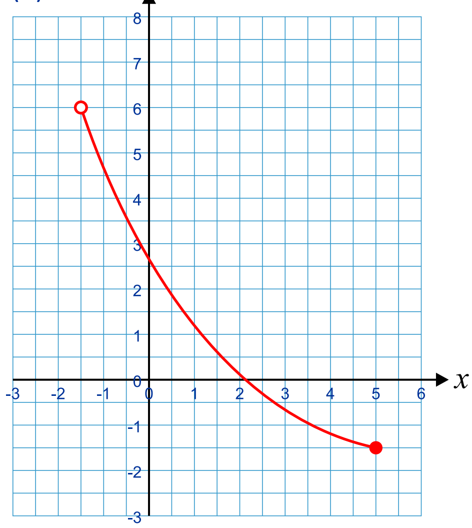
Opgave 118

Lad $f(x)=2x^2+3x$. Faktoriser højresiden og benyt resultatet sammen med nulreglen til at bestemme funktionens nulpunkter.

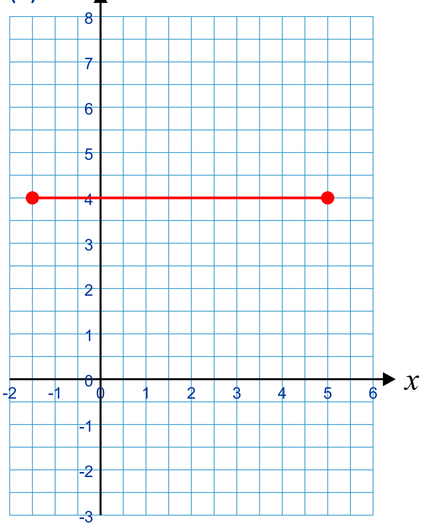
(a)


y
x
-3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
7 6 5 4 3 2 1 0 -1 -2 -3 -4

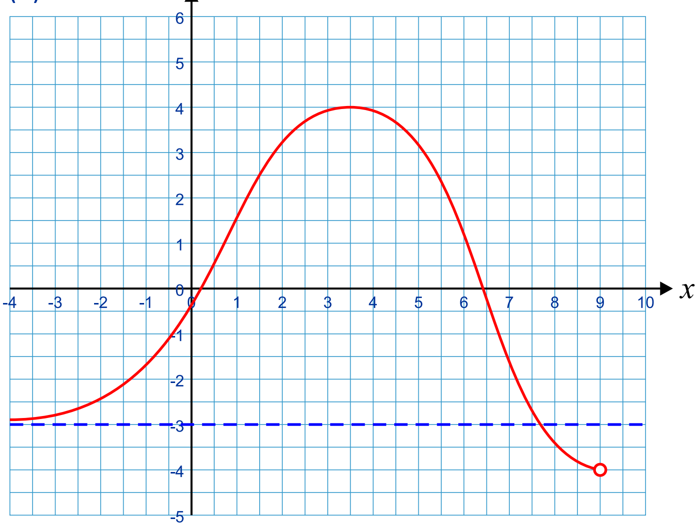
(b)


y
x
-3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6
8 7 6 5 4 3 2 1 0 -1 -2 -3

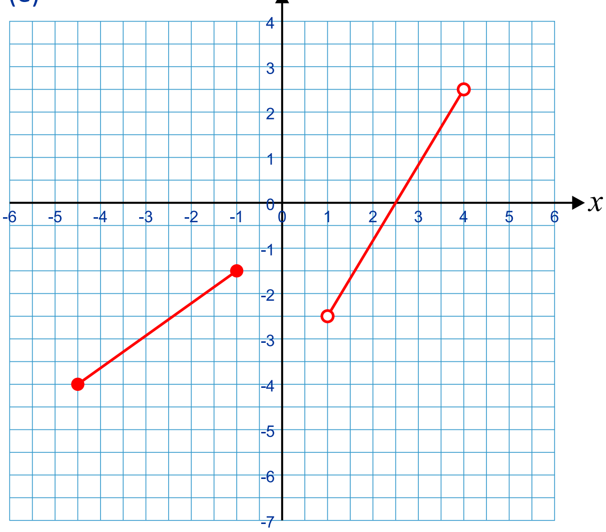
(c)


y
x
-2 -1 0 1 2 3 4 5 6
8 7 6 5 4 3 2 1 0 -1 -2 -3

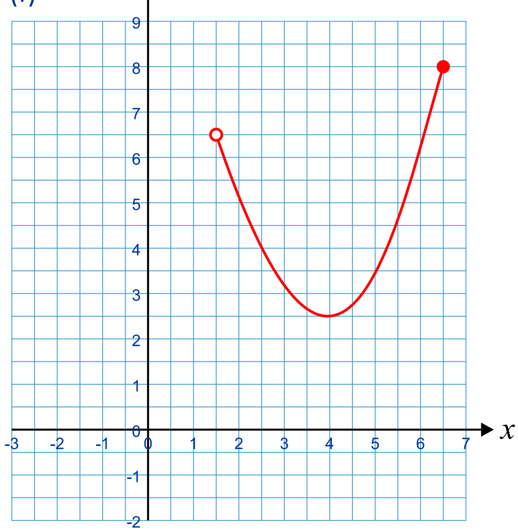
(d)


y
x
-4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
6 5 4 3 2 1 0 -1 -2 -3 -4 -5

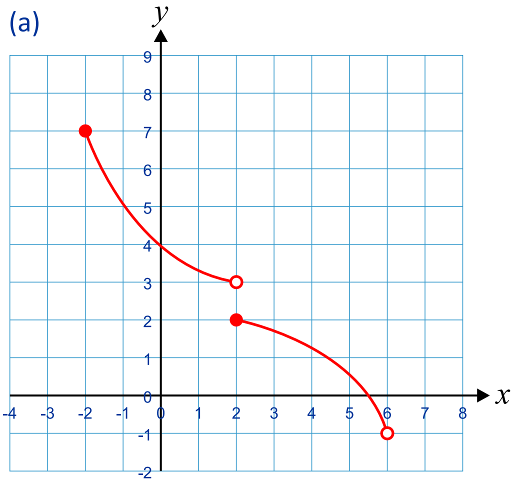
(e)


y
x
-6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6
4 3 2 1 0 -1 -2 -3 -4 -5 -6 -7

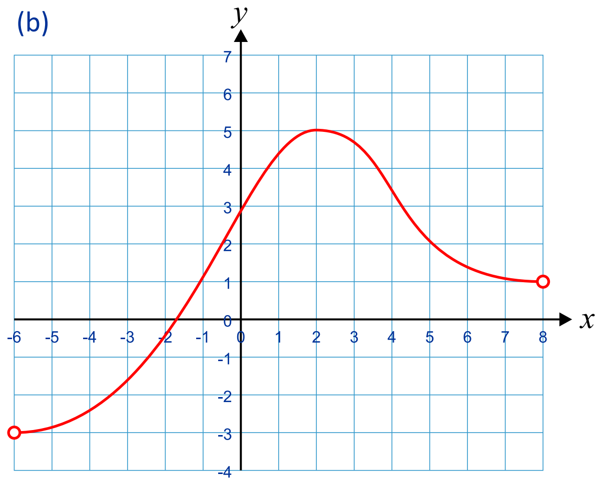
(f)


y
x
-3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7
9 8 7 6 5 4 3 2 1 0 -1 -2

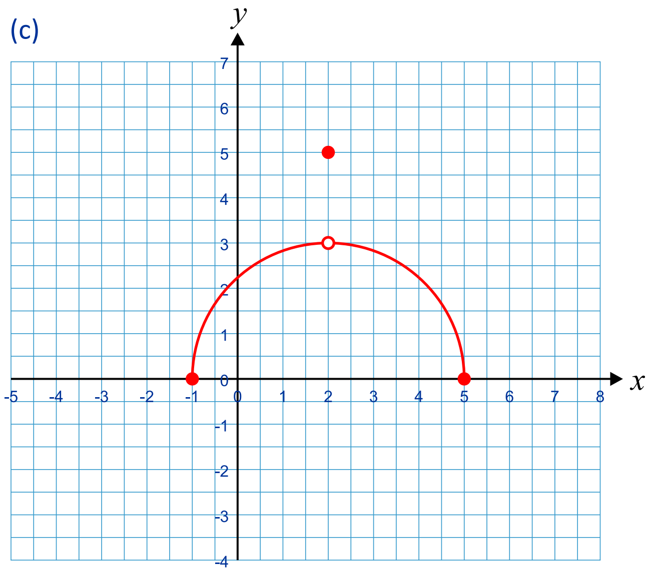
(a)



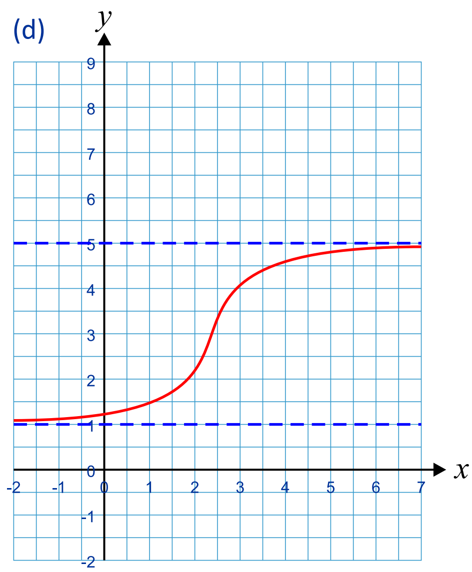
(b)



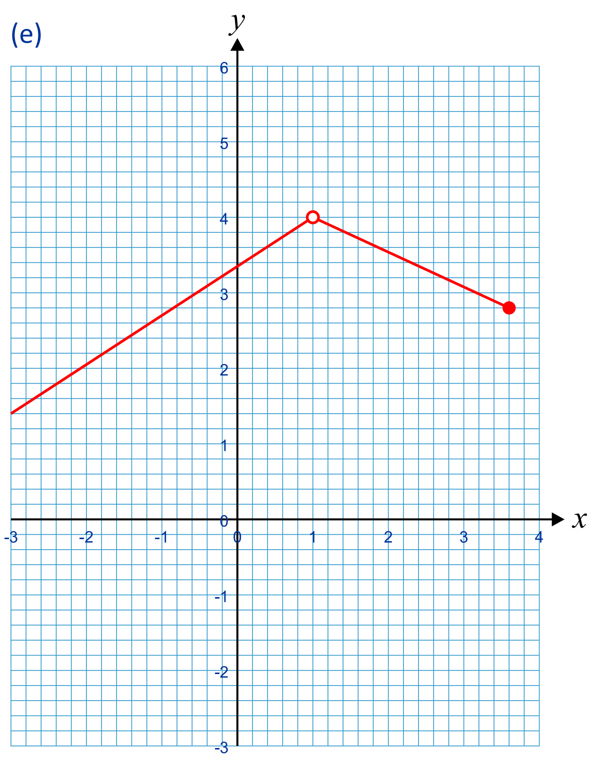
(c)



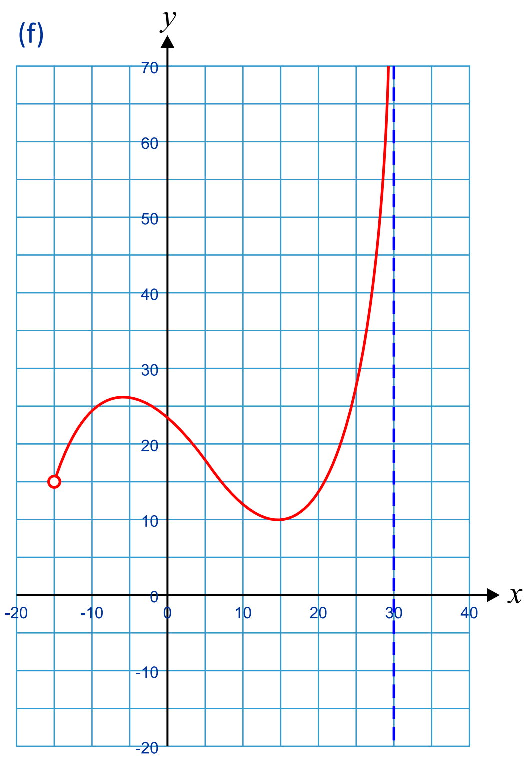
(d)



(e)



(f)



Opgave 119

Betragt graferne på forrige side. I hvert tilfælde kaldes den tilhørende funktion for *f*.

a) Aflæs funktionsværdien $f(2)$ på hver af de første fem grafer.
b) For graf (a): Løs ligningen $f(x) = 3$ grafisk.
c) For graf (f): Løs ligningen $f(x) = 15$ grafisk.

Opgave 120

Lad $f(x) = 2x^3 - 13x^2 + 36$. Benyt CAS-værktøjet til at løse følgende:

a) Bestem funktionsværdierne i $x = -2$ og $x = 1,5$.
b) Bestem funktionens nulpunkter.
c) Bestem løsningerne til ligningen $f(x) = 20$ med to decimalers nøjagtighed.
d) Tegn grafen for funktionen i et passende interval. Inddrag grafen til at give et bud på værdimængden, selv om du på nuværende tidspunkt ikke har redskaberne til at angive den med sikkerhed.

Opgave 121

Lad $f(x) = \dfrac{x+1}{2x}$.

a) Bestem definitionsmængden. Benyt CAS-værktøjet til at løse følgende:
b) Bestem funktionens nulpunkter. Kunne du have klaret opgaven uden CAS-værktøj?
c) Løs ligningen $f(x) = 5$. Kunne du have klaret opgaven uden CAS-værktøj?
d) Tegn grafen for funktionen i et passende interval. Inddrag grafen til at give et bud på værdimængden, selv om du på nuværende tidspunkt ikke har redskaberne til at angive den med sikkerhed.

Opgave 122

En vigtig funktion i matematikken er $f(x) = |x|$. Den kaldes "numerisk *x*", og kan defineres ved en såkaldt *gaffelforskrift*:

$$f(x) \;=\; \begin{cases} x & \text{for } x \geq 0 \\ -x & \text{for } x < 0 \end{cases}$$

Meningen er, at hvis *x* er større end eller lig med 0, så skal man bruge det øverste udtryk, mens man skal bruge det nederste udtryk, når *x* er negativ.

a) Bestem funktionsværdierne $f(2)$ og $f(-2)$.
b) Tegn manuelt grafen for funktionen i et koordinatsystem.

Opgave 123

Hvilke af de funktioner, hvis grafer er angivet side 67 og 68, er injektive?

opgave 124*

Tegn grafen for funktionen $f(x) = |2x-4|$ og løs ligningen $f(x) = 8$.

Hjælp: Benyt definitionen på numerisk x fra opgave 122. Udskift x med $2x-4$ i alle forekomster af x og reducer derefter.

1.4 Monotoniforhold og ekstrema

Opgave 125

Betragt de funktioner, som har graferne vist på side 67.

a) Angiv monotoniintervallerne for hver funktion.
b) Angiv eventuelle største og mindsteværdier for hver af funktionerne.
b) Angiv eventuelle lokale ekstrema for hver af funktionerne.

Opgave 126

Betragt de funktioner, som har graferne vist på side 68.

a) Angiv monotoniintervallerne for hver funktion.
b) Angiv eventuelle største og mindsteværdier for hver af funktionerne.
b) Angiv eventuelle lokale ekstrema for hver af funktionerne.

Opgave 127

Brug dit CAS-værktøj til i de angivne intervaller at tegne graferne for nedenstående funktioner. Afgør alene ud fra en visuel inspektion af graferne monotoniintervallerne, samt eventuelle lokale og globale ekstrema.

a) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$, $x \in [0,10]$.

b) $f(x) = 2^x - x,\ x \in]-6,3[$.

Opgave 128

Tegn med dit CAS-værktøj grafen for $f(x) = \sin(x), x \in [0, 2\pi]$. Bestem ved visuel inspektion de to ekstrema. Brug herefter din viden om, hvordan sinus er defineret ud fra enhedscirklen til at kontrollere dine grafiske aflæsninger. Husk at x regnes i radianer!

Opgave 129

Tegn grafen for en mulig funktion f på intervallet $]-5,8[$, på en sådan måde, at f har nulpunkter i $x = -2$ og $x = 7$ med lokale maksima i $x = 1$ og $x = 5$ samt lokalt minimum i $x = 3$.

Opgave 130

Tegn med dit CAS-værktøj grafen for $f(x)=x^3-4x-15$, $x\in[-4,4]$.

a) Bestem ved visuel inspektion de lokale ekstrema. Du får sandsynlighed brug for at kunne zoome ind for at få en rimelig nøjagtig aflæsning.

b) Bestem funktionens nulpunkter.

Lad der være givet en ekstra funktion: $g(x)=-4x+3$, $x\in[-4,4]$.

c) Løs ligningen $f(x)=g(x)$.

d) Tegn graferne for f og g i samme koordinatsystem.

e) Løs uligheden $f(x)\le g(x)$ grafisk.

1.5 Operationer på funktioner

Opgave 131

Bestem i hvert tilfælde nedenfor manuelt forskrifterne for hver af de sammensatte funktioner $f\circ g$ og $g\circ f$. Hvad er definitionsmængderne? Som kontrol kan du bagefter bruge dit CAS-værktøj til at beregne forskrifterne.

a) $f(x)=\sqrt{x}$ og $g(x)=x^2+7$

b) $f(x)=2x+8$ og $g(x)=-x+10$

c) $f(x)=\sin(x)$ og $g(x)=x+e^x$

d) $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$ og $g(x)=x^2$

Opgave 132

Nedenstående funktion h kan opfattes som sammensætning af to funktioner f og g. Hvilke? Bemærk, at der kan være flere svar her. Som regel er der dog et oplagt svar.

a) $h(x)=e^{2x}$

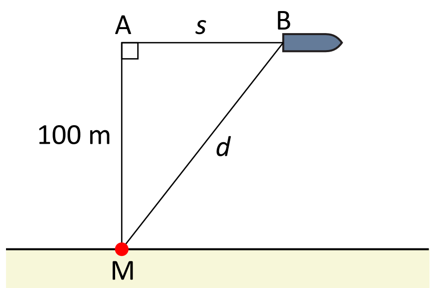
b) $h(x)=\sqrt{4-x^2}$, $x\in[-2,2]$

c) $h(x)=(x-6)^8$

d) $h(x)=\dfrac{1}{\sin(x)}$, $x\in\,]-\pi,\pi[$

Opgave 133 (Sammensat funktion)

Et skib sejler langs med stranden, hvor en mand M står stille. Skibet starter i punktet A lige ud for manden i afstanden 100 m fra stranden. Skibets tilbagelagte strækning fra A kalder vi s, og skibets direkte afstand til manden med d.



a) Bestem et udtryk for d som funktion af s.

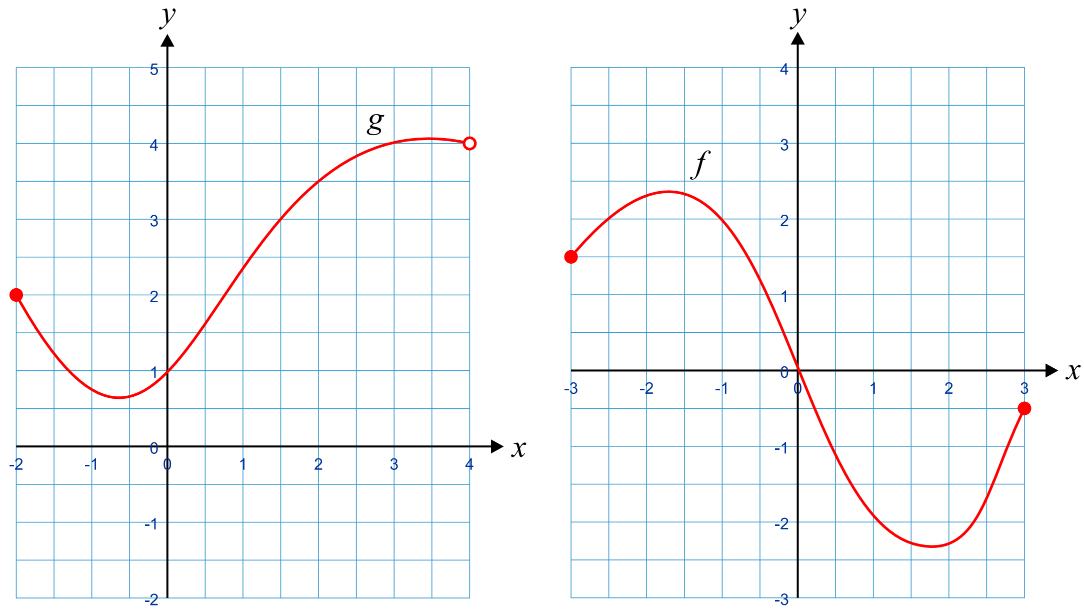
Det oplyses nu, at skibet sejler med den konstante hastighed 5 m/s.

b) Bestem et udtryk for d som funktion af tiden t ved at tænke på sammensat funktion.

Opgave 134

Figuren viser graferne for to funktioner f og g. Bestem grafisk følgende funktionsværdier for visse sammensatte funktioner:

a) $(g \circ f)(-1)$ b) $(f \circ g)(1{,}5)$ c) $(f \circ f)(-1)$



Opgave 135

Bestem for hvert af nedenstående funktioner den inverse funktion. Husk at angive definitionsmængde.

a) $f(x) = 3x - 1$ b) $f(x) = \dfrac{1}{x} + 6\,,\ x \neq 0$ c) $f(x) = 2x^3$

d) $f(x) = x^2 + 5$ e) $f(x) = e^x$ f) $f(x) = \sqrt{x-8}\,,\ x \in [8, \infty[$

Opgave 136

Betragt funktionen $f(x) = \sin(x)$.

a) Tegn grafen og redegør med ord for, hvorfor funktionen ikke er injektiv og derfor ikke har en invers funktion.

b) Redegør ved inspektion af grafen for, at hvis man reducerer definitionsmængden til intervallet $[-\pi, \pi]$, så er sinus-funktionen injektiv.

