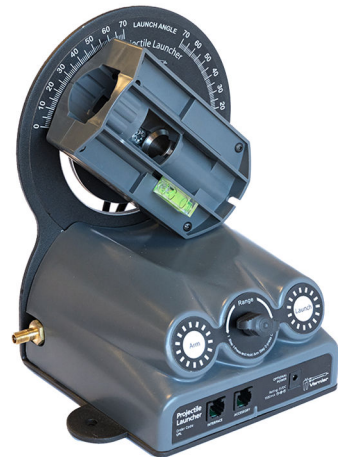


Projekt med det skrå kast

- og Projectile Launcher

I dette projekt betragtes det skrå kast uden luftmodstand og der udføres et forsøg med det meget præcise fysikudstyr *Projectile Launcher* fra firmaet *Vernier*. Den findes i en almindelig version med kabel og i en *Go Direct* version, som kan bruges trådløst. Hvilken en, man bruger her, er ikke afgørende. Der skydes med en lille metalkugle, så man i praksis kan se bort fra luftmodstand.

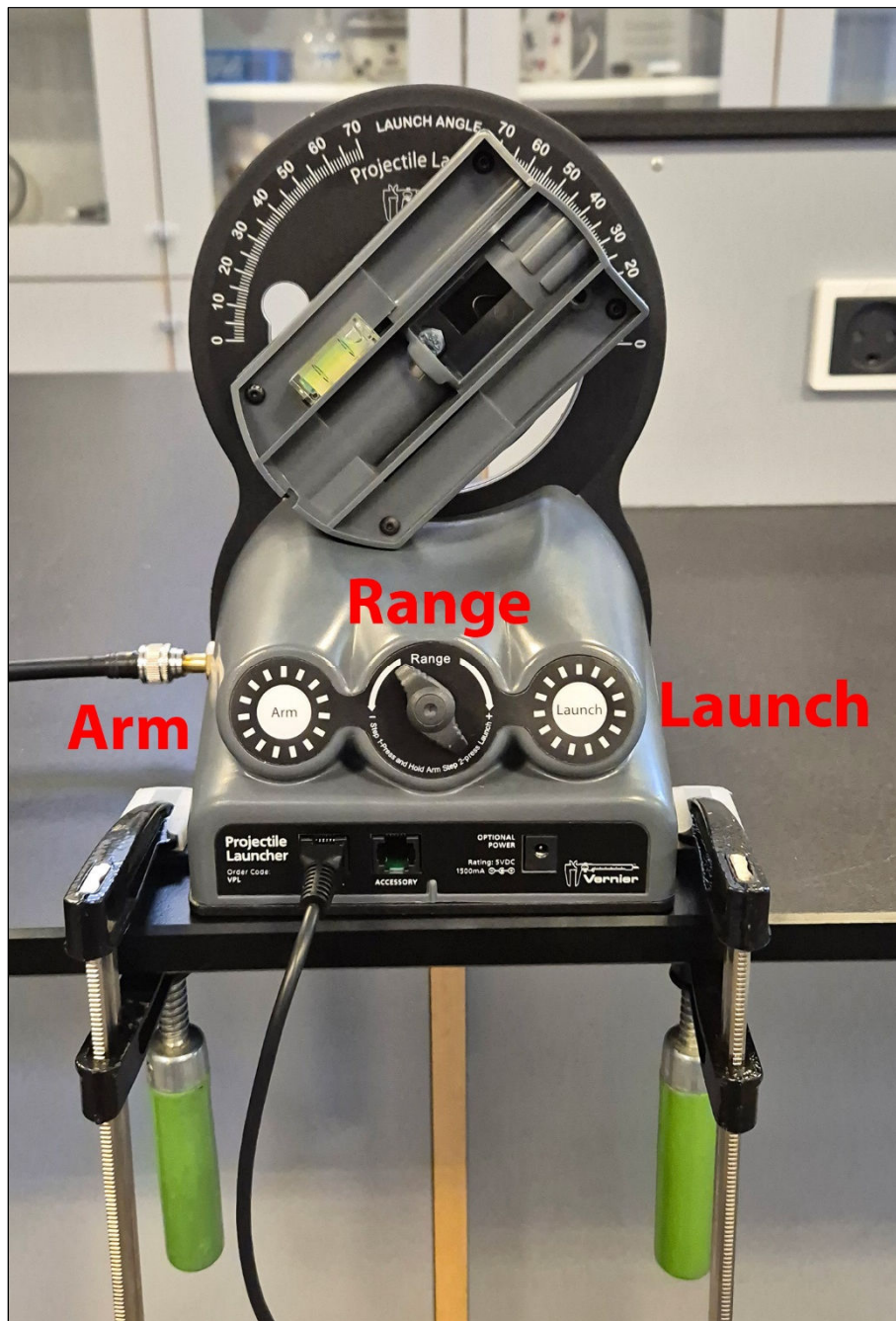


Instruktion i brug af kanonen

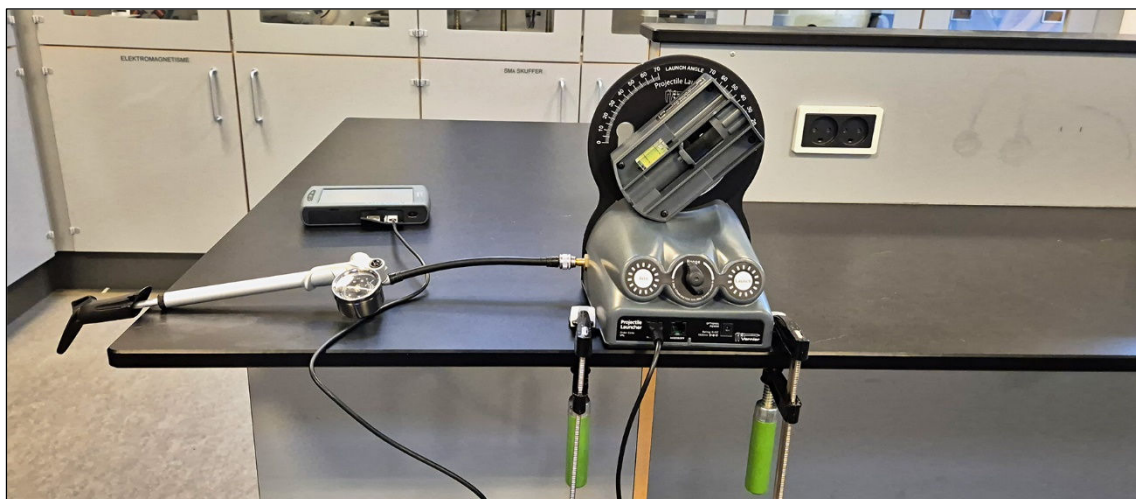
- Forbind Interface porten på Projective Launcher (kanonen) til en digital port på en LabQuest eller en LabQuest Mini via det medfølgende Photogate-kabel. Forbind derefter LabQuest/LabQuest Mini til computeren via tilhørende USB-kabel. Derved får kanonen desuden strøm fra computeren.
- Åbn softwaren Vernier Graphical Analysis Pro (GA). Programmet registrerer af sig selv, at kanonen er sat til.
- Fastgør kanonen på et vandret bord ved hjælp af to skruetvinger, som vist på figur 1 og 2 på de næste sider.
- Forbind håndpumpen til kanonen. Sørg for, at slangen ikke bøjer.
- Løsn den nederste skrueknop på bagsiden af kanonen (figur 4) og drej kanonrøret ned, så det bliver vandret. Brug det indbyggede vaterpas hertil. Stram derefter skrueknappen.
- Løsn den øverste skrueknop på bagsiden af kanonen (figur 4) og drej vinkelskiven, så 0 grader er ud for streg-markeringen på kanonrøret. Stram derefter skrueknappen.