Den inverse funktion til $f(x) = \sin(x),\ x \in [-\pi, \pi]$ kaldes for $\arcsin(x)$.

c) Bestem definitionsmængden for $\arcsin(x)$. *Hjælp*: Husk at når man går fra en funktion til dens inverse, så skifter definitionsmængde og værdimængde rolle!

d) Tegn grafen for $\arcsin(x)$ i det interval, du har bestemt under c).

e) Tegn graferne for både $\sin(x)$ og $\arcsin(x)$ i samme koordinatsystem. Stemmer det, at graferne er hinandens spejlede i linjen $y = x$?

NB! Undertiden (fx på lommeregnere) kaldes den inverse funktion ofte $\sin^{-1}(x)$.

Opgave 137

Betragt den velkendte renteformel $K = K_0 \cdot (1+r)^n$, hvor K_0 er startbeløbet, r er renten, n er antal terminer og K er slutbeløbet. Man kan betragte K som en funktion af r - hvor de øvrige størrelser tænkes som konstanter. Bestem da et udtryk for den inverse funktion, som er renten r som funktion af slutbeløbet.

Opgave 138

Som bekendt er $\log(x)$ og 10^x hinandens omvendte funktioner.

a) Angiv definitionsmængden og værdimængden for hver af de to funktioner.
b) Tegn deres grafer i samme koordinatsystem.
c) Hvad er $\log(1000)$ lig med? *Hjælp*: Skriv 1000 som 10^3.

Opgave 139*

Som bekendt foretager grafen for $f(x) = \sin(x)$ svingninger omkring x-aksen. I det følgende skal du bruge nogle af de operationer, som er behandlet i dette afsnit, til at skabe en ny funktion g, hvis graf opfylder noget bestemt.

a) Grafen for g skal have dobbelt så store udsving som grafen for f.
b) Grafen for g skal have større og større udsving, jo større x er.
c) Grafen for g skal svinge halvt så mange svingninger på det samme interval i forhold til grafen for f. *Hjælp*: Tænk på en passende sammensat funktion.
d) Grafen for skal svinge omkring grafen for den lineære funktion $f(x) = 0{,}6x + 2$.

Opgave 140*

Lad $f(x) = x^3 - x$. Lad dernæst g være den funktion, som fremkommer ved at udskifte x med $x-3$, dvs. $g(x) = f(x-3)$.

a) Redegør for, at g er en sammensat funktion.
b) Tegn graferne for f og g i området $-3 \le x \le 6$ og $-10 \le y \le 10$ i samme koordinatsystem.
c) Hvilke erfaringer drager du af graferne? Forsøg at generalisere resultatet og at forklare, hvorfor din påstand mon gælder.

1.6 Grænseværdi og kontinuitet

Opgave 141

Benyt dit CAS-værktøj til at bestemme grænseværdierne for følgende talfølger:

a) $\left\{ \dfrac{\sqrt{n}}{n+2} \right\}_{n \in N}$ b) $\left\{ \dfrac{n^2}{2^n} \right\}_{n \in N}$ c) $\left\{ \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \right\}_{n \in N}$ d) $\left\{ \dfrac{1-2n^2}{1+n^2} \right\}_{n \in N}$

Opgave 142* (Grænseværdier for talfølger)

I denne opgave skal vi beskæftige os med præcise definitioner af grænseværdier for talfølger. I afsnit 1.6 fik vi gennem et par eksempler gjort rede for, at det måske ikke er helt selvindlysende, hvordan grænseværdier skal defineres. Lad os starte med at definere, hvad det vil sige, at en talfølge går mod uendelig.

Definition 1

En talfølge $\{a_n\}_{n\in N}$ siges at gå mod uendelig, og vi skriver $a_n \to \infty$ for $n \to \infty$, såfremt der for ethvert vilkårligt valgt tal *T* findes et tal N_T, så: $n > N_T \;\Rightarrow\; a_n > T$.

Sagt på en mere sproglig måde, så skal følgende altså være opfyldt: Ligegyldigt hvor stort et tal *T*, man måtte nævne, så skal tallene i talfølgen være større end dette tal fra et vist trin af. Lad os sige, at man nævner tallet $T = 10000$. Så kan det være, at man skal op på $N_T = 300$, før alle tal i følgen er større end 10000, dvs. så $a_{300} > 10000$, $a_{301} > 10000$, etc. Hvis man nævner tallet $T = 20000$, kan det være, at man skal op på $N_T = 550$ før alle tal i følgen er større end 20000, dvs. så $a_{550} > 20000$, $a_{551} > 20000$, etc. Uanset hvilket tal, man måtte nævne, skal man kunne finde et trin, hvor elementerne i følgen er større end den angivne værdi. Trinnet vil afhænge af *T*, derfor er *T* brugt som indeks i N_T. En tilsvarende definition vil gælde for talfølger, der går mod minus uendelig $(-\infty)$.

Eksempel: For at vise, at $a_n = \sqrt{n+1} \to \infty$ for $n \to \infty$, kan vi starte med højresiden af implikationen i definition 1: $a_n > T \;\Leftrightarrow\; \sqrt{n+1} > T \;\Leftrightarrow\; n+1 > T^2 \;\Leftrightarrow\; n > T^2 - 1$. Som N_T kan vi dermed bruge $N_T = T^2 - 1$ (For negative *T*, som egentligt er uinteressant, kan $N_T = 0$ bruges). Denne gang var det let at vise, andre gange er det sværere.

a) Argumenter for, at $\frac{1}{2}n + 4 \to \infty$ for $n \to \infty$.

Definition 2

En talfølge $\{a_n\}_{n\in N}$ siges at *konvergere* mod et tal *a*, og vi skriver $a_n \to a$ for $n \to \infty$, såfremt der for ethvert $\varepsilon > 0$ findes et tal N_ε, så: $n > N_\varepsilon \;\Rightarrow\; |a_n - a| \le \varepsilon$.

ε er det græske bogstav epsilon. Definition 2 kan sprogligt udtrykkes således: Ligegyldigt hvor lille tal ε, man vælger, så skal alle tallene i talfølgen fra et vist trin af have en afstand fra *a*, som er højst ε. Bemærk at $|a_n - a| \le \varepsilon$ alternativt kan skrives $a - \varepsilon \le a_n \le a + \varepsilon$. Jo mindre ε der vælges, dvs. jo mindre afstand man ønsker mellem a_n og *a*, jo længere skal man normalt ud i følgen, for at dette er opfyldt. Derfor afhænger N_ε normalt af ε, hvorfor vi har sat indekset ε på. En talfølge, som konvergerer mod et tal kaldes *konvergent*. Alle andre talfølger kaldes *divergente*. Går talfølgens elementer mod ∞, kaldes talfølgen også divergent.

Eksempel: Vi vil vise, at (8) fra afsnit 1.6 faktisk konvergerer med 1, altså at:

$$1 + \frac{3\cdot\sin(n)}{4n} \;\to\; 1 \quad \text{for} \quad n \to \infty$$

Lad os regne på forskellen mellem det *n*'te led i talfølgen og den påståede grænse:

$$|a_n - a| = \left|1 + \frac{3\cdot\sin(n)}{4n} - 1\right| = \left|\frac{3\cdot\sin(n)}{4n}\right| = \frac{3\cdot|\sin(n)|}{4\cdot n} \le \frac{3}{4n}$$

Hvis højresiden her er $\le \varepsilon$, har vi som ønsket $|a_n - a| \le \varepsilon$:

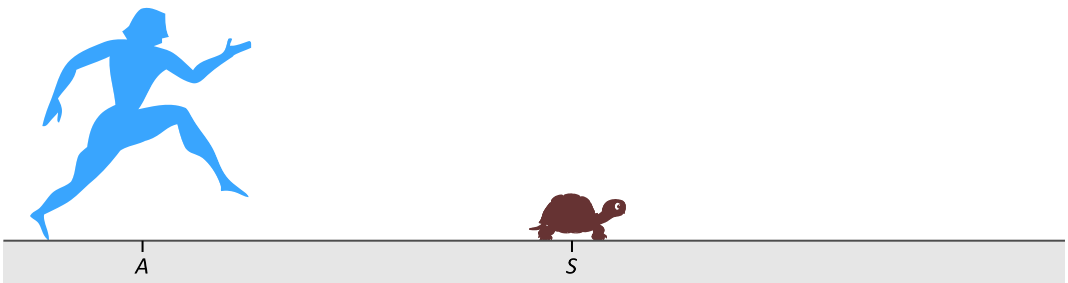
$$\frac{3}{4n} \le \varepsilon \;\Leftrightarrow\; 3 \le 4n\cdot\varepsilon \;\Leftrightarrow\; \frac{3}{4\varepsilon} \le n$$

Dermed kan vi bruge $N_\varepsilon = 3/(4\varepsilon)$ og det er vist, at talfølgen har grænseværdien 1.

b) Argumenter for at $a_n = \dfrac{2n+1}{n} \to 2$ for $n \to \infty$.

Opgave 143 (Zenons paradoks: Achilleus og skildpadden)

I den græske mytologi er Achilleus en helt, som deltager i et togt til Troja, beskrevet i Homers *Iliaden*, som man kan stifte bekendtskab med i faget oldtidskundskab i gymnasiet. Filosoffen *Zenon fra Alea* (ca. 490-430 f. Kr.) beskrev fire paradokser. Det ene af dem handler om, at Achilleus løber om kap med en skildpadde. Achilleus hastighed er 10 gange så stor som skildpaddens, men han starter 100 meter bag skildpadden. Argumentationen består i at overbevise læseren om at Achilleus aldrig vil nå skildpadden. Forklaringen går som følger: Når Achilleus er nået frem til skildpaddens tidligere position, er skildpadden nået $\frac{1}{10}\cdot 100 = 10$ meter længere frem. Når Achilleus herefter er nået frem til skildpaddens nye, men tidligere position, er skildpadden nået $\frac{1}{10}\cdot 10 = 1$ meter længere frem. Sådan fortsætter det. Hver gang Achilleus er kommet frem til skildpaddens nyeste tidligere position er skildpadden nået lidt længere frem …



a) Bevægelsen er delt op i uendeligt mange trin. I hvert trin når Achilleus et stykke frem. Når man lægger bidraget fra alle disse trin sammen, får man en uendelig række, som er Achilleus totale tilbagelagte strækning. Hvordan ser leddene i rækken ud?

b) Argumenter for at rækken er konvergent og hvad dens værdi er.

c) Forsøg at gennemskue fejlen i argumentationen: Hvorfor viser argumentationen ikke, at Achilleus aldrig vil nå skildpadden? *Hjælp*: Tænk på den samlede tid, der forløber i rækken af trin i argumentationen. Er tiden endelig eller uendelig?

Opgave 144

Benyt dit CAS-værktøj til at bestemme summen af den konvergente række $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$.

Opgave 145* (Kvotientrækker)

En *kvotientrække* er en række, hvor forholdet mellem et led og det forrige altid er et fast tal. Eller sagt på en anden måde: Hver gang man går fra et led til det næste, ganger man med et bestemt tal. Lad os kalde dette tal for q. Dermed ser en kvotientrække således ud:

$$a+a\cdot q+a\cdot q^2+a\cdot q^3+\ldots \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} a\cdot q^n \;=\; a\cdot\sum_{n=0}^{\infty} q^n$$

hvor a er startleddet. I det følgende ledes du frem til at vise, at rækken under visse betingelser er konvergent og hvad summen i så fald er.

a) Vis at $(x-1)\cdot(1+x+\ldots x^{n-1}+x^n)=x^{n+1}-1$.

b) Benyt a) til at konkludere, at $a+a\cdot q+a\cdot q^2+\ldots+a\cdot q^n \;=\; a\cdot\left(\dfrac{q^n-1}{q-1}\right)$.

c) Benyt b) til at argumentere for, at hvis $|q|<1$, så er kvotientrækken konvergent med summen $a\cdot\dfrac{1}{1-q}$.

d) Benyt resultatet til at summen af kvotientrækken $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^n \;=\; 1+\frac{5}{6}+\left(\frac{5}{6}\right)^2+\left(\frac{5}{6}\right)^3+\ldots$

e) Kontroller resultatet i d) med dit CAS-værktøj.

f) Hvis du har løst opgave 144 med Zenons paradoks: Gør rede for, at den række, der er i spil der, netop er en kvotientrække. Hvad er a og q i den forbindelse?

Opgave 146*

Denne opgave er mere teknisk svær end matematisk svær. Du skal have styr på nogle ting i dit CAS-værktøj, såsom hvordan man får det til at regne med mange cifre, og hvordan man får det til at regne med kommatal og ikke eksakte svar.

I afsnit 1.6 kiggede vi på en uendelige række, hvis sum var $\pi^2/6$:

(formel 1)
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \;=\; \frac{\pi^2}{6}$$

Det blev nævn, at denne formel kan benyttes til at bestemme tallet π med mange decimaler. Der findes mange andre uendelige rækker, som også kan bruges til dette formål. En af dem er *Machins formel*:

(formel 2)
$$\begin{aligned}\frac{\pi}{4} &= 4\cdot\arctan\left(\tfrac{1}{5}\right)-\arctan\left(\tfrac{1}{239}\right)\\ &= 4\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\cdot\left(\tfrac{1}{5}\right)^{2n+1}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\cdot\left(\tfrac{1}{239}\right)^{2n+1}\end{aligned}$$

En tredje formel, vi vil nævne, er følgende:

(formel 3)
$$\frac{1}{\pi} \;=\; \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(4n)!(1103+26390n)}{(n!)^4\cdot 396^{4n}}$$

For at få en idé om, hvordan leddene i rækken ser ud, kan det være en god idé at indsætte nogle af de første værdier for n. Udråbstegnet ! i matematik betyder fakultet. For eksempel er $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$.

a) Isoler π i hver af de tre formler.

For at se, hvor hurtig de omskrevne rækker konvergerer mod π, skal du i det herefter kun udregne rækken op til og med $n = N$, hvor N er et givet tal.

b) I det følgende skal du lade dit CAS-værktøj regne med 1000 cifre. Benyt herefter værktøjet til at bestemme en approksimeret (tilnærmet) værdi for π ved brug af formel 1, idet du medtager 1000 led, dvs. $N = 1000$. Hvor stor er afvigelsen i forhold til den rigtige værdi for π?
c) Denne gang betragtes formel 2. Igen skal du lade dit værktøj regne med 1000 cifre. Medtag denne gang kun 101 led, dvs. lad $N = 100$. Bestem igen afvigelsen i forhold til π.
d) Gentag punkt c) på formel 3.
e) Hvilken formel konvergerer hurtigst?

Formel 3 har en interessant historie. Den fantastiske formel skyldes nemlig inderen *Srinivasa Ramanujan* (1887-1920). Han blev født i en lille by ca. 400 km sydvest for byen Madras i det sydlige Indien af fattige forældre. Han viste tidligt et helt ekstraordinært talent for matematik. Da han var 12 år gammel mestrede han indholdet af S. L. Loney's omfattende bog *Plane Trigonometry*, der blandt andet indeholder diskussion af uendelige summer og produkter - et emne, der senere skulle spille en stor rolle i Ramanujans arbejder. Da han i en alder af ca. 15 år kom i besiddelse af en matematikbog af G. S. Carr med titlen *Synopsis of elementary results in pure mathematics*, tog tingene fart. Ramanujan fordybede sig på egen hånd i bogens mange formler og sætninger. Uheldigvis, kan man sige, tilegnede Ramanujan sig bogens stil, som var meget kortfattet, dvs. med enten fraværende eller meget korte beviser for bogens formler og sætninger. Det betød, at da det matematiske geni selv begyndte at udtænke formler og sætninger, så forklarede han ikke, hvordan han var kommet frem til dem. For at gøre en lang historie kort, så kom han heldigvis i forbindelse med indflydelsesrige personer, som kunne se det matematiske geni i Ramanujan på trods af, at han slet ikke havde nogen universitetsmæssig uddannelse. Han blev hjulpet og opfordret til at sende nogle af hans arbejder til England. Efter nogle breve, som ikke førte noget med sig, skrev han til *G. H. Hardy*, Englands på den tid største matematiker. Her skal man huske på, at mange håbefulde amatører igennem tiderne har sendt breve til universiteterne i håbet om berømmelse. Derfor var det også med et vist forbehold, at Hardy og hans nære kollega *Littlewood* satte sig ned for at kigge på de 120 formler i brevet den 16. januar 1913. Efter nogle timer var de kommet til en konklusion: de havde at gøre med et geni og ikke en skør amatørmatematiker. Nogle af formlerne tog helt pusten fra dem, og som Hardy siden fortalte: "De må være sande, fordi hvis de ikke var det, ville ingen være i stand til at opfinde dem". Det blev ordnet sådan, at Ramanujan, på trods af krigen (1. Verdenskrig) kom til Cambridge. Her arbejdede han sammen med de to englændere i 5 år på Trinity College. Samarbejdet blev uhyre frugtbart, idet man kunne forene Hardys ekspertise og systematik med Ramanujans intuition. Desværre døde Ramanujan, der led af dårligt helbred, i 1920. Det blev diagnostiseret som tuberkulose, men som man i dag mener i virkeligheden kan have været vitaminmangel. Legenden om alle tiders største talmystiker lever dog videre. Den interesserede læser opfordres til at læse mere om ham på Internettet eller læse den fremragende bog af Robert Kanigel: *The Man Who Knew Infinity – A Life of the Genius Ramanujan*. Washington Square Press, 1991. Der er endda lavet en film om ham, også med titlen: *The Man Who Knew Infinity*.

□

Opgave 147

Den uendelige række $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ er divergent. Hermed menes, at afsnitsrækken opfylder:

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \to \infty \quad \text{for} \quad N \to \infty$$

Afsnitssummen vil altså blive vilkårlig stor, bare man medtager nok led i rækken. Vi skal ikke vise denne påstand teoretisk her. Prøv dog med et CAS-værktøj at udregne:

a) $\sum_{n=1}^{1000} \frac{1}{n}$ b) $\sum_{n=1}^{1000000} \frac{1}{n}$

NB! Det kan være, at du skal anbringe et punktum efter 1-tallet i tælleren for at få maskinen til at regne eksakt! Ellers kan det være, at du får et eksakt, men ubrugeligt output. Den uendelige række divergerer i øvrigt meget langsomt mod uendelig.

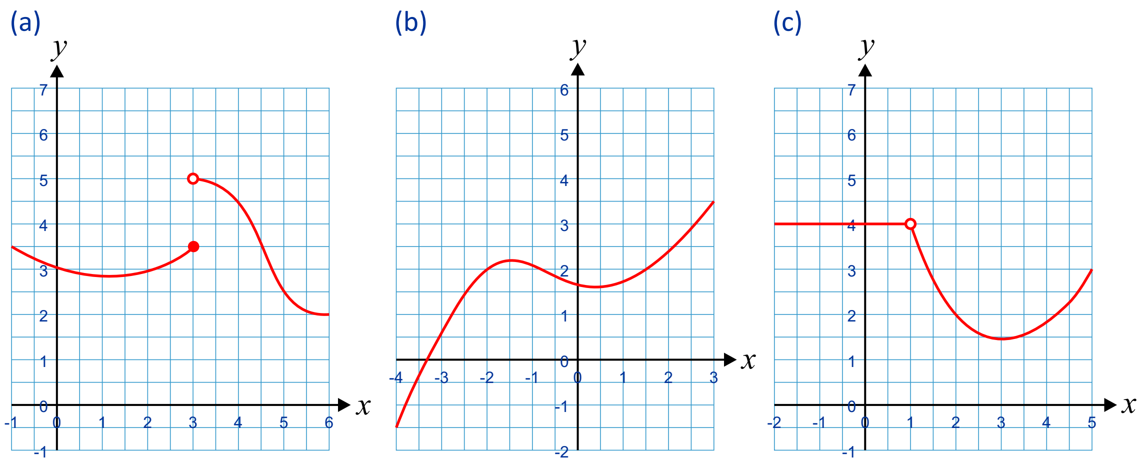
Opgave 148

Betragt funktionerne med graferne nedenfor.

a) Har funktionen svarende til grafen i (a) en grænseværdi for $x \to 3$? I så fald hvilken?

b) Har funktionen svarende til grafen i (b) en grænseværdi for $x \to -2$? I så fald hvilken?

c) Har funktionen svarende til grafen i (c) en grænseværdi for $x \to 1$? I så fald hvilken?



Opgave 149

Benyt et CAS-værktøj til at bestemme grænseværdierne nedenfor. Det kan være et værktøj/kommando indeholdende ordet "lim".

a) $\lim\limits_{x \to 4} 2x+5$ b) $\lim\limits_{x \to 10} \dfrac{1}{x-5}$ c) $\lim\limits_{x \to 7} \sqrt{2x-5}$

Disse kunne også være klaret manuelt ved at udnytte kontinuiteten af de indgående funktioner. Hvordan?

Opgave 150

Bestem nedenstående grænseværdier med et CAS-værktøj.

a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2x-2}{x^2-x}$ b) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{3x}{\sqrt{x}}$ c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x)}{x}$

Hvis man forsøger at bestemme grænseværdierne manuelt, indser man for det første, at man ikke bare kan indsætte det tal x nærmer sig til, for i alle tre tilfælde vil både tæller og nævner give 0. I a) og b) kan man dog reducere tæller og nævner *før* man tager grænseværdien. Reduktionen foregår ved først at *faktorisere* tæller og nævner. Prøv det. Den sidste grænse er noget sværere, så her skal du ikke forsøge dig.

Opgave 151

Brug dit CAS-værktøj til at tegne graferne for forskellige funktioner, hvis forskrifter du selv finder på – ved at kombinere forskellige af de grundlæggende funktioner, som vi har til rådighed: $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\tan(x)$, e^x, a^x, $\log(x)$, $\ln(x)$, $\sqrt{x}$, $\sqrt[n]{x}$, x^a samt polynomier. Benyt i den forbindelse nogle af de operationer på funktioner, vi studerede i afsnit 1.5, herunder også sammensat funktion. Prøv også at designe nogle funktioner, som ikke er defineret i hele *R*. *Hjælp*: Tænk for eksempel på, at nævnere ikke må være 0, indholdet under kvadratrodstegnet ikke må være negativ, man ikke kan tage logaritmen til et negativt tal, etc.