Forsøgsklargøring

1. **Alle i nærheden af opstillingen tager sikkerhedsbriller på! De befinder sig i kassen.**
2. Start med at anbringe et stykke karton (ca. A2-format), der hvor kuglen formodes at lande, godt 3 meter fra kanonen. Se figur 3 på de næste sider.
3. Løsn den nederste skrueknop på bagsiden af kanonen og drej kanonrøret til det har den ønskede *elevation*, dvs. vinkel i forhold til vandret. Her 45°.
4. Drop metalkuglen ned i kanonløbet. Den skal synke helt ned i bunden af løbet!
5. Pump med håndpumpen indtil du har hørt præcist 3 pift. Vent herefter 10 sekunder. Det sikrer at trykket er ensartet, når kanonen fyres af.
6. Nu skal du udløse kuglen. Hold knappen *Arm* nede. Derefter vil et tryk på knappen *Launch* udløse kuglen. Se figuren på næste side.
7. Kuglen skal ramme omkring midten af kartonet og sætte et lille mærke herpå. Flyt kartonet, så det passer og fastgør det med tape.
8. Hvis kastelængden ikke er den ønskede, kan den justeres via drejknappen *Range* foran på kanonen.



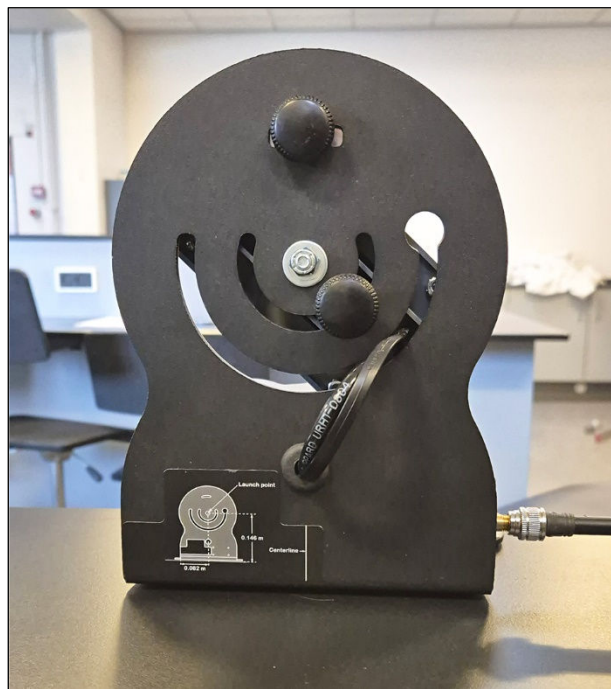
Figur 1



Figur 2



Figur 3



Figur 4

Produktoplysning: Når kuglen befinder sig i bunden af kanonløbet, befinder dens centrum i højden 0,146 m over bunden af kanonen. Sørg for ikke at pumpe til et højere tryk end 150 psi. Når apparatet gemmes væk, så sørg for, at der ikke er overtryk i kammeret. Det kan gøres ved at affyre kuglen en eller flere gange.

Delforsøg 1 (Find kastelængden ved 45° elevation)

Nu skal vi foretage et antal skud (fx 10 stk.) med en elevation på 45°, hvor vi samtidigt måler kuglens begyndelseshastighed v_0 via Graphical Analysis (GA).

1. Start dataopsamling i GA ved på computeren at trykke på knappen OPSAML øverst.
2. Gentag proceduren i punkterne 4-6 fra forsøgsklargøringen et par sider tidligere.
3. Nedslagspunktet markeres med en pen som en prik på kartonet. Skudnummeret skrives ved siden af prikken (se figur 5 på næste side).
4. Opskriv begyndelseshastigheden i tabellen på næste side.
5. Gentag punkterne 1-4 herover.
6. Mål kastelængderne ved at måle afstandene fra *Centerline* bag på kanonen til hvert af punkterne og indfør dem i tabellen i nederste række.

Skudnummer	1	2	3	4	5
Begyndelsesfart v_0 (m/s)					
Kastelængden x_{\max} (m)					
Skudnummer	6	7	8	9	10
Begyndelsesfart v_0 (m/s)					
Kastelængden x_{\max} (m)					

Databehandling

- I princippet burde alle værdierne for begyndelsesfarten være ens, men sådan er det jo aldrig helt, når der udføres forsøg. Hvor *reproducerbar* er forsøget? Hvor stor er usikkerheden? Hvad fortæller det om udstyret? Vurdér desuden, om den lille variation i v_0 har en korrelation med den resulterende kastelængde.
- Vælg et af dataparrene (v_0, x_{\max}) i tabellen ovenfor. Benyt fremgangsmåden i underafsnittet *Kastelængde* i teoriafsnittet *Matematisk model* til at beregne en teoretisk værdi for kastelængden på baggrund af din værdi for v_0 . Hvor godt stemmer denne teoretiske kastelængde overens med din målte værdi for x_{\max} .