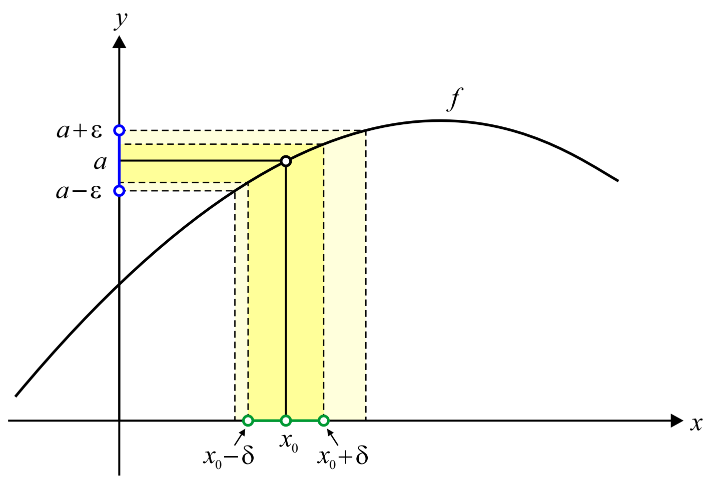
Opgave 153*

Denne opgave hører til de mere teknisk svære og er derfor henvendt til de mere avancerede læsere. Vi skal kigge på en præcis definition af, hvad det vil sige, at en funktion f har en grænseværdi a for x gående mod x_0. I afsnit 1.6 er givet en noget løs og intuitiv indføring i begrebet. I langt overvejende grad er det da også tilstrækkelig til vore formål i denne bog. For den avancerede læser kan det imidlertid være interessant at se, hvordan man indfører begrebet helt eksakt. Man kunne måske tro, at begrebet giver sig selv, at det er indlysende. Ligesom vi så det med konvergens af talfølger i opgave 142, så er det imidlertid ikke tilfældet. Der findes så mange forskellige funktioner, og begrebet skal kunne håndtere dem alle. Definitionen nedenfor er den, som historisk udkrystalliserede sig som den fornuftige, forstået på den måde, at den som oftest stemmer med den intuitive fornemmelse for grænseværdi, men også sådan, at man får den vigtige sætning 1.28 med regneregler for grænseværdier til rådighed. Begrebet skal give mening. Vi antager, at f er en reel funktion, defineret i et lille åbent interval omkring x_0, hvor punktet x_0 selv ikke behøver at være med i definitionsmængden.

Definition

En funktion f siges at gå mod a for x gående imod x_0, når der for *ethvert* tal $\varepsilon > 0$ findes et tal $\delta > 0$, så der gælder: $0 < |x - x_0| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - a| < \varepsilon$.

Det kan se noget komplekst ud. Dobbeltuligheden $0 < |x - x_0| < \delta$ udtrykker for det første, at x ikke må være lig med x_0 (venstre ulighedstegn). For det andet fortæller det højre ulighedstegn, at den numeriske afstand mellem x og x_0 skal være mindre end δ. Sagt på en anden måde, så skal $x \in \left]x_0 - \delta, x_0 + \delta\right[\setminus \{x_0\}$. Mængden kaldes undertiden for en *udprikket omegn om* x_0. På tilsvarende vis udtrykker uligheden $|f(x) - a| < \varepsilon$, at den numeriske afstand mellem $f(x)$ og a skal være mindre end ε, hvilket er det samme som at $f(x) \in \left]a - \varepsilon, a + \varepsilon\right[$. Betragt nu figuren. Betingelsen for at grænseværdien eksisterer og er a er altså, at ligegyldigt hvor lille et interval $\left]a - \varepsilon, a + \varepsilon\right[$, man vælger omkring a, så skal der findes en udprikket omegn omkring x_0, så alle x-værdier heri har funktionsværdier i $\left]a - \varepsilon, a + \varepsilon\right[$. Alle x-værdierne i den udprikkede omegn vist med grønt på figurens x-aksen skal altså afbildes i det lille åbne blå interval på y-aksen.



Når man vælger et mindre interval omkring a på y-aksen, vil man som oftest også skulle vælge en mindre udprikket omegn omkring x_0. Derfor afhænger δ af valg af ε. Grunden til, at det er en udprikket omegn på x-aksen, dvs. at x_0 ikke er med, er, at der i definitionen jo ikke stilles noget krav om, hvad funktionsværdien er i selve x_0, endsige at f overhovedet er defineret i dette punkt! En anden ting: Som man kan se af definitionen kræves det, at f er defineret i et nok så lille åbent interval omkring x_0, fraregnet x_0. Hvis x_0 er et venstre endepunkt i definitionsmængden for f, kan man dog definere en grænseværdi for x gående imod x_0 fra højre (man skriver $x \to x_0^+$). I det tilfælde kræves, at f er defineret i et lille åbent interval umiddelbart til højre for x_0. Tilsvarende hvis x_0 er et højre endepunkt i definitionsmængden.

Eksempel

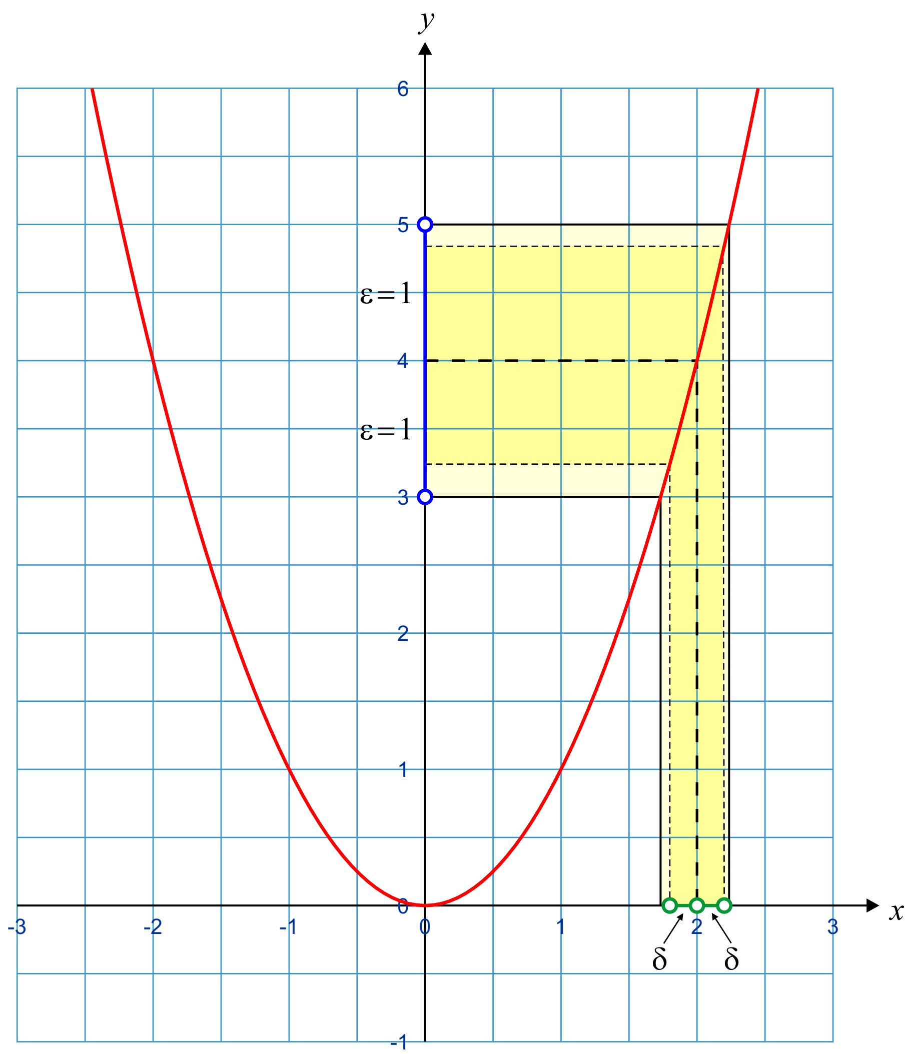
Det er på tide med et eksempel, hvor vi ser definitionen for grænseværdi anvendt i praksis. Vi betragter funktionen $f(x) = x^2$ og ønsker at vise, at $f(x) \to 4$ for $x \to 2$. Dermed vil vi faktisk samtidigt have vist, at *f* endda er kontinuert i $x_0 = 2$.

Vi skal vise, at for *ethvert* $\varepsilon > 0$ findes der et $\delta > 0$, så:

(k1) $$0 < |x-2| < \delta \quad \Rightarrow \quad |x^2 - 4| < \varepsilon$$

Opgaven er at bestemme et δ, som får højresiden til at være opfyldt. Det er en yderst vigtig erkendelse, at hvis (1) er opfyldt for en bestemt værdi af δ, så er den også sand for alle andre *mindre* (positive) værdier af δ. Lad os derfor vedtage med os selv, at vi kun vil lede efter værdier af δ, som er mindre end 1. Det betyder, at vi har $|x-2| < 1$. Dermed må $1 < x < 3$ og heraf $|x+2| < 5$. Vi skal nu se, hvorfor sidstnævnte ulighed er interessant. Vi benytter nemlig en kvadratsætning: $x^2 - 4 = (x+2)(x-2)$, hvoraf:

(k2) $$|x^2 - 4| \;=\; |x+2| \cdot |x-2| \quad < \; 5 \cdot |x-2|$$



Ved at indskrænke vores søgeområde for et brugbart δ, fik vi en vurdering på den faktor, som vi fra begyndelsen ikke kunne sige noget om, nemlig $|x+2|$. Nu ved vi, at udtrykket er mindre end 5. Hvis vi derfor vælger $\delta = \min(1, \varepsilon/5)$, altså det mindste af tallene 1 og $\frac{1}{5}\varepsilon$, så kan vi vurdere videre på (2):

(k3) $$\left|x^2-4\right| = \left|x+2\right|\cdot\left|x-2\right| < 5\cdot\left|x-2\right| < 5\cdot\tfrac{1}{5}\varepsilon = \varepsilon$$

Dermed lykkedes det os at finde et δ, som fik den numeriske forskel mellem x^2 og 4 ned under ε. Det ønskede er vist. Du kan se en illustration for et valg af ε på næste side.

□

Det er ofte ad hoc metoder, der må tages i brug, når man skal finde et brugbart δ. Nu skal du selv prøve i et konkret tilfælde.

a) Lad $f(x) = \frac{1}{2}x + 4$. Vis ud fra definition A1, at $f(x) \to 7$ for $x \to 6$, dvs. givet et vilkårligt ε, skal du finde et brugbart δ.

1.7 Asymptoter

Opgave 152

Lad $f(x) = \dfrac{1}{x} + 3\,,\ \ x \neq 0$.

Tegn grafen og giv et bud på hvilken slags asymptoter grafen har. Angiv deres ligninger. Kan du også argumentere for rigtigheden direkte, dvs. uden at tegne grafen? *Hjælp*: Brug metoden fra eksempel 1.35.

Opgave 153

Hvilke asymptoter har graferne for de to funktioner fra eksempel 1.10?

Opgave 154

Betragt den logistiske vækst givet ved $f(x) = \dfrac{5}{1+4\cdot e^{-2{,}1x}}$.

Tegn grafen og giv et bud på hvilken slags asymptoter grafen har. Angiv deres ligninger. Kan du også argumentere for rigtigheden direkte, dvs. uden at tegne grafen? *Hjælp*: Brug metoden fra eksempel 1.36.

Opgave 155

Hvis man har at gøre med en såkaldt *polynomiumsbrøk*, dvs. en brøk, hvor der er et polynomium i både tæller og nævner, så kan man lave et trick for at afgøre, om grafen for funktionen evt. har en vandret asymptote. Vi ser på et eksempel:

$$f(x) = \frac{2x^2-6x+5}{x^2+3} = \frac{1/x^2\cdot(2x^2-6x+5)}{1/x^2\cdot(x^2+3)} = \frac{2+\dfrac{6}{x}+\dfrac{5}{x^2}}{1+\dfrac{3}{x^2}} \to \frac{2}{1} = 2 \ \text{ for } \ x \to \infty$$

Andet lighedstegn: Der er *forkortet* med x^2. Tredje lighedstegn: Der er ganget ind i parentesen. Herefter ses det, at når x bliver stor bliver leddene $-6/x$, $5/x^2$ og $3/x^2$ alle små, så hele brøken går mod $2/1=2$ for $x \to \infty$. Derfor konkluderer vi, at $y=2$ er vandret asymptote. Benyt samme teknik på følgende funktioner til at bestemme eventuelle vandrette asymptoter:

a) $f(x)=\dfrac{4x^2-x+1}{x^2+5x+12}$ b) $f(x)=\dfrac{3x^2-x+1}{x^3-x^2+7}$ c) $f(x)=\dfrac{x^3-4}{x^2+x}$

Opgave 156

Hvilken funktion går hurtigst mod uendelig for $x \to \infty$: $f(x)=x^{10}$ eller $g(x)=10^x$?
Hjælp: Du kan eventuelt se på grænseværdien for brøken mellem de to funktioner for x gående imod uendelig.

Opgave 157

Lad $f(x)=\dfrac{1}{x^2-4}$. Funktionens graf har tre asymptoter. Hvilke?
Hjælp: Du kan give et bud på det ved at iagttage grafen, eller finere: argumentere for det logisk set. For at opdage de lodrette asymptoter: Brug en kvadratsætning til at omskrive nævneren.

2.1 Andengradspolynomier

Opgave 201

Benyt *GeoGebra* eller et andet CAS-værktøj til at få lavet en interaktiv graf for funktionen $f(x)=a\cdot x^2+b\cdot x+c$, hvor du kan variere koefficienterne a, b og c med skydere. Sæt startværdierne for a, b og c til henholdsvis 1, 0 og 0. Du kan fx vælge følgende: At tegne grafen i vinduet givet ved $-50 \le x \le 50, -50 \le y \le 50$ og lade a variere mellem –5 og 5, b mellem –20 og 20 og c mellem –40 og 40. Du bør også sikre dig, at en enhed fylder lige meget på 1. aksen og 2. aksen.

a) Start med at variere c. Hvilken betydning har værdien af c på parablens beliggenhed? Kan du forklare det teoretisk?
b) Varier nu a. Hvilken betydning har koefficienten a for parablens udseende og hvordan parablen vender?
c) Varier til sidst b. Betydningen af denne koefficient er lidt mere kompliceret, men forsøg at sige et eller andet. Hold evt. c konstant 0 her.
d) Tilføj grafen for funktionen $g(x)=b\cdot x+c$ i samme vindue. Varier derefter b. Hvad observerer du?

Vi vil undersøge og gøre rede for nogle af de egenskaber i hovedteksten, som du kan observere her.

Opgave 202

Angiv koefficienterne *a*, *b* og *c* for nedenstående andengradspolynomier:

a) $2x^2 - 10x + 6$ b) $-x^2 - 5 - 10$ c) $0.5x^2 + 14x - 120$ d) $x^2 - 1$

e) $-5x^2 + 16x - 1$ f) $8x^2 - 8x$ g) $-x^2 + 2x + 5$ h) $5x^2$

Opgave 203

Sætning 2.3 om parallelforskydning af grafer gælder for alle funktioner. Parallelforskyd grafen for nedenstående funktioner med den angivne vektor. Angiv forskriften hørende til den parallelforskudte graf. Tegn begge grafer i samme koordinatsystem i et passende vindue. Overvej definitionsmængderne og værdimængderne. NB! Når man plotter, kan det undertiden være fornuftigt at sikre samme skalering på akserne, så graferne ikke forvrænges!

a) $f(x) = -\frac{1}{2}x + 2$. Parallelforskydningsvektor: (3,0). Vindue: Standard fra –10 til 10.

b) $f(x) = \frac{1}{4}x^2$. Parallelforskydningsvektor: (5,2). Vindue: $-10 \le x \le 15,\ 0 \le y \le 20$.

c) $f(x) = \sqrt{x}$. Parallelforskydningsvektor: (–5,8). Vindue: $-10 \le x \le 15,\ -5 \le y \le 10$.

d) Bestem definitionsmængderne og værdimængderne for de to funktioner fra c), uafhængigt af hvilket vindue, deres grafer er tegnet i. Argumenter!

Opgave 204

Benyt formlerne i sætning 2.6 til at bestemme toppunkterne for parablerne hørende til nedenstående andengradspolynomier.

a) $x^2 - 4x + 5$ b) $x^2 - 3x + 3$ c) $3x^2 + 4$ d) $-2x^2 + 6x$

Opgave 205

Benyt formlerne i sætning 2.6 til manuelt at bestemme toppunkterne for parablerne hørende til andengradspolynomier nedenfor.

a) $x^2 - 8x + 1$ b) $3x^2 + 6x - 10$ c) $-2x^2 + 4x - 2$ d) $-x^2 + x - 2$

Opgave 206

Et andengradspolynomium med $a = -1$ har en graf, som skærer *x*-aksen i følgende punkter: $(2,0)$ og $(8,0)$. Bestem alle koefficienterne i polynomiet.

Hjælp: Indsæt oplysningerne i forskriften $f(x) = ax^2 + bx + c$. Derved fås to ligninger med to ubekendte, som kan løses.

Opgave 207

Lad $f(x) = 2x^2 - 4x + c$ være et andengradspolynomium, hvor koefficienten *c* er ukendt. Det oplyses nu, at grafen går gennem punktet (4,12). Bestem *c*.

Opgave 208

Lad $f(x)=\frac{1}{2}x^2+bx+7$ være et andengradspolynomium, hvor koefficienten b er ukendt. Det oplyses nu, at grafen går gennem punktet (–2,15). Bestem b.

2.2 Andengradsligninger

Opgave 209

Benyt sætning 2.10 til at bestemme løsningerne til nedenstående andengradsligninger.

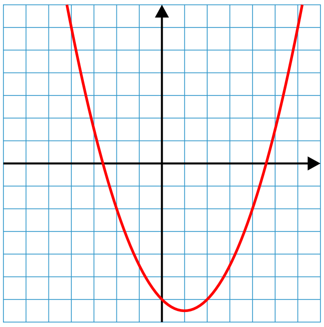
a) $x^2-x-2=0$ b) $x^2+6x+9=0$ c) $2x^2-5x-12=0$ d) $-x^2+4x-8=0$

e) $x^2-7x-30=0$ f) $-x^2+8=0$ g) $x^2-x+3=0$ h) $4x^2-20x+25=0$

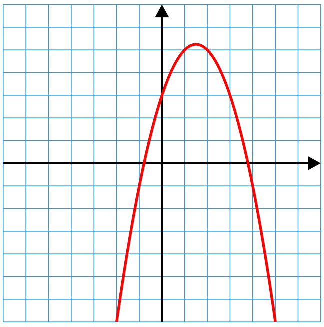
Opgave 210

Bestem fortegnene på koefficienterne a, b og c samt diskriminanten d for de andengrads-polynomier, som har graferne nedenfor. *Hjælp*: Se eksempel 2.15.

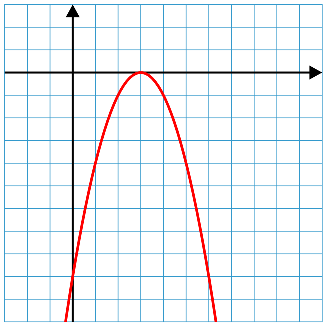
(a)



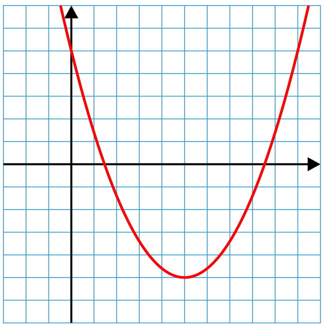
(b)



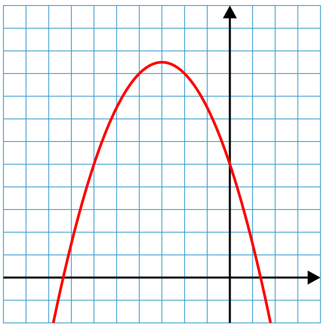
(c)



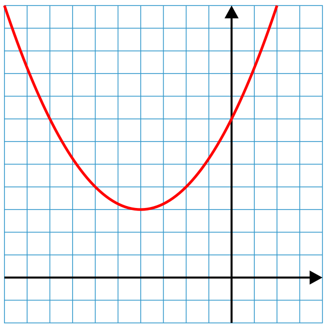
(d)



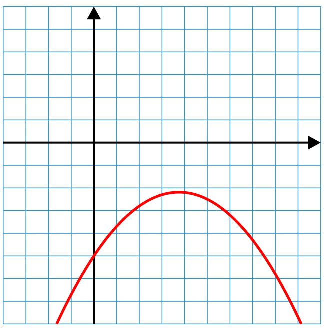
(e)



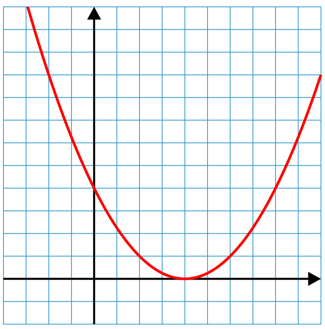
(f)



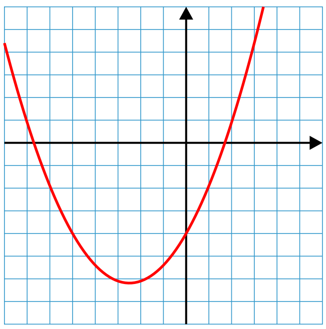
(g)



(h)



(i)



Opgave 211

Benyt sætning 2.10 til at bestemme løsningerne til nedenstående andengradsligninger.

a) $x^2+7=0$ b) $3x^2+5x-2=0$ c) $4x^2-4x+1=0$ d) $x^2-3x-28=0$

Opgave 212

Løs nedenstående andengradsligninger manuelt. Du skal eventuelt først omskrive.

a) $(2x-1)^2=0{,}81$ b) $2x-\dfrac{3}{x}=7$ c) $4x^2+7x=2$ d) $x=\dfrac{8}{x+7}$

Opgave 213

Løs manuelt nedenstående andengradsuligheder. Se evt. eksempel 2.14.

a) $x^2-2x-3\geq 0$ b) $x^2+2x-20<0$ c) $-x^2-3<0$

Opgave 214

Givet andengradspolynomiet $f(x)=-0{,}5x^2+b\cdot x+16$, hvor b er en ukendt parameter (tal), samt den lineære funktion $g(x)=-2x+3{,}5$. Det oplyses, at grafen for f skærer x-aksen i blandt andet $x=4$. Du må gerne bruge CAS-værktøj her.

a) Bestem parameteren b.
b) Bestem skæringspunkterne mellem graferne for f og g.

Opgave 215

Givet $f(x)=0{,}5x^2-2x+7$ og $g(x)=0{,}6x+12$. Benyt et CAS-værktøj i denne opgave.

a) Tegn graferne for andengradspolynomiet og den lineære funktion i samme koordinatsystem. Vælg selv et passende vindue.
b) Beregn koordinaterne til skæringspunkterne mellem de to grafer. Stemmer de med det, du kan aflæse i koordinatsystemet?

Opgave 216

Nedenstående uafhængige opgaver er *parameter*-opgaver, hvor du skal bestemme parameteren, for at noget bestemt er opfyldt. Tænk på sætning 2.10.

a) Lad $2x^2-2x+c=0$ være en andengradsligning, hvor c er en parameter. Bestem c således, at andengradsligningen har netop én løsning.
b) Lad $x^2-4x+c=0$ være en andengradsligning, hvor c er en parameter. Hvad skal c opfylde, for at andengradsligningen har netop to løsninger?
c) Lad $2x^2+bx+8=0$ være en andengradsligning, hvor b er en parameter. Bestem de værdier af b, som betyder, at andengradsligningen har netop én løsning.

Opgave 217*

Løs følgende fjerdegradsligning manuelt: $4x^4 - 45x^2 + 81 = 0$.

Hjælp: Da leddene af første og tredje grad er fraværende, kan man løse ligningen ved hjælp af formlen for løsningerne til en andengradsligning: Substituer først $t = x^2$ i ligningen og løs den andengradsligning i *t*, der opstår. Når du har bestemt *t*-løsningerne, skal du tilbage til *x*-løsningerne! Du må godt bruge en simpel lommeregner til at håndtere de ikke helt små tal.

2.3 Faktorisering af andengradspolynomier

Opgave 218* (Bevis for faktorisering af andengradspolynomium)

I denne opgave skal du forsøge at bevise sætningen om faktorisering af andengradspolynomier fra sætning 2.17.

a) Eftervis, at $a \cdot (x - x_1)(x - x_2) \;=\; a \cdot \left(x^2 - (x_1 + x_2) \cdot x + x_1 \cdot x_2\right)$

I det følgende skal du udnytte udtrykkene for rødderne til andengradspolynomiet fra sætning 2.10 for tilfældet $d > 0$:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{d}}{2a} \quad \wedge \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{d}}{2a}$$

Husk at formlerne egentligt også gælder for tilfældet $d = 0$. Her vil de to rødder blot give det samme (dobbeltrod).

b) Indsæt udtrykkene for x_1 og x_2 i udtrykket $x_1 + x_2$ og vis, at det reducerer til $-b/a$.

c) Indsæt udtrykkene for x_1 og x_2 i udtrykket $x_1 \cdot x_2$ og vis, at det reducerer til c/a.

d) Indsæt endelig de reducerede udtryk for $x_1 + x_2$ og $x_1 \cdot x_2$ i højresiden i ligningen fra spørgsmål a) og vis, at det giver $ax^2 + bx + c$, hvorefter sætningen vil være bevist.

Opgave 219

Bestem manuelt rødderne i nedenstående andengradspolynomier og benyt dem til at *faktorisere* andengradspolynomierne, jf. sætning 2.17.

a) $p(x) = 2x^2 - 11x + 15$ b) $p(x) = x^2 - 6x - 7$

c) $p(x) = x^2 - 6x + 9$ d) $p(x) = -2x^2 - 11x + 6$

Opgave 220

Betragt udtrykket $\dfrac{2x^2 + 9x - 5}{2x + 10}$, $x \neq -5$.

Benyt teknikken fra eksempel 2.18 til manuelt at faktorisere tæller og nævner i brøken. Reducer herefter brøken.

Opgave 221

Benyt dit CAS-værktøj til at faktorisere nedenstående andengradspolynomier. Typisk skal du lede efter et værktøj, som kan hedde noget i retningen af *Factor*.

a) $p(x) = x^2 + 9x - 52$ b) $p(x) = 3x^2 - 31x + 10$

c) $p(x) = x^2 - 7x - 294$ d) $p(x) = -x^2 + 10x - 25$

Opgave 222

Andengradspolynomierne på venstre side i ligningerne nedenfor er allerede faktoriseret. Benyt *nulreglen* til manuelt at løse ligningerne.

a) $(x-2)\cdot(x+5) = 0$ b) $4\cdot(x-1)\cdot(x-1) = 0$

b) $(3x-6)\cdot(x-8) = 0$ d) $(3x-1)\cdot(2x+5) = 0$

2.4 Det generelle polynomium af *n*'te grad

Opgave 223 (Polynomiets division)

Det oplyses, at 2 er rod i polynomiet $p(x) = 2x^3 - 3x^2 - 5x + 6$ fra (10) side 51. Vi skal se, hvordan man med proceduren kaldet *polynomiets division* kan dividere x minus roden, altså $(x-2)$, op i polynomiet – med henblik på at faktorisere.

Trin 1

$$\begin{array}{r l}
2x^3 - 3x^2 - 5x + 6 & : \ (x-2) \ = \ 2x^2 \\
\underline{2x^3 - 4x^2 \phantom{{}-5x+6}} & \\
x^2 - 5x + 6 &
\end{array}$$

Trin 2

$$\begin{array}{r l}
2x^3 - 3x^2 - 5x + 6 & : \ (x-2) \ = \ 2x^2 + x \\
\underline{2x^3 - 4x^2 \phantom{{}-5x+6}} & \\
x^2 - 5x + 6 & \\
\underline{x^2 - 2x \phantom{{}+6}} & \\
-3x + 6 &
\end{array}$$

Trin 3

$$\begin{array}{r l}
2x^3 - 3x^2 - 5x + 6 & : \ (x-2) \ = \ 2x^2 + x - 3 \\
\underline{2x^3 - 4x^2 \phantom{{}-5x+6}} & \\
x^2 - 5x + 6 & \\
\underline{x^2 - 2x \phantom{{}+6}} & \\
-3x + 6 & \\
\underline{-3x + 6} & \\
0 &
\end{array}$$

I trin 1 kigger vi på, hvor mange gange højeste-gradsleddet i $(x-2)$ går op i højeste-gradsleddet i polynomiet $2x^3-3x^2-5x+6$. Som vist med rødt giver det regnestykket $2x^3/x=2x^2$. Højeste-gradsleddet i resultatet er altså $2x^2$. Derefter ganger man $(x-2)$ med $2x^2$: $2x^2\cdot(x-2)=2x^3-4x^2$. Dette trækkes fra det oprindelige polynomium og giver resten x^2-5x+6. Vi går til trin 2, hvor proceduren fortsætter: Højeste-gradsleddet i $(x-2)$ divideres op i højeste-gradsleddet i x^2-5x+6, som giver $x^2/x=x$. Det næste led i resultatet er altså x. Det ganger man med $(x-2)$ og får $x\cdot(x-2)=x^2-2x$. Når det trækkes fra resten fra forrige trin, altså x^2-5x+6, fås $-3x+6$. I trin 3 gentager tingene sig: Højeste-gradsleddet i $(x-2)$ divideres op i højeste-gradsleddet i $-3x+6$. Det giver $-3x/x=-3$. Det ganger man med $(x-2)$ og får $-3\cdot(x-2)=-3x+6$. Når det trækkes fra resten fra trin 2, får man 0. Det er et udtryk for, at divisionen går op! Vi har vist, at:

$$2x^3-3x^2-5x+6 \;=\; (x-2)\cdot(2x^2+x-3)$$

Den sidste parentes kan faktoriseres videre, idet det oplyses, at 1 er rod heri.

a) Foretag en division af $2x^2+x-3$ med $(x-1)$. Hvad giver det?

b) Vis at en total faktorisering af det oprindelige polynomium er følgende:
$2x^3-3x^2-5x+6 \;=\; 2\cdot(x-2)\cdot(x-1)\cdot(x+1{,}5)$.

Opgave 224

Benyt dit CAS-værktøj til at faktorisere nedenstående polynomier. Typisk skal du lede efter et værktøj, som kan hedde noget i retningen af *Factor*.

a) $p(x)=2x^3-5x^2-9x+18$

b) $p(x)=x^4-x^3-31x^2+x+30$

c) $p(x)=2x^4-12x^3+19x^2-18x+24$

d) $p(x)=x^3-12x-16$

Opgave 225

Når først polynomier er faktoriseret er det ofte nemt at bestemme nulpunkter. Benyt nulreglen til manuelt at bestemme nulpunkterne for nedenstående polynomier.

a) $p(x)=3\cdot(x-2)\cdot(x+11)\cdot(x-1)$

b) $p(x)=x\cdot(2x-3)\cdot(x-9)$

c) $p(x)=(x-4)^2\cdot(x+12)$

d) $p(x)=(x^2+2)\cdot x^2$

Opgave 226

Betragt de faktoriserede polynomier i opgave 225. Benyt et CAS-værktøj for at gange parenteserne ud, så det endelige polynomium er på formen i definition 2.21. Du skal muligvis lede efter et værktøj, som hedder *Expand*.

Opgave 227

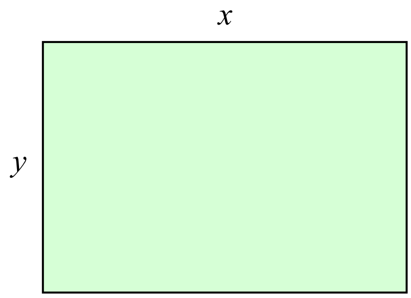
Har polynomiet $p(x)=x^5-11x^4-24x^3+145x^2+1021x+456$. Afgør om polynomiet har nogen reel rod *uden* at bruge CAS-værktøj.

2.5 Anvendelser af andengradspolynomier

Opgave 228

Længden af et maleri på væggen er 20 cm længere end det er bredt. Maleriet har et areal på 2400 cm^2. Bestem sidelængderne af maleriet. *Hjælp*: Se eksempel 2.26.

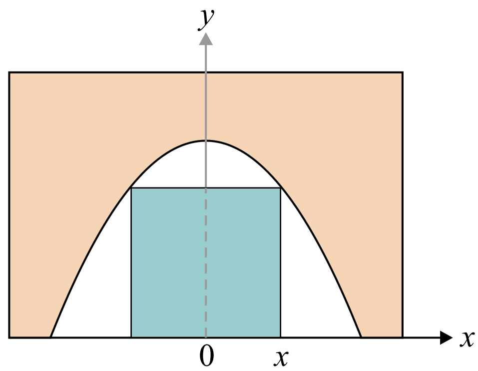
Opgave 229



En rektangulær grund har en omkreds på 96 meter og et areal på 560 m^2. Bestem grundens sidelængder.

Hjælp: Betegn grundens længde med x og bredde med y. Udnyt de to oplysninger til at opstille to ligninger med de ubekendte x og y. Isoler herefter y i den ene ligning og indsæt udtrykket i den anden ligning. Det skal gerne give en andengradsligning i x.

Opgave 230



Figuren viser en tunnel, hvis indre har et tværsnit som en parabel, som er graf for andengradspolynomiet $f(x) = -0{,}32x^2 + 5$. Enheden er meter.

a) Bestem bredden af tunnellen ved jorden.

Nogle containere har en kvadratisk endeflade, og de skal kunne gå igennem tunnelen.

b) Hvor stor må sidelængden i den kvadratiske endeflade maksimalt være, for at containeren kan passere igennem tunnellen?

Hjælp: Kald det stykke den kvadratiske container rager ud fra midten for x. Hvor stor skal højden da være, for at der er tale om et kvadrat? Udnyt herefter forskriften for tunnellens tværsnitprofil til at opstille en ligning, og løs derefter denne.

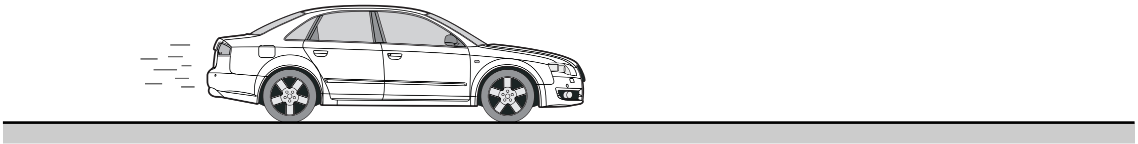
Opgave 231

Vi er i situationen med et skråt kast fra eksempel 2.24. Boldens starthastighed v_0 er 15 m/s, elevationen (vinklen) α er 52° og begyndelseshøjden y_0 er 1,80 m.

a) Bestem koefficienterne i det andengradspolynomium, hvis graf beskriver boldens banekurve.
b) Udregn toppunktet for parablen med henblik på at afgøre, hvor højt bolden når op og hvor langt fra kastestedet, det sker.
c) Løs en andengradsligning for at kunne bestemme kastelængden.
d) Tegn grafen for kasteparablen. Husk samme skalering på akserne.

Opgave 232

I køreskolen lærer man, at $\text{standselængde} = \text{reaktionslængde} + \text{bremselængde}$. Hvis der opstår en pludselig forhindring på kørebanen, skal man altså både tage hensyn til, at bilen når at køre et stykke, før man overhovedet når at reagere, plus at bilen skal have en længde at bremse helt ned på.



a) Redegør for, hvorfor det er rimeligt at benytte følgende formel til bestemmelse af *reaktionslængden*: $s_R = v \cdot t_R$, hvor v er bilens hastighed, da forhindringen opstod, og t_R er reaktionstiden.

Man kan vise, at $s_B = 0{,}0432 \cdot v^2$ er en rimelig formel til bestemmelse af *bremselængden* for en personbil, som opfylder mindstekravene for bremseevnen. Hastigheden v er her antaget regnet i m/s og bremselængden i meter (m).

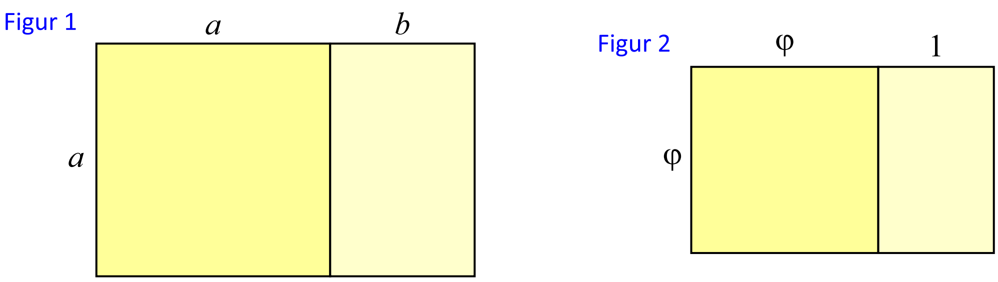
b) Redegør for, hvorfor udtrykket for bremselængden bekræfter lærdommen om, at en *fordobling af hastigheden betyder en firdobling af bremselængden*.

En reaktionstid på 1 sekund regnes for realistisk, hvis man ikke er træt. Det giver følgende funktion for *standselængden* som funktion af hastigheden v, idet vi underforstår SI-enhederne m og m/s: $s(v) = 0{,}0432 \cdot v^2 + 1{,}2 \cdot v$.

c) Hvor stor er standselængden ved en hastighed på 80 km/t = 22,22 m/s?

d) Hvilken hastighed må bilen højst have for at kunne standse indenfor 80 m? Angiv resultatet både i m/s og km/t (1 m/s = 3,6 km/t).

Opgave 233 (Det gyldne snit – det gyldne rektangel)



Givet et rektangel, som ikke er et kvadrat. Hvis man bortskærer et kvadrat, har man tilbage et nyt rektangel, som vist på figur 1. Vi kalder det oprindelige rektangel for det *store* rektangel og det nye for det *lille* rektangel. Det lille rektangel er farvet svagt gult på figur 1. Det oprindelige store rektangel kaldes *gyldent*, såfremt forholdet mellem den lange side og den korte side er ens i begge rektangler.

a) Redegør for, at betingelsen for at rektanglet er gyldent kan udtrykkes således:

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$$

Dette forhold kaldes i øvrigt også for det *gyldne snits forhold*, og man betegner det med det græske symbol *phi* : $\varphi = a/b$. Vi ved, at hvis vi dividerer alle størrelser i en figur med et bestemt tal, så fås en figur, som er *ligedannet* med den oprindelige. Dermed er alle forhold bevaret. Hvis vi "nedkopierer" figur 1 med faktoren *b*, altså dividerer alle længder med *b*, så fås figur 2. Figur 2 kan bruges til at bestemme talværdien for det gyldne snit.

b) Vis, ved at iagttage figur 2, at det gyldne snit φ opfylder: $\dfrac{\varphi+1}{\varphi} = \dfrac{\varphi}{1}$

c) Vis at det gyldne snit opfylder andengradsligningen $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$.

d) Løs andengradsligningen og angiv en talværdi for φ med 4 decimalers nøjagtighed.

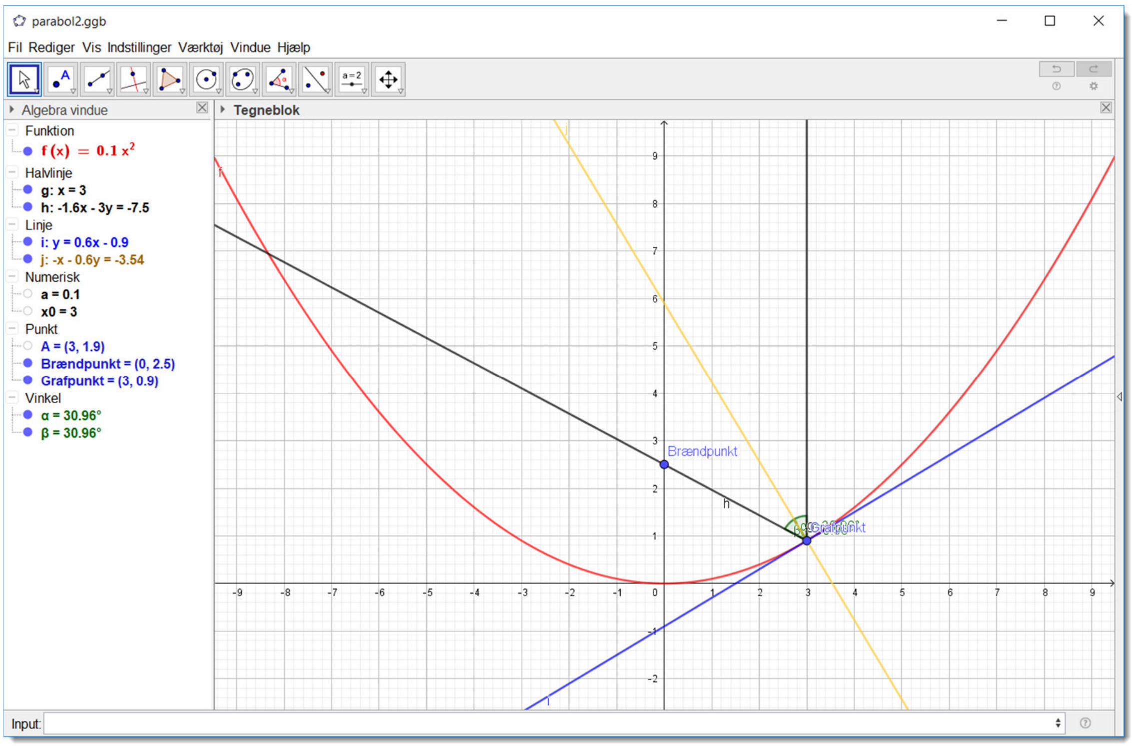
Det gyldne snit har i øvrigt en lang og interessant historie. Noget af den kan du studere i Tema A i denne e-bog.

Opgave 234 (Induktive undersøgelser for parabelegenskaber med GeoGebra)

I denne opgave skal vi bruge den klassiske udgave af software-programmet GeoGebra. Hvis du ikke allerede har det installeret, kan du hente programmet gratis fra hjemmesiden https://www.geogebra.org og installere det. Der er tale om et fremragende program til at foretage geometriske konstruktioner og analysere grafer. Meningen i denne opgave er at eksperimentere med parabler og derved få en bedre fornemmelse for nogle af de egenskaber, der gælder for parabler. Til at begynde med påstår vi uden videre, at den parabel, som er graf for funktionen $f(x) = a \cdot x^2$, har *brændpunkt* i punktet $\left(0, \frac{1}{4a}\right)$. Herefter følger de instruktioner, du skal foretage, før du kan begynde eksperimenterne.