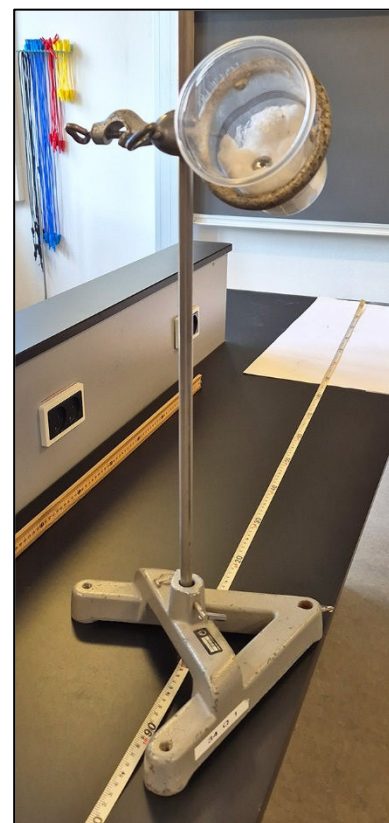
Delforsøg 2

Denne del er lidt mere frit. Udfør forsøg, hvor kastelængden undersøges for afhængighed af begyndelsesfart v_0 og elevation α .

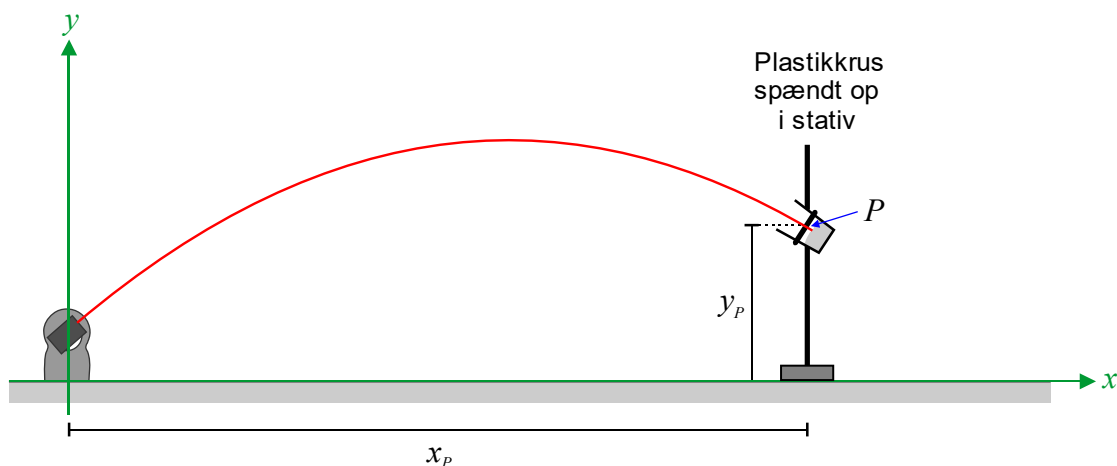
Delforsøg 3 (Ramme et givet punkt)

I teoriafsnittet *Matematisk model* er der et underafsnit med titlen *Ramme et givet punkt*. Heri er det beskrevet, hvordan man kan beregne den elevation, man skal bruge for at en bold/kugle rammer et bestemt punkt. Dette vil vi afprøve eksperimentelt.

- Affyr kanonen med en vilkårlig indstilling af elevationen for at bestemme kuglens begyndelsesfart v_0 ved hjælp af GA.
- Fastgør et plastikbæger i et stativ, som vist på figuren til højre. Anbring noget vat i bægeret, så kuglen lander blødere.
- Stativet skal anbringes således, at midtpunktet af kruset kommer til at befinde sig 2,00 meter i vandret retning fra kanonen (regnet fra kanonens *Centerline*) og i højden 0,50 meter over bordet.