1. Skriv `a=0.10` i *Input*-linjen og tryk **Enter**.
2. Skriv `f(x)=a*x^2` i *Input*-linjen og tryk **Enter**. Herved skulle grafen for andengrads-polynomiet $f(x) = 0{,}10 \cdot x^2$ gerne komme til syne.
3. Vælg værktøjet *Flyt* (ikonen er en pil) og træk i tegnefladen, så origo kommer til at befinde sig lidt under midten af den synlige del af tegnefladen.
4. Vælg værktøjet *Punkt* og klik et vilkårligt sted på tegnefladen for at afsætte et punkt.
5. Højreklik på punktet og vælg punktet *Egenskaber* i kontekstmenuen for at redigere punktet. For det første kan du give det navnet "Brændpunkt". Under definition skrives: `(0,1/(4*a))`. Tryk på **Enter** og luk boksen.
6. Skriv `x0=3` i *Input*-linjen og tryk **Enter**.
7. Vælg værktøjet *Punkt* igen og afsæt et punkt på tegnefladen. Herefter skal du ligesom under punkt 4 ændre punktets navn til "Grafpunkt" og skrive følgende under definition: `(x0,f(x0))`. Tryk derefter på **Enter** og luk boksen.
8. Vi skal have lavet en lodret halvlinje fra grafpunktet og opefter. Begynd derfor med at oprette et ny punkt, med følgende i definitionsfeltet: `(x0,f(x0)+1)`.

9. Vælg værktøjet *Halvlinje*. Bemærk, at det ligger i en undermenu til *Linje*-værktøjet og kan fås frem ved at klikke på den lille trekant i nederste højre hjørne af værktøjet *Linje*. Når *Halvlinje*-værktøjet er valgt skal du klikke på først punktet kaldet "Grafpunkt" og derefter på punktet, skabt under punkt 8. Nu skal du gerne kunne se den ønskede halvlinje.
10. Gå over i *Algebra vindue* i venstre side og klik på den lille blå bolle til venstre for punktet *A*. Det får det pågældende hjælpepunkt til at blive usynligt.
11. Lav igen en halvlinje, denne gang fra "Grafpunkt" gennem "Brændpunkt".
12. Vi skal have tegnet en tangent til grafen for *f* igennem grafpunktet: Vælg værktøjet *Tangenter* og klik på først grafen for *f* og derefter på punktet "Grafpunkt". Højreklik derefter på den fremkomne tangent og vælg *Egenskaber*. I boksen vælges fanen *Farve*, hvorefter man kan give tangenten farven blå.
13. Giv grafen farven rød, ved at højreklikke på den, vælge *Egenskaber* og fanen *Farve*...
14. Vælg værktøjet *Vinkelret linje* og klik derefter på den blå tangent og derefter på punktet "Grafpunkt". Nu skulle du gerne kunne se en linje gennem "Grafpunkt", stående vinkelret på tangenten. Farv den orange.
15. Vælg værktøjet *Vinkel* og klik på først den lodrette sorte halvlinje og derefter på den orange vinkelrette linje fra punkt 14. En vinkelangivelse skulle gerne kunne ses. Hvis den beregne vinkel er dækket til af andre elementer, kan man alternativt se den i *Algebra vindue* til venstre. Højreklik derefter på den fremkomne vinkel, vælg *Egenskaber* og se under fanen *Basis* efter *Vinkel mellem*. Her vælger du 0° til 180°.
16. Vælg igen værktøjet *Vinkel* og klik på først halvlinjen gennem brændpunktet og derefter på den orange vinkelrette linje fra punkt 14.



Konstruktionen er færdig. Bemærk, at du nu med værktøjet *Flyt* kan trække grafpunktet "Grafpunkt" langs med grafen og se alle de øvrige elementer flytte sig med. Det er også muligt at flytte punktet ved i *Algebra vindue* at dobbeltklikke på elementet `x0=3` og ændre værdien af x0 fra 3 til en anden værdi. Forsøg at besvare følgende spørgsmål:

a) Kig på eksempel 2.28 omhandlende anvendelser af parabler og de tredimensionelle udgaver i form af omdrejningsparaboloider i forbindelse med radioteleskoper og paraboler. Hvad repræsenterer de enkelte elementer i vore tegning i relation hertil?
b) Hvorfor blev du mon bedt om at få beregnet de to vinkler? Hvad sker der med vinklerne i forhold til hinanden, når du bevæger grafpunktet? Kig eventuelt i *Algebra vindue* for at kunne se vinklerne tydeligt. Hvilken rolle spiller de to vinkler rent *fysisk* set? Hvad konkluderer du om brændpunktets rolle?
c) Du kan også ændre på værdien af konstanten a i forskriften for andengradspolynomiet. Dobbeltklik på `a=0.1` i *Algebra vindue* og lad a få en anden værdi. Hvad betyder det med hensyn til parablen og dets brændpunkt?
d) Hvis du i *Algebra vindue* klikker på den hvide bolle til venstre for `a=0.1` bliver bollen blå og en skyder kommer til syne på tegnefladen. Med den kan man hurtigt variere hvor bred parablen er. Højreklik på skyderen og vælg *Egenskaber*. Under fanen *Skyder* kan man for eksempel ændre det interval skyderen kan ændre a i. Under *Interval* kan du give *min* værdien 0 og *maks* værdien 1. Prøv derefter at trække i skyderen. For en given værdi af a valgt via skyderen, kan man derefter trække i grafpunktet og se, hvad der nu sker ...

3.2 Lidt om sekanter og tangenter

Opgave 301

Givet funktionen $f(x) = 0{,}5x^2 - 1{,}25x$. Tangenten til grafen for *f* i punktet $x_0 = 2$ ønskes bestemt efter samme fremgangsmåde som i eksempel 3.1. Nærmere bestemt:

a) Udfyld skemaet nedenfor, hvor $\Delta x = x - x_0$ og $\Delta f = f(x) - f(x_0)$. Du må gerne benytte regneark eller et andet hjælpemiddel til at bestemme værdierne i skemaet.

x	f(x)	Δx	Δf	a
6				
4				
3				
2,5				
2,2				
2,05				
2,01				
2,001				
2,0001				

b) Hvilket tal nærmer sekanthældningerne i kolonnen *a* sig til, tror du? Dette tal er tangenthældningen i punktet $x_0 = 2$.

c) Bestem *ligningen* for tangenten til grafen i punktet $x_0 = 2$. *Hjælp*: Husk at du udover hældningen skal have et punkt på linjen.

d) Benyt dit CAS-værktøj til at tegne grafen for *f* såvel som tangenten i samme koordinatsystem. Prøv derefter at zoome ind på grafen og tangenten i nærheden af punktet $x_0 = 2$: Ser det virkelig ud til, at tangenten tangerer grafen i det anførte punkt?

NB! I denne opgave skal du ikke forsøge at bevise, at din gættede grænseværdi er korrekt, ligesom det blev gjort i eksempel 3.1. Det er lidt for teknisk her.

3.3 Differentiable funktioner

Opgave 302

Det er indlysende, at differentialkvotienten for en lineær funktion $f(x) = a \cdot x + b$ vil have differentialkvotienten *a* i alle punkter, da tangenten er sammenfaldende med grafen for funktionen. Brug tretrinsreglen til at vise, at det også forholder sig sådan.

Opgave 303

Lad $f(x) = a \cdot x^2$, hvor *a* er en konstant. Benyt tretrinsreglen til at bevise, at differentialkvotienten af *f* i punktet x_0 er lig med $f'(x_0) = 2ax_0$. *Hjælp*: Kig på teknikken, der blev anvendt i beviset for sætning 3.6.

Opgave 304*

Anvend tretrinsreglen til at give et bevis for sætning 3.9, dvs. at funktionen $f(x)=\sqrt{x}$, $x\in\left[0,\infty\right[$ er differentiabel for ethvert $x_0\in\left]0,\infty\right[$ med differentialkvotient

$$f'(x_0) \;=\; \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

Hjælp: Under punkt 2 med reduktion, kan man forlænge brøken med $\sqrt{x}+\sqrt{x_0}$ i både tæller og nævner. Benyt derefter en kvadratsætning.

Opgave 305

Brug tretrinsreglen til at bevise, at en *konstant* funktion $f(x)=k$ har differentialkvotienten 0 i alle punkter.

Opgave 306

Lad $f(x)=x^2$.

a) Benyt sætning 3.6 til manuelt at bestemme tangenthældingen til grafen for *f* i punktet med *x*-koordinat $x_0=1$.

b) Bestem manuelt ligningen for tangenten til grafen for *f* i punktet $P_0(1,f(1))$. Hjælp: Benyt (6) i kapitel 3.

Opgave 307

Lad $f(x)=\sqrt{x},\; x\geq 0$.

a) Benyt sætning 3.9 til manuelt at bestemme tangenthældingen til grafen for *f* i punktet med *x*-koordinat $x_0=4$.

b) Bestem manuelt ligningen for tangenten til grafen for *f* i punktet $P_0(4,f(4))$. Hjælp: Benyt (6) i kapitel 3.

c) Benyt dit CAS-værktøj til at tegne både grafen og tangenten fra b). Undersøg – evt. ved at zoome ind, om tangenten virkelig er en tangent til grafen for *f* ?

Opgave 308

Grafen til funktionen $f(x)=\sqrt{x}$ har en tangent med hældning 1,8. Bestem *x*-koordinaten til røringspunktet med to decimalers nøjagtighed.

Opgave 309

Lad $f(x)=1/x,\; x\neq 0$. Opgaven skal løses manuelt.

a) Bestem hældningen til tangenten til grafen for *f* i punktet $P_0(1,f(1))$.

b) Bestem *x*-koordinaterne til de punkter på grafen for *f*, hvor tangenten har hældningen 0,25. Samme spørgsmål for hældningen –0,25.

Opgave 310

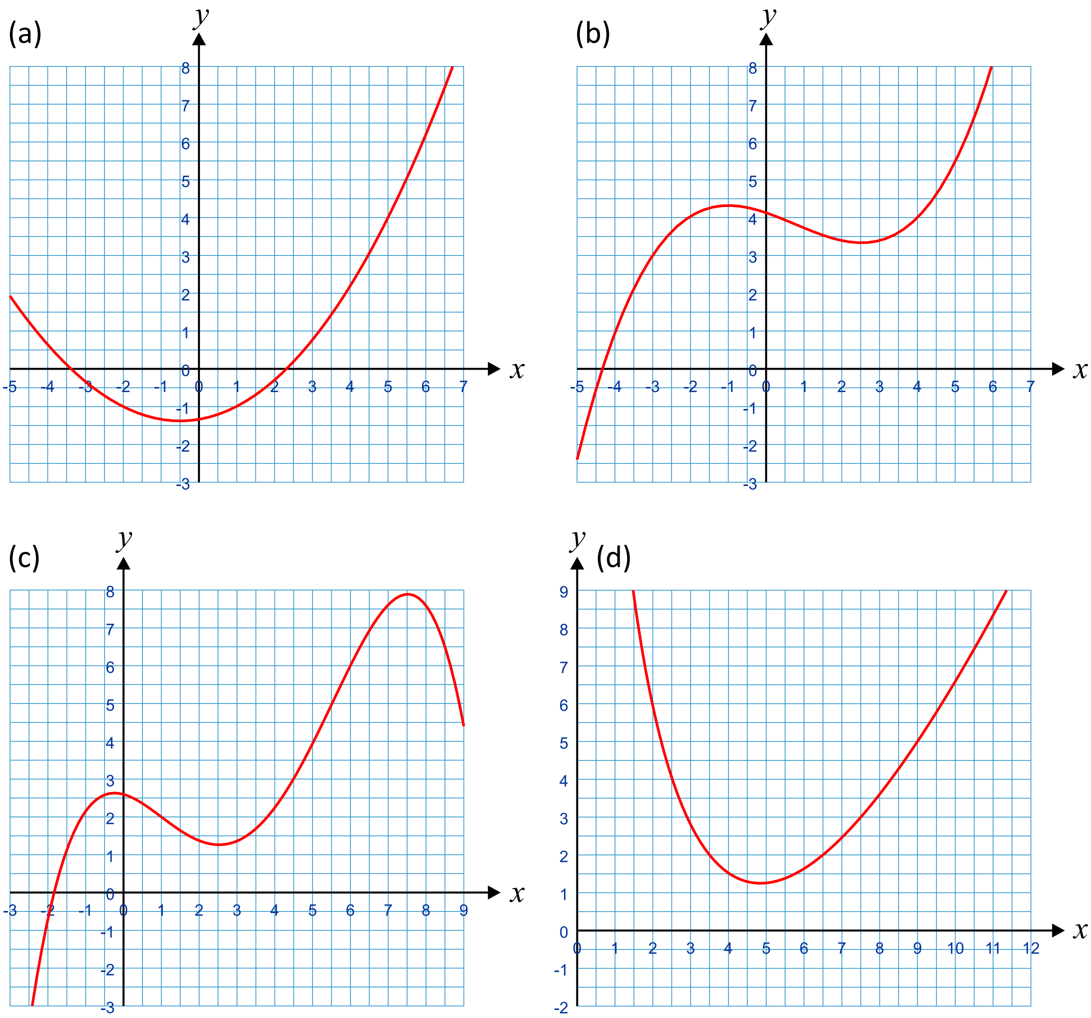
Figurerne nedenfor viser graferne for nogle funktioner, hvis forskrifter er ukendte. I det følgende skal du besvare en række spørgsmål grafisk efter samme opskrift som i eksempel 3.15. Enten kan du zoome ind og tage et skærmbillede for at indsætte grafen i et matematik-program eller benytte en lineal …

a) Betragt figur (a). Bestem tangenthældningerne i de punkter på grafen, som har x-koordinater -2 og 5.

b) Betragt figur (b). Bestem tangenthældningerne i de punkter på grafen, som har x-koordinater -3 og 4.

c) Betragt figur (c). Bestem tangenthældningerne i de punkter på grafen, som har x-koordinater 1 og 6.

d) Betragt figur (d). Bestem hældningen af grafen i punktet $P_0(9, f(9))$. Bestem desuden den eller de x-værdier til punkter på grafen, hvor tangenten har hældning -2.



Opgave 311

En tangent til grafen for $f(x) = x^2$ er parallel med linjen $y = -0.8x + 4.5$. Bestem manuelt koordinaterne til tangentens røringspunkt med grafen.

Opgave 312* (Weierstrass' funktion)

I afsnit 3.3 blev det omtalt, at den tyske matematiker Karl Weierstrass (1815-1897) opdagede en funktion, som er så "syg", at skønt den er kontinuert i ethvert punkt $x \in R$, så er den *ikke* differentiabel i noget som helst punkt! Eksemplet rystede matematikverdenen. Funktionen er defineret ved en uendelig række (se afsnit 1.6):

$$W(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a^k \cdot \cos(b^k \cdot \pi \cdot x)$$

hvor a er et tal, som opfylder $0 < a < 1$, mens b er et positivt *ulige* (helt) tal, som opfylder at $a \cdot b > 1 + \frac{3}{2}\pi$. Vinkler skal regnes i radianer, ikke grader! I det følgende skal du bruge dit CAS-værktøj til at tegne grafen for funktionen, eller rettere en tilnærmelse til den. Vi er nemlig nødt til at skære den uendelige sum af ved N:

$$W_N(x) = \sum_{k=1}^{N} a^k \cdot \cos(b^k \cdot \pi \cdot x)$$

Vælg følgende parametre, som tilfredsstiller kravene: $a = 0{,}5$ og $b = 13$. Sæt for eksempel N til at være 100. Tegn grafen i intervallet $[0,3]$. Det kan være, at du er nødt til at indstille CAS-værktøjet, så det tegner ekstra mange punkter. Hvad observerer du? Kan du forklare med ord, hvorfor funktionen mon ikke er differentiabel noget sted, altså at grafen ikke har en tangent noget sted?

3.4 Tangentens ligning

Opgave 313

I opgave 303 skulle man vise, at differentialkvotienten til $f(x) = a \cdot x^2$ er $f'(x) = 2ax$. Brug dette resultat samt sætning 3.16 til manuelt at bestemme en ligning for tangenten til grafen for funktionen $f(x) = 0.75 \cdot x^2$ i punktet $(2, f(2))$.

Opgave 314

Lad $f(x) = 1/x$, $x \neq 0$. Opgaven skal løses manuelt.

a) Bestem en ligning til tangenten til grafen for f i punktet $P_0(1, f(1))$.

b) Bestem en ligning til tangenten til grafen for f i punktet $P_0(-0{,}5; f(-0{,}5))$.

c) Tangenten fra a) skærer x-aksen i et punkt. Hvad er dette punkts koordinater?

Opgave 315

Lad $f(x) = \sqrt{x}$, $x \geq 0$. Opgaven skal løses manuelt. Benyt sætning 3.16.

Bestem en ligning til tangenten til grafen for f i punktet $P_0(9, f(9))$.

Opgave 316

Bestem manuelt en ligning for tangenten til grafen for $f(x) = x^2$ i $P_0(1{,}5\,; f(1{,}5))$.

Opgave 317

Benyt formlen i sætning 3.16 samt et CAS-værktøj til at beregne en ligning for tangenten til grafen for hver af nedenstående funktioner i de angivne punkter. Plot desuden graf og tangent i samme koordinatsystem i et passende interval.

a) $f(x) = 0.5 \cdot x^2$. Røringspunkt: $P_0(2, f(2))$.

b) $f(x) = e^{-x} + x^3$. Røringspunkt: $P_0(1, f(1))$.

c) $f(x) = \sin\left(\tfrac{1}{4}x + \tfrac{\pi}{4}\right)$. Røringspunkt: $P_0(\tfrac{\pi}{3}, f(\tfrac{\pi}{3}))$.

d) $f(x) = \dfrac{4x}{\sqrt{x+1}+2}$, $x \geq -1$. Røringspunkt: $P_0(5, f(5))$.

Opgave 318

Benyt formlen i sætning 3.16 samt et CAS-værktøj til at beregne en ligning for tangenten til grafen for hver af nedenstående funktioner i de angivne punkter. Plot desuden graf og tangent i samme koordinatsystem i et passende interval.

a) $f(x) = x^2 - \dfrac{2}{x}$, $x \neq 0$. Røringspunkt: $P_0(3, f(3))$.

b) $f(x) = x^{1{,}78} - x^{0{,}58}$, $x > 0$. Røringspunkt: $P_0(4{,}5; f(4{,}5))$.

c) $f(x) = x \cdot \sin(x)$. Røringspunkt: $P_0(\tfrac{3\pi}{4}, f(\tfrac{3\pi}{4}))$.

d) $f(x) = \ln(x) - x$, $x > 0$. Røringspunkt: $P_0(4, f(4))$.

e) $f(x) = \cos\left(\sqrt{x^2 + \tfrac{1}{2}}\right)$. Røringspunkt: $P_0(-2{,}5; f(-2{,}5))$.

Opgave 319

Bestem en ligning for tangenten til grafen for $f(x) = \sin(x)$ i $P_0(2, f(2))$. En værdi for $\sin(1{,}9)$ ønskes beregnet (argument underforstået i radianer). Hvor stor en fejl begår man ved at indsætte 1,9 i forskriften for tangenten fremfor at indsætte i funktionsforskriften? Du skal bruge CAS-værktøj.

Opgave 320

Antag at du skal udregne $1{,}1^{1{,}25}$, men ikke har nogen regnemaskine til rådighed. Benyt tangenten til grafen for $f(x) = x^{1{,}25}$ i $P_0(1, f(1))$ til manuelt at bestemme en tilnærmet værdi for tallet. Senere vil du vide, at $f'(x) = 1{,}25 \cdot x^{0{,}25}$. Hvor stor en fejl begås der?

Opgave 321

Grafen for funktionen $f(x) = 1/x$, $x \neq 0$ har to tangenter med hældning –0,81. Bestem ligningen for hver af dem.

Opgave 322

Benyt metoden fra eksempel 3.19 til at bestemme den vinkel tangenten til grafen for funktionen $f(x) = \sin(x)$ i punktet $P_0(\frac{\pi}{3}, f(\frac{\pi}{3}))$ danner med x-aksen.

Opgave 323

En tangent til grafen for funktionen $f(x) = x^2$ danner en vinkel på 55° med x-aksen. Den har endvidere positiv hældning. Bestem koordinaterne til røringspunktet for tangenten.

3.5 Monotoniforhold og lokale ekstrema

Opgave 324

Giv et bevis for påstand b) i sætning 3.20, idet du tegner en figur for tilfældet, hvor f er en aftagende funktion – analog til figuren for en voksende funktion givet i beviset for sætning 3.20.

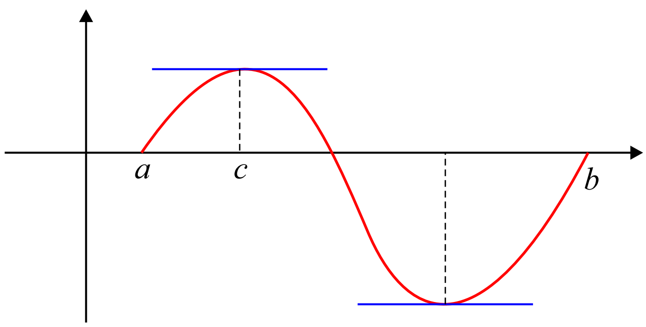
Opgave 325* (Middelværdisætningen)

Middelværdisætningen er en sætning, som kan være meget nyttig i forbindelse med visse beviser. Aktuelt kan den bruges i den næste opgave til at bevise sætning 3.22 fra hovedteksten. I det følgende gives beviset for en hjælpesætning kaldet *Rolles sætning*. Via den ledes læseren igennem et bevis for middelværdisætningen.

Rolles sætning

Lad f være en funktion, som er kontinuert i det lukkede interval $[a,b]$, differentiabel i det tilsvarende åbne interval $]a,b[$ og som opfylder at $f(a) = f(b) = 0$. Så findes der et $c \in]a,b[$, så $f'(c) = 0$.

Bevis: Rent intuitivt virker sætningen indlysende, når man kigger på en figur. Hvis grafen for f har endepunkter på x-aksen, så må der være mindst et sted imellem, hvor der er vandret tangent. I tilfældet på figuren er der endda to mulige valg for c.



Vi vil dog alligevel give et formelt bevis. Hvis funktionen er identisk nul i hele det lukkede interval $[a,b]$, så er $f'(x)$ lig med 0 for alle $x \in]a,b[$. I det tilfælde kan ethvert punkt i det åbne interval vælges som *c*. Hvis *f* ikke er konstant lig med 0 i det lukkede interval, så bruger vi kontinuiteten af *f* til at konkludere, at der må findes et maksimum og et minimum for *f* i $[a,b]$. De kan ikke begge være 0, eftersom *f* ikke er konstant lig med 0. Det punkt på *x*-aksen, hvori der er et maksimum eller et minimum, som er forskellig fra 0, kan bruges som *c*. Dels er der klart vandret tangent i dette punkt og dels er det et indre punkt i intervallet. Det sidste følger af, at funktionsværdien er $\neq 0$ her, mens funktionsværdierne i endepunkterne er 0.

□

Middelværdisætningen

Lad *f* være en funktion, som er kontinuert i det lukkede interval $[a,b]$ og differentiabel i det tilsvarende åbne interval $]a,b[$. Så findes der et $c \in]a,b[$, så

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

a) Læs og forstå indhold og bevis for Rolles sætning. Genfortæl for en anden elev.

Med henblik på at bevise middelværdisætningen: Lad i det følgende $g(x)$ være den lineære funktion, hvis graf går igennem punkterne $(a, f(a))$ og $(b, f(b))$. definer hjælpefunktionen $h(x) = f(x) - g(x)$.

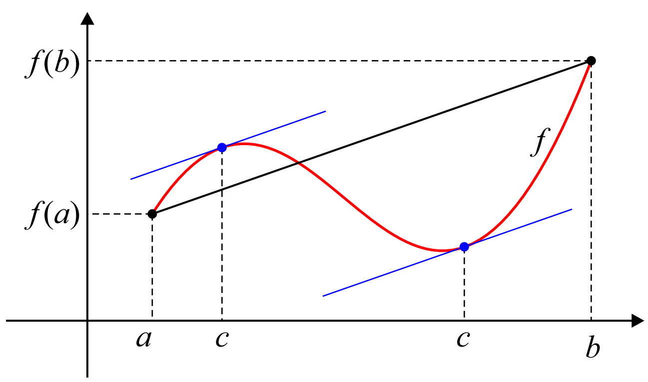
b) Vis at hjælpefunktionen *h* opfylder forudsætningerne i Rolles sætning.

(NB! Det antages, at læseren kender sætningen, som gennemgås i et senere afsnit: At differensen af to differentiable funktioner også er en differentiabel funktion, og at differentialkvotienten er differensen af differentialkvotienterne af de to funktioner).

c) Argumenter for hvorfor der gælder: $h'(x) = f'(x) \; - \; \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

d) Udnyt Rolles sætning på funktionen *h* til at bevise Middelværdisætningen.

e) Middelværdisætningen er en generalisering af Rolles sætning. Betragt figuren nedenfor. Den er en analogi til figuren hørende til Rolles sætning ovenfor. Prøv at forstå det intuitive indhold af figuren.



Opgave 326*

Bevis sætning 3.22 punkt a) ved hjælp af Middelværdisætningen fra opgave 325*.

Hjælp: Man ved altså, at f er differentiabel i det åbne interval I. Man skal vise, at der for $x_1, x_2 \in I$ gælder: $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$. Lad x_1 og x_2 spille rollen af a og b i Middelværdisætningen. Overvej tilfældet, hvor x_1 og/eller x_2 er et endepunkt i intervallet og hvor det antages, at f er kontinuert i det udvidede interval $\tilde{I}$.

Opgave 327

Benyt Middelværdisætningen fra opgave 325* til at vise sætning 3.22 c).

Opgave 328

Givet funktionen $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x + 2$.

a) Bestem monotoniforholdene for f.
b) Bestem de lokale ekstrema.
c) Har funktionen et maksimum og/eller et minimum. Argumentér!
d) Tegn grafen for f.

Opgave 329

Givet funktionen $f(x) = \frac{1}{2} \cdot (e^x + e^{-x})$.

a) Bestem monotoniforholdene for f.
b) Undersøg for lokale ekstrema.
c) Har funktionen et maksimum og/eller et minimum. Argumentér!
d) Tegn grafen for f.

NB! Funktionen kaldes i øvrigt også $\cosh(x)$ og udtales "cosinus hyperbolsk".

Opgave 330

Givet funktionen $f(x) = \dfrac{3x-2}{x^2+3}$.

a) Argumenter for, at $Dm(f) = R$.
b) Bestem monotoniforholdene for f.
c) Bestem de lokale ekstrema.
d) Vis at funktionen har en vandret asymptote (se afsnit 1.7). Hvad er dens ligning?
e) Bestem funktions eventuelle maksima og minima.
f) Tegn grafen for f i et passende interval.

Opgave 331

Forklar hvorfor funktionen $f(x) = x^3 + 9x$ er en voksende funktion.

Opgave 332

Forklar hvorfor $f(x)=\ln(x)+3,\ x\in\left]0,\infty\right[$ er en voksende funktion.

Opgave 333

Givet funktionen $f(x)=x^3-6x^2+12x-5$.

a) Bestem monotoniforholdene for f.

b) Har funktionen et maksimum og/eller et minimum. Argumentér!

c) Tegn grafen for f.

Opgave 334

Givet funktionen $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-4}$.

a) Bestem definitionsmængden.

b) Bestem monotoniforholdene for f. NB! Husk på fortegnslinjen for f' at medtage eventuelle punkter, hvor f ikke er defineret!

c) Bestem eventuelle lokale ekstrema.

d) Har funktionen globale ekstrema? Begrund svaret.

e) Tegn grafen for f i et passende interval.

Opgave 335

Givet funktionen $f(x)=x\cdot\ln(6-2x)$.

a) Bestem definitionsmængden.
Hjælp: Husk at "indmaden" i den naturlige logaritme-funktion skal være positiv!

b) Bestem monotoniforholdene for f. *Hjælp*: Husk på fortegnslinjen for f' at medtage eventuelle punkter, hvor f ikke er defineret!

c) Bestem eventuelle lokale ekstrema.

e) Bestem eventuelle globale ekstrema.

f) Tegn grafen for f i et passende interval.

Opgave 336

Givet funktionen $f(x)=4x^3-39x^2+90x-30$. Bestem de lokale ekstrema for f. Både stederne og værdierne.

Opgave 337

Bestem monotoniforholdene for funktionen $f(x)=-x\cdot\sin(x),\ x\in\left[0,2\pi\right]$.

Opgave 338

a) Bestem maksimum for funktionen $f(x) = 5 \cdot \sqrt{x} - x$, $x \in [0, \infty[$.

b) Funktionen $f(x) = 1{,}5^x - x$, $x \in [-10, 10]$ har et lokalt ekstremum. Hvilket og hvor?

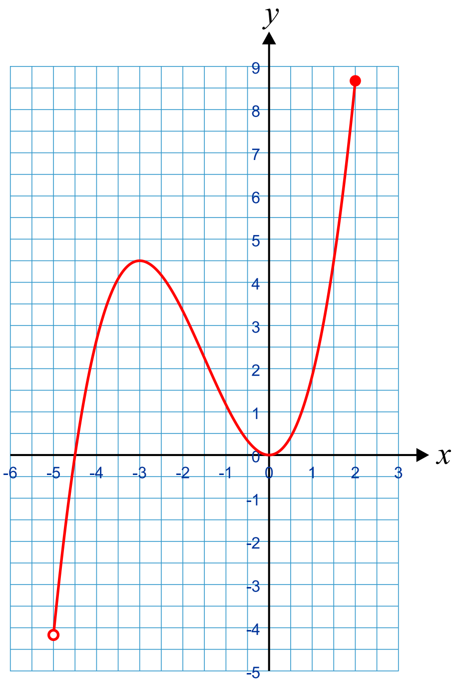
Opgave 339

Vis at funktionen $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 4x - 6$ er en voksende funktion.

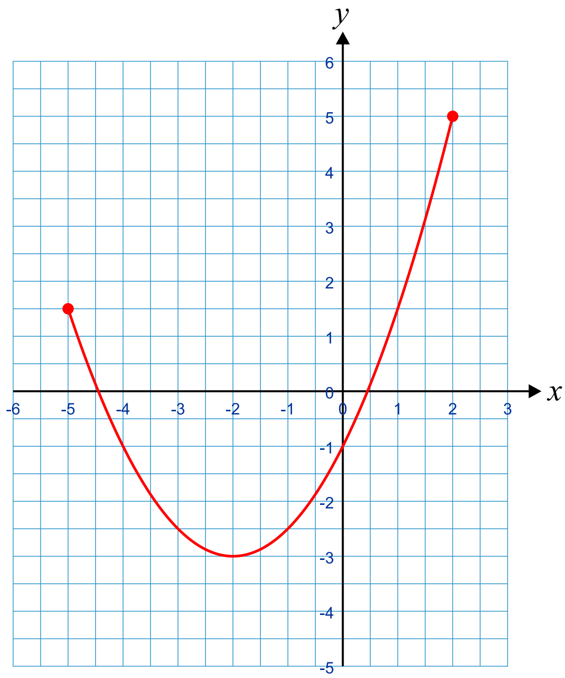
Opgave 340

Aflæs definitionsmængde, monotoniintervaller og eventuelle lokale ekstrema for funktionerne med nedenstående grafer.

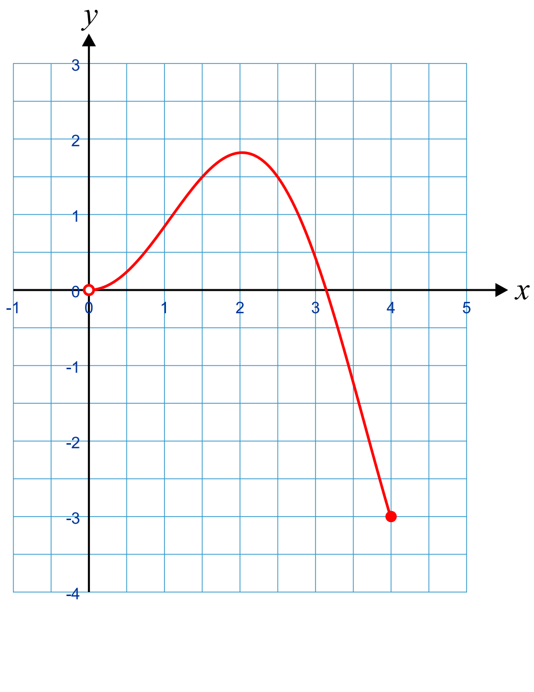
(a)



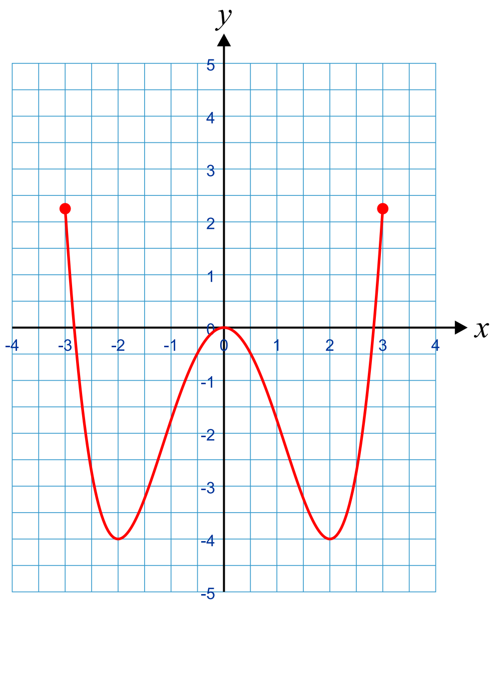
(b)



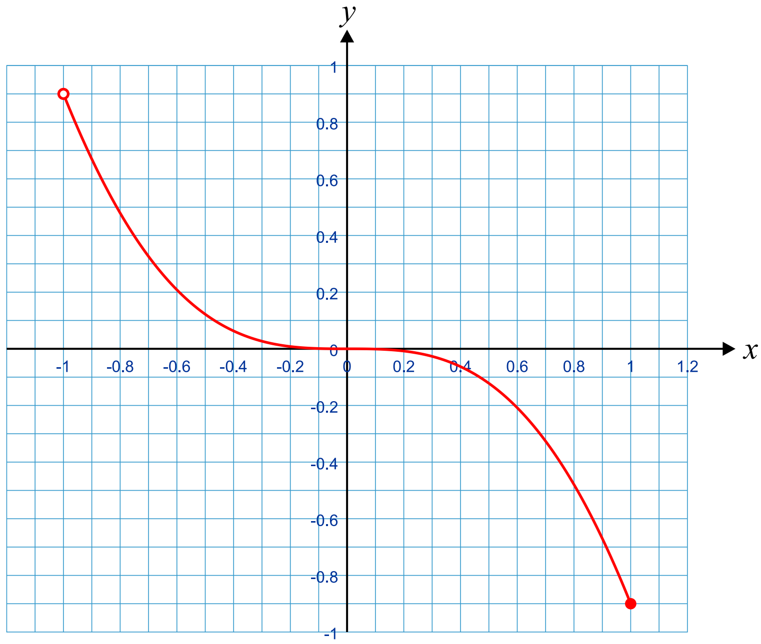
(c)



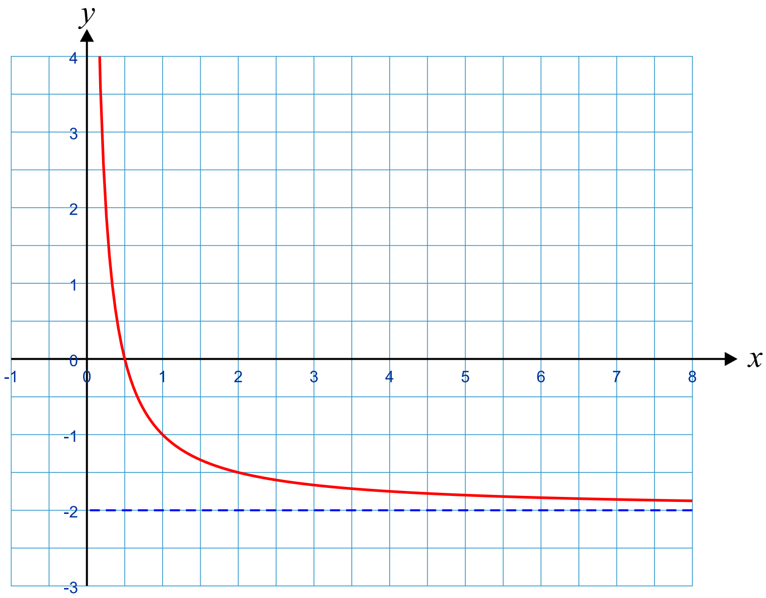
(d)



(e)



(f)



3.6 Funktionsundersøgelser

Opgave 341

Lad $f(x) = 0{,}05 \cdot x^3 - 0{,}3 \cdot x^2 - 1{,}8 \cdot x + 3$. Foretag en funktionsundersøgelse af funktionen i forhold til de punkter, som er omtalt i afsnit 3.6.

Opgave 342

Lad $f(x) = x - \dfrac{3}{x^2}$.

Foretag en funktionsundersøgelse af funktionen i henhold til de underpunkter, som er omtalt i afsnit 3.6.

Opgave 343

Lad $f(x) = 0{,}015 \cdot x^4 - 0{,}2 \cdot x^3 + 0{,}57 \cdot x^2 + 1{,}8 \cdot x - 5$. Foretag en funktionsundersøgelse af funktionen i henhold til de underpunkter, som er omtalt i afsnit 3.6.

Opgave 344

Lad $f(x) = x^4 \cdot e^{-x}$. Foretag en funktionsundersøgelse af funktionen i henhold til de underpunkter, som er omtalt i afsnit 3.6.

Opgave 345

Lad $f(x) = \sin(x) + \sin(2x)$, $x \in [0, 2\pi]$. Foretag en funktionsundersøgelse af funktionen i henhold til de underpunkter, som er omtalt i afsnit 3.6.

Opgave 346

Lad $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 3x}$.

Foretag en funktionsundersøgelse af funktionen i henhold til de underpunkter, som er omtalt i afsnit 3.6.

Opgave 347

Lad $f(x) = x \cdot \left(4 - \sqrt{x}\right)$, $x \in [0, 20]$. Foretag en funktionsundersøgelse af funktionen i henhold til de underpunkter, som er omtalt i afsnit 3.6.

Opgave 348

Bestem definitionsmængden for nedenstående funktioner.

a)	$f(x) = x^4 - 4x + 1$	e)	$f(x) = e^{2x-5}$
b)	$f(x) = e^x + 2x + 1$	f)	$f(x) = 3 \cdot x^{-3}$
c)	$f(x) = x \cdot \ln(x)$	g)	$f(x) = \tan(x)$
d)	$f(x) = 2x + \dfrac{3}{x-5}$	h)	$f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$

Opgave 349

Bestem definitionsmængden for nedenstående funktioner.

a)	$f(x) = x^{1.28}$	e)	$f(x) = 1{,}45^x$
b)	$f(x) = \sqrt{x} + \sin(x)$	f)	$f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$
c)	$f(x) = x^2 - 23x + 57$	g)	$f(x) = \ln(2x - 10)$
d)	$f(x) = \sin\left(\sqrt{x}\right)$	h)	$f(x) = \dfrac{2x}{x^2 - 5x + 6}$

Opgave 350

Bestem værdimængden for hver af nedenstående funktioner.

a) $f(x) = -0{,}2x^4 + 20x + 6,\ x \in [-2, 6]$

b) $f(x) = \dfrac{10}{x^2+4}$, $x \in [-2, 3]$

c) $f(x) = x \cdot (8 - x^2)$, $x \in [-3, 4[$

d) $f(x) = \sqrt{x+5} + \dfrac{1}{x}$, $x \geq -5$

Opgave 351

Lad $f(x) = -x^3 + 4x^2 - 3x - 5$. Bestem ligningen for tangenten til grafen for *f* i det punkt, hvor grafen skærer *x*-aksen.

Opgave 352

Bestem eventuelle lodrette og vandrette asymptoter til hver af funktionerne nedenfor.

a) $f(x) = \dfrac{2}{x}$

b) $f(x) = \dfrac{1}{3-2x}$

c) $f(x) = e^x - 3$

d) $f(x) = \ln(x) + 3x$

e) $f(x) = \dfrac{2}{x \cdot (x+5)}$

f) $f(x) = \dfrac{1}{1+e^{-x}}$

g) $f(x) = e^x$

h) $f(x) = \dfrac{6}{x^2+2x+1}$

Opgave 353*

Redegør for hvorfor grafen for $f(x) = \dfrac{x^2}{4-x^2}$ er symmetrisk omkring *y*-aksen.

Opgave 354

Givet funktionen $f(x) = -0.25x^3 + 2x^2$.

a) Bestem en ligningen for tangenten til grafen for *f* i punktet $P_0(-1, f(-1))$.

Grafen har en anden tangent, som har samme hældning som tangenten fra a).

b) Bestem en ligning for den anden tangent.

Opgave 355

Aflæs eventuelle (globale) ekstrema for funktionerne, hvis grafer er vist i opgave 340. Angiv desuden funktionernes værdimængder.

Opgave 356

Bestem de lokale ekstrema (både steder og værdier) for nedenstående funktioner. Tegn også grafen for funktionerne i et passende interval for en ekstra kontrol.

a) $f(x) = -x^5 + x^3$. Hvad er der i $x = 0$?

b) $f(x) = \cos(x) - \frac{1}{2}x$, $x \in [0, 2\pi]$.

c) $f(x) = -x^2 + \dfrac{1}{x-1}$.

d) $f(x) = (2x-7) \cdot e^{-x}$

Opgave 357

Bestem De lokale ekstrema (både steder og værdier) for $f(x) = 0{,}1x^3 - 0{,}5x^2$.

Opgave 358

Lad $f(x) = x^2 \cdot \ln(x) - 1$.

a) Bestem en ligning for tangenten til grafen for *f* i punktet $P_0(0{,}75;\, f(0{,}75))$.

b) Hvor skærer tangenten *x*-aksen?

c) Hvilken vinkel danner tangenten i forhold til *x*-aksen?

Opgave 359

Nedenfor er angivet fortegnslinjerne for f' for fire forskellige funktioner. Hvad siger de hver især om funktionen m.h.t. monotoniintervaller, lokale ekstrema med mere?

(a)

x		3		10	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

(b)

x		5,7	
$f'(x)$	$+$	0	$-$

(c)

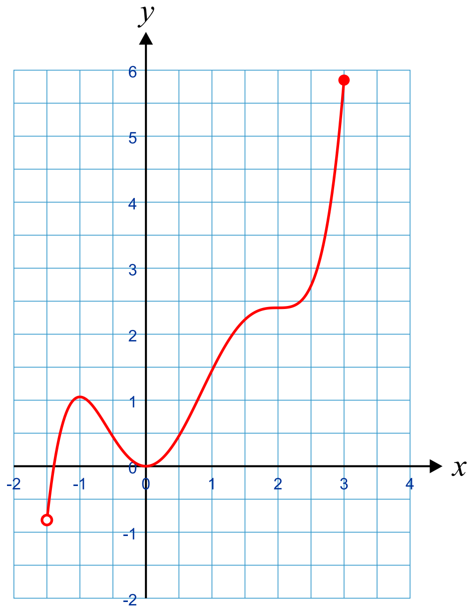
x		-2		3		6		11	
$f'(x)$	i.d.		$-$	$\vdots$	$-$	0	$+$		i.d.

(d)

x		-1		3		7		10	
$f'(x)$	i.d.		$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Opgave 360

Figuren til højre forestiller grafen for en funktion. Lav en fortegnslinje for f', som svarer til grafen. Angiv desuden monotoniintervallerne og de lokale ekstrema. Er der andet?



Opgave 361

Tegn graferne for fire mulige funktioner, som kan have de fortegnslinjer for f', som kan ses i opgave 359.

3.7 Lær at bruge solve i en mere avanceret kontekst

Opgave 362

Lad $f(x) = x^2$. Bestem parameteren a, så $y = a \cdot x - 4$ er en tangent til grafen for f.

Opgave 363

Lad $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1$. Bestem a, så linjen $y = 1{,}5x + a$ er en tangent til grafen for f.

Opgave 364

Givet funktionen $f(x) = e^{-x} + a \cdot x$. Bestem a således at grafen for funktionen f går igennem punktet $(4,1)$.