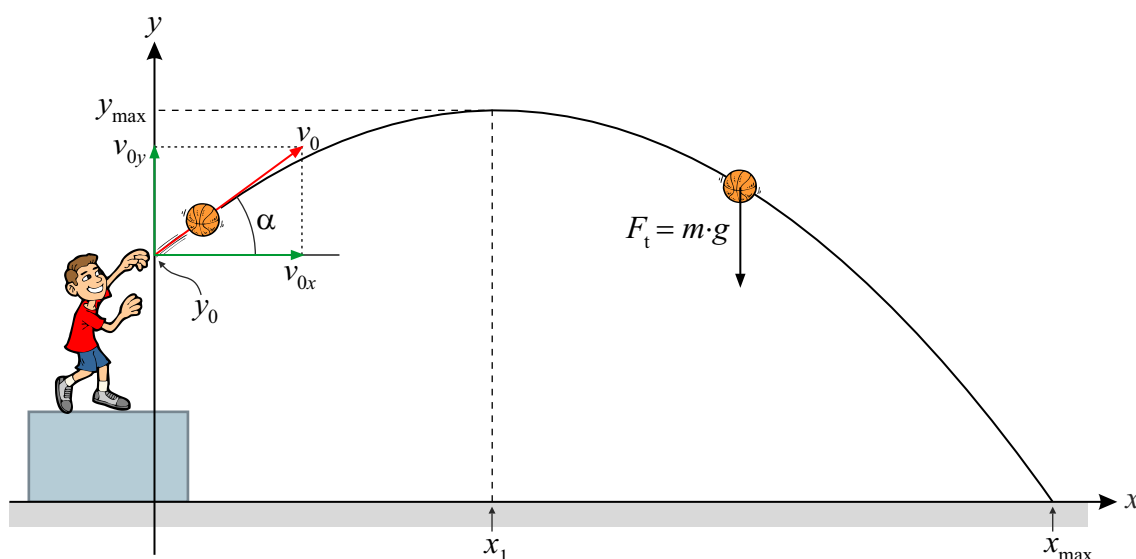


4. Benyt fremgangsmåden i underafsnittet *Ramme et givet punkt* i teoriafsnittet *Matematisk model* til at beregne en teoretisk værdi for den elevation, som vil betyde, at kuglen rammer i punktet $(x_P, y_P) = (2,00; 0,50)$, regnet i meter. Bemærk, at der vil være to løsninger.
5. Indstil nu elevationen til den mindste af de beregnede vinkler fra punkt 4.
6. Affyr kanonen. Rammer kuglen i plastikbægeret?
7. Afprøv også eksperimentelt den største af de beregnede vinkler fra punkt 4.



Matematisk model

Den matematiske model, der er relevant her, er den, der normalt går under navnet *det skrånede kast uden luftmodstand*. At der er tale om et kast eller skud er ikke afgørende. Udgangspunktet er, at bolden/kuglen forlader hånden/kanonen i punktet $(0, y_0)$ med en begyndelsesfart på v_0 . Begyndeshastighedens vinkel i forhold til vandret betegnes α . Denne vinkel kaldes også for *elevationen*.



Den vektorfunktion, som beskriver bevægelsen som funktion af tiden t , er følgende:

$$(1) \quad \vec{s}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 \cdot \cos(\alpha) \cdot t \\ -\frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 + v_0 \cdot \sin(\alpha) \cdot t + y_0 \end{pmatrix}$$

Kastelængde

Vi antager, at α , v_0 , y_0 og g er kendte. Da kan man benytte et CAS-værktøj til at bestemme kastelængden x_{\max} på følgende måde: Løs først ligningen $y(t) = 0$ med kommandoen *solve*. Det giver to værdier for tiden t . Den ene er negativ (overvej!) og kasseres. Den positive kalder vi t_{\max} . Det er den tid, det tager før bolden/kuglen slår ned. Kastelængden fås herefter ved at indsætte denne tid i koordinatfunktionen $x(t)$, altså $x_{\max} = x(t_{\max})$.

Maksimal højde

En anden interessant problemstilling er at beregne den maksimale højde, som bolden eller kuglen opnår i parabelbanen. Dette kan gøres ved at bruge differentialregning. Vi antager, at α , v_0 , y_0 og g er kendte. Da tangenten til banekurven er vandret i toppunktet, gælder der $y'(t) = 0$ her. Vi benytter vores CAS-værktøj til at løse denne ligning. Løsningen er et tidspunkt, som vi kalder for t_1 . Den maksimale højde fås nu ved at indsætte denne tid i koordinatfunktionen $y(t)$, altså $y_{\max} = y(t_1)$. Den tilhørende x -koordinat er $x_1 = x(t_1)$.

Ramme et givet punkt

En interessant problemstilling er den, hvor man ønsker at indstille afskydningen, så bolden/kuglen rammer et bestemt punkt $P(x_P, y_P)$. Det kan være en ballistisk opgave i militæret eller en basketballspiller, som ønsker at ramme bolden ned i kurven. Vi antager at starthøjden y_0 er fast. Derefter er der kun elevationen α og begyndelsesfarten v_0 at justere. Flyvetiden t er ukendt. Ligningerne $x(t) = x_P$ og $y(t) = y_P$ skal opfyldes for at punktet rammes. Lad os sige, at vi vælger en fast begyndelsesfart v_0 . Da haves to ligninger med to ubekendte, som typisk kan løses i et CAS-værktøj med en kommando noget i retningen af følgende:

$$(2) \quad \text{solve}(\{x(t) = x_P, y(t) = y_P\}, \{t, \alpha\})$$

hvor de to ubekendte t og α i ligningssystemet er anført. Denne ligning kan have 0, 1 eller to løsninger. Hvis begyndelsesfarten er så lav, at bolden/kuglen ikke vil kunne nå punktet, så vil ligningen for eksempel have 0 løsninger. I mange tilfælde vil der dog være to løsninger, som ikke er kunstige.

Til sidst skal det lige nævnes, at man også kan lade vinklen α være fast, og så forsøge at bestemme den begyndelsesfart, som får bolden/kuglen til at ramme punktet. Så skal vi løse en ligning med en kommando, som er noget i retningen af følgende:

$$(3) \quad \text{solve}(\{x(t) = x_P, y(t) = y_P\}, \{t, v_0\})$$

I forvejen skal CAS-værktøjet naturligvis kende alle de kendte størrelser.

Teoretiske opgaver

Det er nyttigt at løse nedenstående opgaver med henblik på også at forstå matematikken i emnet det skrå kast.

- Bestem hastighedsvektorfunktionen $\vec{v}(t)$ ved at differentiere stedfunktionen $\vec{s}(t)$.
- Bestem accelerationsvektorfunktionen $\vec{a}(t)$ ved at differentiere $\vec{v}(t)$.
- Bestem begyndeshastigheden $\vec{v}(0)$ og vis, at længden af vektoren er v_0 .
- Benyt accelerationen fra b) til at bestemme den resulterende kraft på bolden/kuglen. Stemmer den med det, vi ville forvente?
- Undertiden kan banekurven for en vektorfunktion bestemmes som grafen for en funktion. Det er tilfældet her. Isolér t i udtrykket for $x(t)$ i (1) og indsæt dette udtryk på t 's plads i $y(t)$. Reducér resultatet, så du har y som funktion af x . Det skal gerne være et andengradspolynomium? Dette fortæller os, at den teoretiske banekurve for det skrå kast uden luftmodstand er en *parabel*. Hvad er koefficienterne i andengradspolynomiet?
- (*Ekstra*). I teoridelen til delforsøg 1 bestemte du den teoretiske kastelængde i et konkret taleksempel. Vis følgende generelle formel for kastelængden:

$$x_{\max} = \frac{v_0 \cdot \cos(\alpha) \cdot \left(v_0 \cdot \sin(\alpha) + \sqrt{(v_0 \cdot \sin(\alpha))^2 + 2 \cdot g \cdot y_0} \right)}{g}$$

Hvis du har styr på teknikken, kan du faktisk få dit CAS-værktøj til at gøre dette.

- Hvornår opdagede man historisk set, at en sten bevæger sig i en parabelbane, når man kaster den? Hvem var den berømte fysiker, som gjorde sig gældende i den forbindelse? Benyt Internettet til at få idéer.