Opgave 365

Lad $f(x) = 4 \cdot \sqrt{x} - \frac{1}{2}x$. Bestem a, så linjen $y = 0.75 \cdot x + a$ er en tangent til grafen for f. Tegn desuden grafen og tangenten i samme koordinatsystem.

Opgave 366

Givet funktionen $f(x) = x^3 + a \cdot x + 15$. Det oplyses nu, at f har et lokalt minimum i punktet $x = 2$. Bestem parameteren a, og tegn grafen for f for den pågældende værdi af a.

Opgave 367

Lad $f(x) = -x^3 + 2x^2 - x + a$. Det oplyses, at funktionen har netop 2 nulpunkter. For hvilke værdier af a har funktionen netop to nulpunkter?

Opgave 368

Givet funktionen $f(x) = \sqrt{1 + \frac{1}{2}x^2}$. En tangent til grafen går igennem punktet $(4, 2)$. Bestem en ligning for tangenten.

3.8 Regneregler for differentiation

Opgave 369

Bevis b) og c) i sætning 3.41, idet du bruger samme metode, som i beviset for a). *Hjælp*: Omskriv differenskvotienten for den relevante funktion i stil med (17) i omtalte bevis.

Opgave 370*

Forsøg at give et bevis for kvotientreglen for differentiation i sætning 3.45 idet du tager ved lære af bevisteknikken fra sætning 3.44 med produktreglen.

Opgave 371

Benyt produktreglen for differentiation i sætning 3.44 til at vise følgende:

a) $(x^5)' = 5 \cdot x^4$

b) $(x^{-2})' = -2 \cdot x^{-1}$

Hjælp: Til a): Se eksempel 3.46. Til b): Bemærk, at $x^{-1} = 1/x$, hvorfor du kan bruge, at du kender differentialkvotienten for x^{-1} fra sætning 3.8 …

Opgave 372* (Induktionsbevis)

Giv et formelt bevis for sætning 3.47 for alle $n \in N$, altså for alle positive heltal. Du skal udføre et såkaldt *induktionsbevis*, hvormed menes en metode, hvor man viser, at *hvis* sætningen gælder for *n*, så gælder den også for $n+1$. Har man klaret det, så ved man, at hvis sætningen gælder for én positiv værdi af *n* så gælder den også i tilfældet, hvor *n* er én højere. Det kræver selvfølgelig, at *starten* er i orden, dvs. at man først kan vise (eller evt. allerede ved), at sætningen gælder for den første værdi af *n* dvs. $n = 1$. Altså brug metoden antydet i eksempel 3.46, dvs. anvend produktreglen: $(x^{n+1})' = (x^n \cdot x)' = \ldots$.

Opgave 373

Benyt sætning 3.41 om sumreglen, differensreglen og konstantreglen for differentiation til at udregne følgende differentialkvotienter. Forkort mest muligt.

a) $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x}$ c) $6x + 5 + \sqrt{x}$ b) $f(x) = 10 \cdot \sqrt{x}$ d) $f(x) = \dfrac{4}{x}$

Opgave 374

Differentier manuelt følgende funktioner ved brug af produktreglen for differentiation:

a) $f(x)=x\cdot\sqrt{x}$ b) $f(x)=(4x^2-3)\cdot\sqrt{x}$

Opgave 375

Differentier nedenstående polynomier.

a) $f(x)=x^2+3x-6$

b) $f(x)=x^3+1$

c) $f(x)=2x^4-x^3+8x^2+5x-1$

d) $f(x)=-4x^3+10x^2-x+7$

e) $f(x)=\frac{1}{2}x^4+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x$

f) $f(x)=2{,}6x^2-0{,}7x+2{,}7$

Opgave 376

Differentier manuelt nedenstående funktioner hvori der indgår negative eksponenter af x.

a) $f(x)=x^{-3}$ b) $f(x)=x-x^{-1}$ c) $f(x)=-2x^{-2}+4x^{-3}$ d) $f(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x^{-2}$

Opgave 377

Differentier nedenstående polynomier manuelt.

a) $f(x)=-x^2+3x$

b) $f(x)=2x^6-x^3+7$

c) $f(x)=2x^3-3x^2+6x+8$

d) $f(x)=x-0{,}3x^5$

Opgave 378

Benyt differentialregning til manuelt at bestemme toppunktet for nedenstående andengradspolynomier (jf. eksempel 3.50).

a) $p(x)=0{,}5x^2-6x+2$ b) $p(x)=-x^2-4x+10$

Opgave 379

Differentier manuelt nedenstående sammensatte funktioner ved hjælp af sætning 3.51.

a) $f(x)=\sqrt{x^3+2x-1}$

b) $f(x)=(4x^2-5x+7)^5$

c) $f(x)=\dfrac{3}{x^2+5}$

d) $f(x)=(\sqrt{x}+5)^{-2}$

Opgave 380

Differentier manuelt funktionen $\dfrac{1}{x^2+6}$ både ved hjælp af reglen om differentiation af sammensat funktion og ved hjælp af kvotientreglen. Får du det samme?

3.9 Differentiation af specielle funktioner

Opgave 381* (Differentiation af invers funktion – og differentialkvotienten af $\ln(x)$)

I det følgende præsenteres en sætning, som udtaler sig om, hvordan man differentierer den inverse funktion til en funktion, der opfylder visse kriterier.

a) Forsøg at forstå sætningen og eksemplet på anvendelsen af den – vist nedenfor.

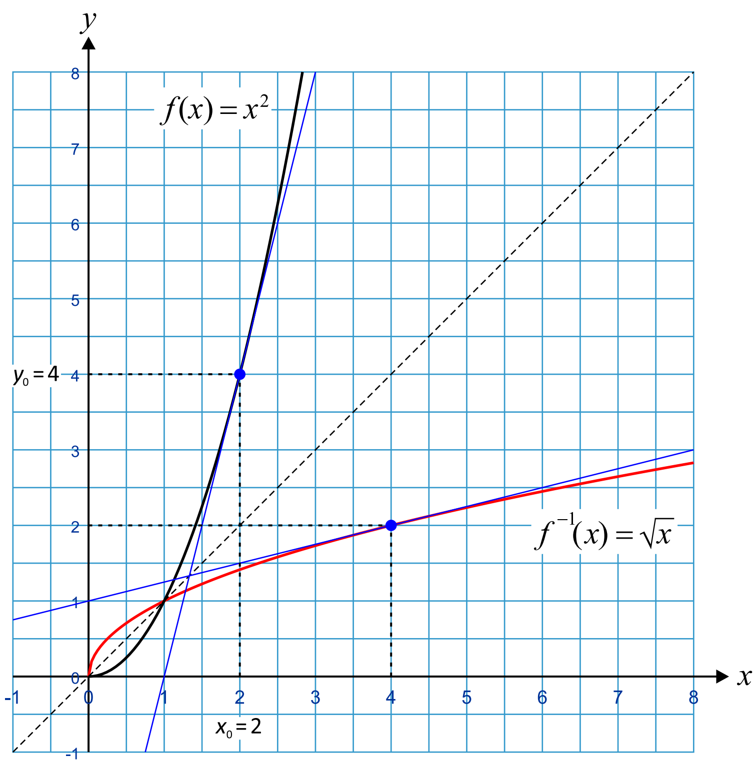
b) Benyt teknikken fra a) til at vise, at $(\ln(x))' = 1/x$, $x > 0$, idet du udnytter, at den inverse til $\ln(x)$ er e^x samt at $(e^x)' = e^x$.

Sætning om differentiation af invers funktion

Lad f være en funktion, som er differentiabel og *monoton* (voksende eller aftagende) i et åbent interval I. Den omvendte funktion f^{-1} er da netop differentiabel i de punkter $y_0 = f(x_0)$, for hvilket $f'(x_0) \neq 0$, og der gælder:

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Vi skal ikke bevise sætningen, blot forsøge at sandsynliggøre den grafisk. Den antages, at læseren er bekendt med begrebet *invers* (omvendt) funktion, som gennemgået i afsnit 1.5 i kapitel 1. Et klassisk eksempel er $f(x) = x^2$, $x > 0$. Det er en voksende og dermed monoton funktion. Den inverse findes ved at isolere x i forskriften: $y = x^2 \Leftrightarrow \sqrt{y} = x$. Da $x = f^{-1}(y)$ har vi forskriften $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$. Definitionsmængden for den inverse funktion er lig med definitionsmængden for den oprindelige: $Dm(f^{-1}) = Vm(f) = \left]0,\infty\right[$.



Hvis vi vil have differentialkvotienten for den inverse funktion f^{-1} i et $y \in Vm(f)$, så bestemmes $x = f^{-1}(y)$. Derefter beregnes $f'(x)$, og den reciprokke værdi heraf udregnes. I vores eksempel haves $f'(x) = 2x$.

$$\left(f^{-1}\right)'(y) \;=\; \frac{1}{f'(x)} \;=\; \frac{1}{2x} \;=\; \frac{1}{2\cdot\sqrt{y}}$$

hvor vi i sidste skridt er gået tilbage til den oprindelige variabel *y*. Bemærk, at det ikke betyder noget, at man efter udledningen ovenfor udskifter *y* med *x*, bare det gøres både på venstre og højre side af lighedstegnet: $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ og $(f^{-1})'(x) = 1\big/(2\cdot\sqrt{x})$. Hvad den variable kaldes er ligegyldig!

Rent grafisk ser vi, at hældningen af tangenten til grafen for f^{-1} i 4 er lig med den reciprokke værdi af hældningen af tangenten til grafen for *f* i $f^{-1}(4) = 2$. Begge tangenter er indtegnet på figuren. Bemærk at der er symmetri omkring diagonalen $y = x$.

Opgave 382

Benyt produktreglen til at bestemme differentialkvotienterne til funktionerne nedenfor:

a) $f(x) = 2x\cdot\cos(x)$ b) $f(x) = 3x^2\cdot e^x$ c) $f(x) = \sin(x)\cdot\cos(x)$

d) $f(x) = x\cdot\ln(x)$ e) $f(x) = (2x-1)\cdot e^x$ f) $f(x) = e^{-2x}\cdot\sin(x)$

Opgave 383

Benyt kvotientreglen til at bestemme differentialkvotienterne til funktionerne nedenfor:

a) $f(x) = \dfrac{3x}{x+1}$ b) $f(x) = \dfrac{x}{\ln(x)}$ c) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2+5}$

d) $f(x) = \dfrac{1}{\sin(x)}$ e) $f(x) = \dfrac{\cos(x)-1}{\sin(x)}$ f) $f(x) = \dfrac{e^{3x}-x}{x^2}$

Opgave 384

Benyt reglen for differentiation af sammensat funktion til at bestemme differentialkvotienterne til funktionerne nedenfor:

a) $f(x) = \sqrt{2x+3}$ b) $f(x) = (4x^3-2x^2-1)^5$ c) $f(x) = \cos(x^2)$

d) $f(x) = \ln(x^3)$ e) $f(x) = \tan(x-\frac{\pi}{3})$ f) $f(x) = e^{-x^2+x}$

Opgave 385*

For manuelt at bestemme differentialkvotienten til nedenstående funktioner skal du bruge mindst to differentiationsregler.

a) $f(x) = x\cdot\sqrt{x^2-4}$ b) $f(x) = x\cdot e^{x^2}$ c) $f(x) = x\cdot\cos(4x)$

Opgave 386

Bestem differentialkvotienten til funktionen $f(x)=(\sin(x))^2$ på to måder: dels ved hjælp af produktreglen, dels ved hjælp af reglen for differentiation af sammensat funktion.

Opgave 387

Bestem differentialkvotienten for funktionen $f(x)=2x^2\cdot\sqrt{x}$ på to måder, ligesom i eksempel 3.62. Får du det samme ved de to metoder?

Opgave 388

Blandede opgaver. Bestem manuelt differentialkvotienterne til nedenstående funktioner ved brug af regnereglerne fra afsnit 3.8 og viden om differentialkvotienterne for standardfunktionerne fra dette afsnit 3.9 samt forrige afsnit.

a) $f(x)=x^4-12x^2-3x+7$	b) $f(x)=x\cdot e^x$	c) $f(x)=x^2\cdot\sin(x)$
d) $f(x)=10x^3+\ln(x)$	e) $f(x)=\ln(x^3-x)$	f) $f(x)=5x^3+15x-1$
g) $f(x)=x^4-2\cdot\cos(x)$	h) $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$	i) $f(x)=\dfrac{x^3+1}{x}$
(j) $f(x)=\sqrt{x-x^2}$	k) $f(x)=x^{-3}$	l) $f(x)=e^x\cdot(1-x)$
m) $f(x)=x^{2,15}$	n) $f(x)=2{,}15^x$	o) $f(x)=\ln(5x+5)$
p) $f(x)=\dfrac{x}{e^x}$	q) $f(x)=x\cdot e^{2x}$	r) $f(x)=5\cdot\exp(-5x)$

Opgave 389

Bestem manuelt differentialkvotienterne for flg. funktioner i de angivne punkter:

a) $f(x)=2x^2$. Bestem $f'(3)$.	b) $f(x)=x^3-2x^2+1$. Bestem $f'(2)$.
c) $f(x)=\sqrt{x}$. Bestem $f'(4)$.	d) $f(x)=\dfrac{3}{x}$. Bestem $f'(-2)$.
e) $f(x)=x\cdot e^x$. Bestem $f'(0)$.	f) $f(x)=\cos(x)$. Bestem $f'(\frac{\pi}{2})$.
g) $f(x)=e^{3x}$. Bestem $f'(0)$.	h) $f(x)=2x+\sqrt{x}$. Bestem $f'(1)$.

Opgave 390

Bestem med CAS-værktøj en ligning for tangenten til grafen for den angivne funktion i det angivne punkt på grafen.

a) $f(x)=\ln(x^2-1)$, $P_0(2,f(2))$. Angiv med tre decimalers nøjagtighed.

b) $f(x)=\sqrt{x^2+4}$, $P_0(1,f(1))$. Angiv med tre decimalers nøjagtighed.

Opgave 391* (En funktion, som er differentiabel, men ikke kontinuert differentiabel)

Betragt funktionen $f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{for} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{for} \quad x = 0 \end{cases}$

Bemærk, at gaffelforskriften er nødvendig, hvis man ønsker 0 med i definitionsmængden. Funktionen er klart differentiabel i alle punkter forskellig fra 0. Spørgsmålet er, om den også er differentiabel i $x_0 = 0$.

a) Vis at funktionen faktisk er differentiabel i $x_0 = 0$ med differentialkvotient $f'(0) = 0$. *Hjælp*: Opskriv et udtryk for differenskvotienten i $x_0 = 0$ og vis, at den har en grænseværdi for $\Delta x \to 0$, altså for $x \to 0$.

b) Vis, at f' ikke er kontinuert i $x_0 = 0$. *Hjælp*: Benyt produktreglen for differentiation på den øverste komponent i gaffelforskriften og vis, at den går imod ∞ for $x \to 0$.

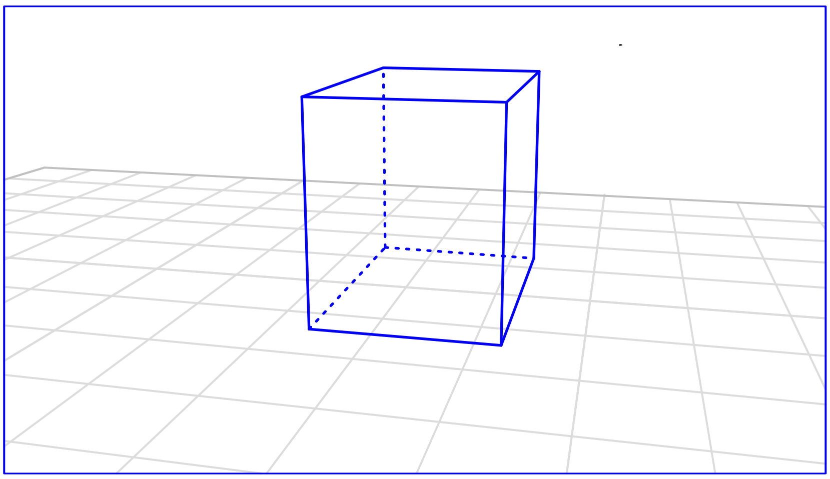
c) Benyt et CAS-værktøj til at plotte grafen i området $-0{,}4 \leq x \leq 0{,}4$ og $-0{,}1 \leq y \leq 0{,}1$. Sørg for ens skalering på akserne. Måske skal du bede dit CAS-værktøj om at regne med ekstra mange punkter. Prøv at forstå de teoretiske resultater fra a) og b) grafisk. NB! Bemærk, at grafen har *indhyllingskurverne* givet ved graferne for x^2 og $-x^2$.

3.10 Anvendelser af differentialregning

Opgave 392

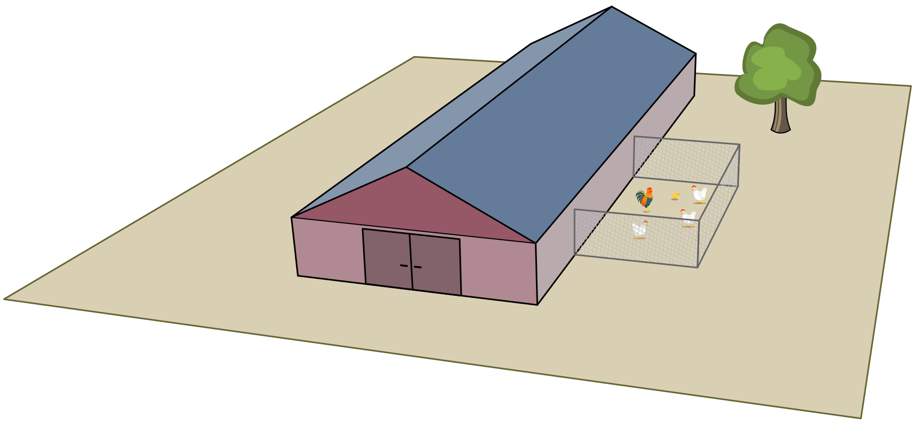
En container i form af en rektangulær kasse skal have et rumhfang på 12 m^3, og længden skal være 1,5 gange så lang som bredden. Bestem de optimale dimensioner på kassen, så overfladearealet bliver mindst muligt.

Hjælp: Kald bredden for x. Hvad er så længden? Højden betegnes h. Udtryk højden ved hjælp af x, idet oplysningen om rumfanget udnyttes. Bestem et udtryk for overfladerealet af kassen og udnyt sammenhængen mellem h og x til at lave en overfladefunktion, som kun afhænger af x, dvs. en funktion $Over(x)$. Bestem mindsteværdien for denne funktion.

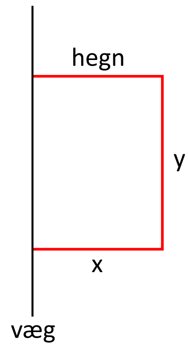


Opgave 393

Gårdmand Jacobsen ønsker at lave et hønsehus. Det skal være rektangulært, og væggen på hans lade skal fungere som den ene side. Han har i alt 24 meter hegn at gøre godt med og skal få det bedste ud af det. Han vil gerne have et så stort areal til hønsene som muligt. Besvar nedenstående delspørgsmål med henblik på at bestemme de optimale dimensioner for hønsegården.



Kald siderne i rektanglet for henholdsvis x og y, som angivet på figuren.



a) Sammenhæng mellem x og y.

Brug oplysningen om hegnets længde til at opstille en ligning. Denne *binding* kan bruges til at bestemme y som funktion af x.

b) Areal som funktion af x.

Opskriv et udtryk for arealet at hønsegården udtrykt ved x og y. Benyt derefter sammenhængen mellem x og y fra delspørgsmål a) til at finde et udtryk for arealet, hvor kun den variable x indgår. Det giver en funktion, som vi kan kalde $A(x)$.

c) Bestem definitionsmængden for arealfunktionen A.

d) Maksimum for funktionen $A(x)$.

Brug differentialregning til at bestemme størsteværdien for $A(x)$. Bestem det x, for hvilket arealet bliver størst muligt. Hvor stort er dette areal? Angiv de optimale dimensioner for hegnet.

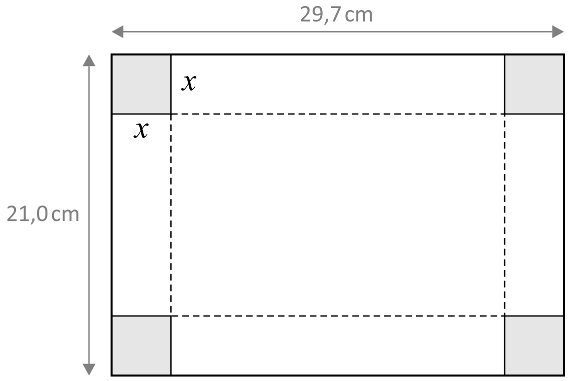
Opgave 394

Der skal produceres en cylinderformet beholder med bund, men uden låg. Rumfanget skal være på 2000 cm^3. Bestem det optimale valg af radius og højde for beholderen således, at overfladearealet af bunden og den krumme overflade samlet set er mindst muligt.

Hjælp: Se eksempel 365. Denne gang er der bare ikke noget låg på!

Opgave 395

Karen ønsker at lave en kasse af et stykke karton i A4 format. Fire ens kvadrater i arkets hjørner skæres væk, hvorefter kanterne foldes op. Betegn sidelængden i kvadraterne med den variable x.



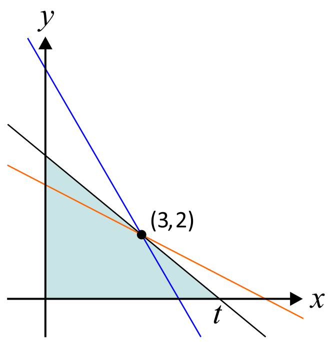
a) Vis at kassens volumen udtrykt ved x er lig med $V(x) = (21{,}0 - 2x)\cdot(29{,}7 - 2x)\cdot x$.

b) Hvad er definitionsmængden for volumen-funktionen?

c) Bestem den værdi for x, for hvilket kassen opnår det største rumfang. Hvor stort er dette rumfang?

Opgave 396*

En linje, der har negativ hældning og som passerer igennem punktet (3,2), vil sammen med x-aksen og y-aksen afskære en trekant. Dette er vist for den sorte linje nedenfor. Men der er mange andre linjer, som opfylder de to betingelser. Vi kan entydigt karakterisere en linje ved dens skæringspunkt med x-aksen. Vi kalder skæringspunktet for $(t,0)$. Spørgsmålet er, hvilken eller hvilke linjer, som giver anledning til det *mindste* trekant-areal?



a) Vis at den linje, der skærer x-aksen i $(t,0)$ og går igennem (3,2), har følgende ligning:

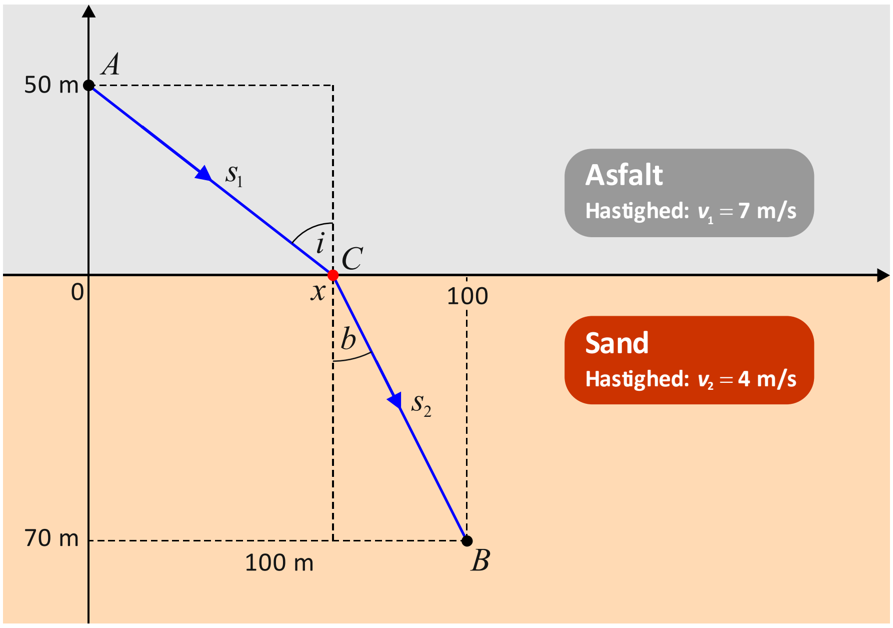
$$y = -\frac{2}{t-3}\cdot x + \frac{2t}{t-3} \quad \text{,hvor } t > 3$$

b) Vis at arealet af trekanten for den linje, der skærer x-aksen i $(t,0)$, er givet ved $\dfrac{t^2}{t-3}$.

c) Betragt arealet som en funktion af t og foretag en funktionsundersøgelse med henblik på at bestemme den værdi for t, som giver det mindste areal.

Opgave 397* (Hurtigste løb – brydningsformlen)

I en konkurrence gælder det om at løbe hurtigst fra A til B. Den første del af løbet foregår på asfalt, hvor løberen kan opretholde en fart på 7 m/s. Derefter går det over til løb i sand, hvor hastigheden kun er 4 m/s. Spørgsmålet er, hvilken vej, det er mest fordelagtigt at løbe fra A til B. Det gælder om at finde det punkt C på overgangen mellem asfalt og sand, hvor det er bedst at passere. I hver af medierne er det derefter bedst at vælge den lige vej (overvej hvorfor!). Vi kalder 1. koordinaten for punktet C for x. De øvrige mål fremgår af figuren nedenfor. Tiden er som bekendt givet ved strækningen divideret med hastigheden, og strækningen findes ved hjælp af Pythagoras' sætning.



a) Argumentér for hvorfor tiden det tager at gennemløbe $A \to B \to C$ er givet ved følgende udtryk i den variable x, idet SI-enheder er underforstået:

$$T(x) \;=\; \frac{\sqrt{x^2+50^2}}{7} \;+\; \frac{\sqrt{(100-x)^2+70^2}}{4}$$

b) Benyt differentialregning til at bestemme den værdi af x, som giver anledning til den korteste passagetid ($0 \le x \le 100$).

c) Lad $x_{\min}$ være den værdi for x, som blev bestemt i delspørgsmål b). For denne værdi af x ønskes vinklerne i og b på figuren bestemt.

d) Med de fundne værdier for vinklerne i og b fra spørgsmål c): Vis at følgende formel er opfyldt, hvor v_1 er hastigheden i medium 1, og v_2 er hastigheden i medium 2:

$$\frac{\sin(i)}{\sin(b)} \;=\; \frac{v_1}{v_2}$$

NB! Måske minder formlen fra d) dig om brydningsformlen fra fysik? I så fald er du på rette spor. Man kan nemlig vise, at den måde lyset bryder fra et medium til et andet, fx fra luft til glas, netop er den, som giver anledning til den *hurtigste* passagetid!

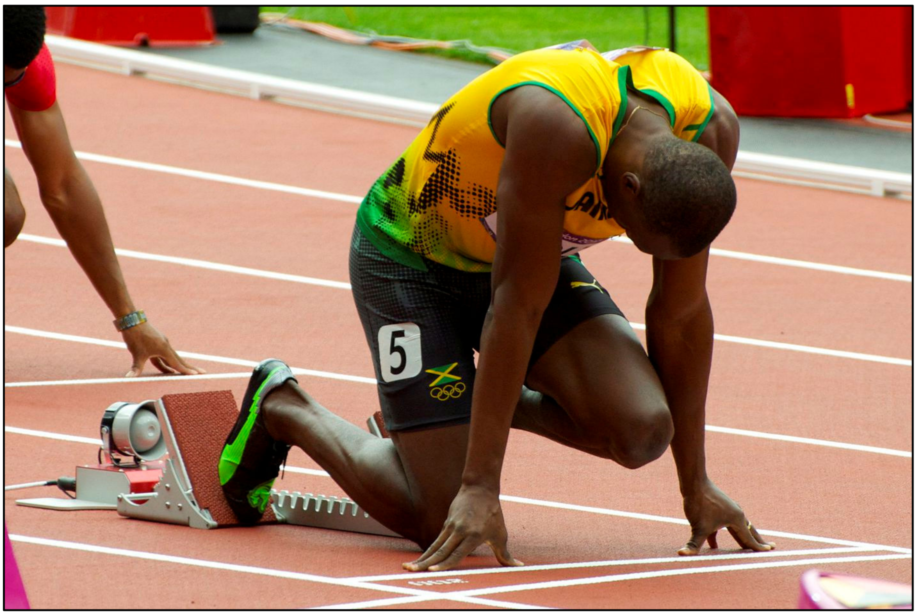
□

Opgave 398 (Usain Bolts verdensrekordløb)

Vi skal i denne opgave analysere det 100 meterløb, hvor Usain Bolt den 16. august 2009 satte verdensrekord. Tabellen på næste side indeholder en række data fra løbet i form af sammenhørende værdier af tid og tilbagelagt afstand.

Tid (s)	0,16	0,36	0,71	0,99	1,22	1,71	2,13	2,60	3,06	3,51	3,95	4,53
Afstand (m)	0,06	0,63	2,28	3,84	5,21	8,66	12,37	17,22	21,96	26,85	31,81	38,80

Tid (s)	5,10	5,59	6,09	6,57	7,10	7,52	8,03	8,31	8,77	9,10	9,58	
Afstand (m)	45,58	51,52	57,58	63,46	69,88	75,06	81,34	84,76	90,24	94,22	100	



a) Foretag i stil med hvad der blev gjort i eksempel 3.70 et fit med et fjerdegradspolynomium. Bestem forskriften for dette regressionspolynomium. Afbild punkter og polynomium i samme koordinatsystem. Hvor godt er fittet?

b) Bestem en forskrift for hastighedsfunktionen $v(t) = s'(t)$ og tegn en graf for den.

c) Bestem værdier for hastighederne til tidspunkterne 0,50 s og 7.00 s.
Grafen fra b) viser, at Usain Bolt omkring midtvejs opnår en lokal tophastighed, hvorefter hastigheden aftager lidt for til slut at vokse igen.

d) Bestem tidspunktet for, hvornår den lokale tophastighed opnås. Hvor langt er han da kommet? Hvad kan du sige om accelerationen til dette tidspunkt?

e) Bestem hastigheden lige, da han passerer 100 meter-mærket.

Opgave 399 (Influenza-epidemi)

Den logistiske vækst (50) fra kapitel 3 kan under visse forudsætninger benyttes som en rimelig model til at beskrive udviklingen af antal sygdomsramte ved en influenza-epidemi i en landsby. Det antages, at sygdommen ikke er dødelig. Det oplyses, at der i en by med 5000 indbyggere til tiden 0 er 1 person med influenza. Efter 5 dage er der i alt 6 influenzaramte.

a) Vis at antal influenza-ramte kan beskrives ved følgende funktion:

$$N(t) = \frac{5000}{1+4999\cdot e^{-0,35855\cdot t}}$$

hvor t er tiden regnet i dage og $N(t)$ angiver antal influenza-ramte. *Hjælp*: Udnyt at antal influenza-ramte må konvergere mod 5000, når tiden går imod uendelig – dvs. at alle i byen før eller senere vil blive ramt. M er med andre ord 5000. Udnyt dernæst de to andre oplysninger til at bestemme de to øvrige konstanter c og a i den logistiske vækst i (50) fra kapitel 3.

b) Benyt forskriften fra a) til at bestemme antal influenza-ramte efter 30 dage.
c) Hvornår er 4000 indbyggere i byen ramt af influenza?
d) Bestem den hastighed, hvormed folk smittes til tidspunktet 20 dage.
e) Bestem det tidspunkt, hvor indbyggere smittes hurtigst.
f) Tegn grafen for $N(t)$ i intervallet $0 \le t \le 50$.
g) Overvej hvilke forudsætninger der mon ligger til grund for modellen? Hvad kan for eksempel forhindre at modellen holder stik? Prøv desuden at give et bud på, hvorfor det er rimeligt, at grafen fra f) ser ud som den gør. Tænk på smittespredningen …

Opgave 3100 (Newtons afkølingslov)

Newtons afkølingslov siger, at temperaturen af en væske i en beholder vil aftage med en hastighed, som er proportional med væskens temperaturforskel i forhold til omgivelserne. Man kan vise, at det giver anledning til, at temperaturen aftager som en *forskudt eksponentiel* funktion af tiden. I et konkret tilfælde har vi en kop kaffe, hvor kaffens temperatur udvikler sig på følgende måde:

$$T(t) = 54{,}6 \cdot e^{-0{,}047 \cdot t} + 23{,}3$$

hvor t er tiden regnet i minutter og funktionsværdien er temperaturen i °C.

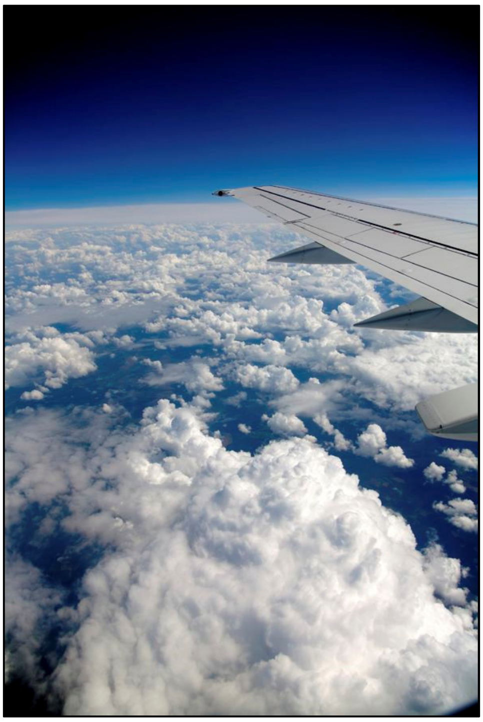
a) Hvilken hastighed falder kaffens temperatur med til tidspunkterne henholdvis 5 min. og 40 min.? Tegn desuden en graf for temperaturen som funktion af tiden.
b) Hvornår er den hastighed, hvormed kaffens temperaturen aftager, faldet til 1°C/min?
c) Hvad sker der med funktionen, når $t \to \infty$? Stemmer det med virkeligheden?

Opgave 3101* (Logistisk vækst teoretisk set)

I eksempel 3.71 omhandlende logistisk vækst blev det påstået, at væksten er størst til det tidspunkt $t_{\max}$, hvor $N(t_{\max}) = \frac{1}{2}M$, jf. (53) i kapitel 3. Eftervis det. Vis desuden, at denne maksimale hastighed er givet ved $N'(t_{\max}) = \frac{1}{4} \cdot M^2 \cdot a$.

Hjælp: Du kan bruge dit CAS-værktøj til at regne med bogstaver. Tidspunktet du søger efter er der, hvor $N''(t) = 0$ (hvorfor mon?). Udnyt dette til at finde tidspunktet.

Opgave 3102 (Tryk i atmosfæren)



Som bekendt aftager trykket p, når man bevæger sig opad i atmosfæren. I Tropossfæren, som er den nederste del af atmosfæren, har man denne model for trykkets variation med højden:

$$p(h) \;=\; p_0 \cdot \exp\left(\frac{-M \cdot g \cdot h}{T_0 \cdot R} \right)$$

hvor g er tyngdeaccelerationen 9,82 m/s^2, T_0 er standardtemperaturen ved havniveau: 288,15 K, R er gaskonstanten 9,3145 J/(mol·K) og p_0 er almindeligt tryk ved havniveau: 101325 Pa, som er det samme som 1 atm. Højden h regnes i meter (m), og M er molarmassen for atmosfærisk(tør) luft: 0,02896 kg/mol. Trykket p fås i Pascal (Pa). Her skal det tilføjes, at der gælder: 1 atm = 101325 Pa.

a) Bestem den hastighed, hvormed trykket aftager med højden i højden 10 m. Samme spørgsmål i højden 6000 m. Giv desuden en sproglig fortolkning af værdierne.

b) Funktionen $p(h)$ er en eksponentielt aftagende funktion. Bestem halveringskonstanten for funktionen. Hvad fortæller den? Tegn desuden grafen for funktionen i området $0 \le h \le 12000$. Tropossfæren på vores breddegrad har en tykkelse på 12 km.

c) Hvor lavt er trykket ifølge modellen på toppen af Mount Everest (højde: 8848 m)?

Opgave 3103

Der er andre modeller i biologi end den logistiske (50) fra kapitel 3, også kaldet for den logistiske vækst med 3 parametre. Der findes også udgaver af den logistiske vækst med 4 og 5 frie parametre. Derudover er der *Gompertz model*. Sidstnævnte studeres blandt andet i forbindelse med væksten af *Cerastium Diffusum L.* (*Caryophyllaceae*) i artiklen:

How to fit nonlinear plant growth models and calculate growth rates: an update for ecologists, af C. E. Timothy Paine, Toby R. Marthews m. fl., Methods in Ecology and Evolution 2012, 3, 245–256.

Omtalte plante er i øvrigt fra Nellike-familien.

Gompertz-modellen har ligeledes tre parametre og ser således ud:

$$G(t) = a \cdot \exp(-b \cdot \exp(-c \cdot t))$$

Det viser sig, at modellen er en rimelig god model for udviklingen af biomassen (målt i gram) for ovennævnte plante som funktion af tiden t målt i dage. Lad parametrene være givet ved $a = 6{,}6$; $b = 9{,}0$; $c = 0{,}0305$.

a) Hvor stor er væksthastigheden i biomasse efter 100 dage? Samme spørgsmål til tidspunktet 150 dage?
b) Bestem det tidspunkt, hvor biomassen vokser hurtigst. Kald tidspunktet $t_{\max}$.
c) Hvad vil biomassen nærme sig til, når tiden går mod uendelig?
d) Hvor stor er biomassen af planten til tidspunktet $t_{\max}$, og hvor stor en procentdel udgør den af grænse-biomassen fra delspørgsmål c).

   NB! Bemærk, at havde det været den logistiske vækst med 3 parametre, ville svaret have været 50%, jf. (53) fra kapitel 3.

Opgave 3103

Med hvilken hastighed vokser volumenet af en kugle som funktion af radius?

Hjælp: Husk at rumfanget af en kugle er givet ved formlen $V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$, hvor r er radius. Svaret afhænger åbenlyst af r. Hvad er svaret i tal-værdier, hvis radius er 1 m og hvis radius er 10 m?

Oversigt i differentialregning

Nedenfor en oversigt over regneregler i differentialregning. Det er her forudsat, at f og g er differentiable funktioner, og at k er en konstant. I nogle af formlerne er der ekstra forudsætninger, men vi forbigår dem her, da det kun er en oversigt. De ekstra betingelser er ofte selvindlysende. Se evt. i hovedteksten.

Navn	Regneregler i differentialregning
Sumregel	$(f+g)'(x) = f'(x)+g'(x)$
Differensregel	$(f-g)'(x) = f'(x)-g'(x)$
Konstantregel	$(k\cdot f)'(x) = k\cdot f'(x)$
Produktregel	$(f\cdot g)'(x) = f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$
Kvotientregel	$\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x) = \dfrac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{(g(x))^2}$
Differentiation af sammensat funktion	$(f\circ g)'(x) = f'(g(x))\cdot g'(x)$

Tabel over differentialkvotienter for elementære funktioner:

$f(x)$	$f'(x)$
k	0
x	1
x^2	$2x$
$a\cdot x+b$	a
x^a	$a\cdot x^{a-1}$
$\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$	$\dfrac{1}{2\cdot\sqrt{x}} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$
$\dfrac{1}{x} = x^{-1}$	$-\dfrac{1}{x^2} = -x^{-2}$

$f(x)$	$f'(x)$
e^x	e^x
$e^{k\cdot x}$	$k\cdot e^{k\cdot x}$
a^x	$\ln(a)\cdot a^x$
$\ln(x)$	$\dfrac{1}{x}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\tan(x)$	$\tan^2(x)+1 = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$

Litteratur

[1] Klaus Thomsen, Asger Spangsberg. *Differentialregningen i historisk perspektiv*. Aarhus Universitetsforlag, 1987.

[2] Jester Lützen. *Cirklens kvadratur, Vinklens tredeling, Terningens fordobling. Fra oldtidens geometri til moderne algebra*. Systime, 1985.

[3] Inge Andersen, Kirsti Andersen, Kirsten Garm, Klaus Holth, Ivan Taftebjerg Jacobsen, Lars Mejlbo. *Kilder og kommentarer til ligningernes historie*. Redigeret af Kirsti Andersen. Forlaget TRIP, 1986.

[4] Jonny Schultz, Hans Sloth (redaktører). *Euklid: Elementer I-IV*. Forlaget TRIP, 1994. (Oversættelser af Euklids Elementer ved Thyra Eibe).

[5] Kirsti Andersen, Mikkel Vestergaard Laursen. *Ikke alle skæringer er gyldne*. En artikel i LMFK-bladet 4, 2011.

[6] Olaf Pedersen. *Matematik og Naturbeskrivelse i Oldtiden*. Akademisk forlag, 1980 (oprindeligt 1975).

[7] Victor J. Katz. *A History of Mathematics – An Introduction*. 3rd Edition, Addison-Wesley, 2009.

[8] A. Beutelspacher, B. Petri. *Der Goldene Schnitt*. 2. Auflage. Wissenschaftsverlag, 1995.

[9] Jens Lund. *Tangentbestemmelse historisk set*. Matematiklærerforeningen, 2. udgave, 2011.

[10] Kristian Danielsen og Henrik Kragh Sørensen. *Vækst i nationens tjeneste – Hvordan Verhulst fik beskrevet logistisk vækst*. Matematiklærerforeningen, 1. udgave, 2014.

Billedliste

Side 19: Del af statue af Gallileo Gallilei (kunstner: Astodemo Costoli) ved Uffizierne, Firenze. Eget foto.
Side 52: Johan Gørbitz [Public domain], via Wikimedia Commons from Wikimedia Commons (N. H. Abel)
Side 52: By JCSantos (Own work) [Public domain], via Wikimedia Commons (Ars Magna)
Side 57: ©iStock.com/danielvfung (Telecommunication Satellites)
Side 61: ©Thinkstock/GeorgiosArt (Isaac Newton)
Side 61: ©Thinkstock/GeorgiosArt (Gottfried Wilhelm Leibniz)
Side 117: ©iStock.com/Tupungato (Buste af Pythagoras)
Side 120: Attributed to Jacopo de' Barbari [Public domain], via Wikimedia Commons (Portræt af Luca Pacioli (1445-1517) med en student)
Side 121: ©iStock.com/Vaara (Leonardo da Vinci, Vitrivius-manden)
Side 122: ©iStock.com/PeterHermesFurian (Regulære polyedre)
Side 129: By Deep also it at it.wikipedia (Transferred from it.wikipedia) [Public domain], from Wikimedia Commons (Fibonacci)
Side 132: ©iStock.com/Maja Nuić (Solsikker)
Side 135: ©iStock.com/AndreaAstes (Nautilus)
Side 160: ©iStock.com/Jacob Wackerhausen (Office lady)
Side 163: ©iStock.com/CarolGomez (Truck)
Side 211: Pierre François Verhulst. [Public Domain] Wikimedia Commons.
Side 222: (Usain Bolt in the starting blocks).
Photo Credit: Nick J. Webb (https://www.flickr.com/photos/nickwebb/7734416998)
Creative Commons by 4.0.
Side 224: ©iStock.com/Elkor (del af flyvinge ses I atmosfæren)

Øvelse A17 i Tema A. Forholdene mellem højde og bredde for rektanglerne: A) $\sqrt{2}:1$ (A4-format) B) 1:1 C) 2:1 D) 4:3 E) 20:9 F) 5:4 G) 20:11 H) φ:1 (Gyldne snit) I) 3:2 J) 5:2