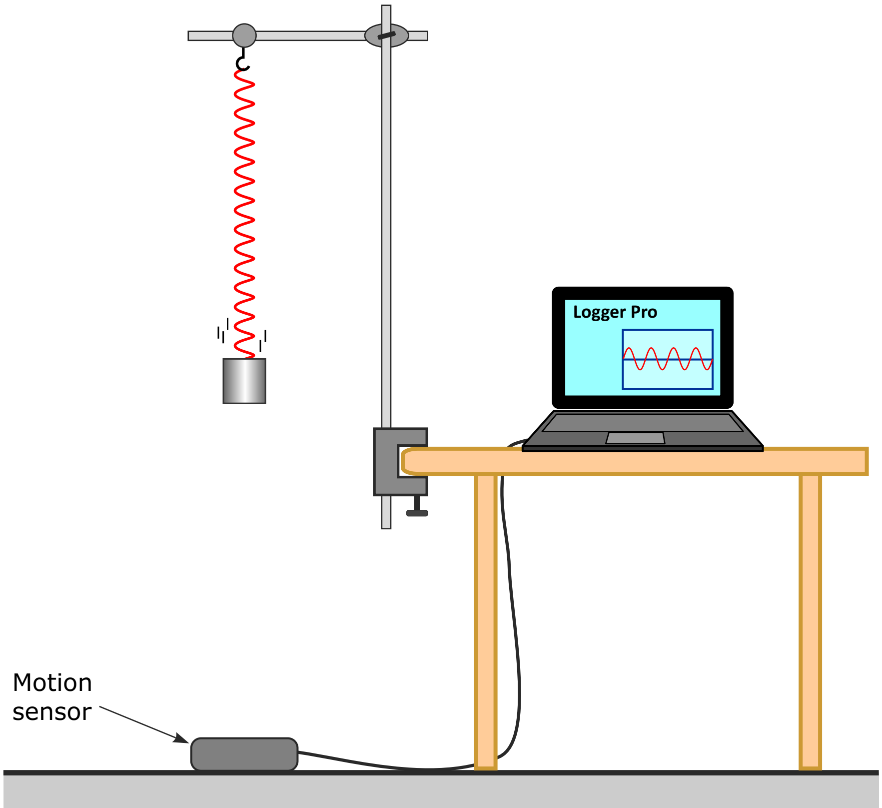
Harmonisk svingning med fjeder

Formål

I denne øvelse skal vi kigge på noget teori omkring fjedersvingninger. Vi skal udføre et forsøg, hvor vi studerer bevægelsen samt svingningstiden i den harmoniske svingning og viser, at den stemmer med teorien. Endvidere skal vi udlede en formel for den *potentielle* energi for en fjeder.



Forsøg

Vi skal gennemføre et forsøg med et lod som svinger i en fjeder.

a) Bestem først fjederkonstanten k for den valgte fjeder. Det kan for eksempel gøres ved at hænge nogle forskellige lodder i enden af fjederen og se, hvor meget fjederen strækker sig ud i hvert tilfælde. Dernæst kan man i Logger Pro afbilde tyngdekraften F som funktion af udstrækningen Δx. Det skulle ifølge *Hookes lov*, som siger at $F = -k \cdot \Delta x$, gerne give en ret linje gennem (0,0). Lineær regression benyttes til at bestemme fjederkonstanten k.

b) Vi er nu klar til at udføre fjedersvingninger. Hæng fjederen op i et stativ og anbring et lod i den anden ende. Anbring en Go!Motion sensor på gulvet direkte under loddet. Sensoren tilsluttes computeren via USB porten. Åben derefter for programmet Logger Pro. Sandsynligvis kan du benytte standardindstillingerne for motion-sensoren. Hvis du imidlertid ønsker at ændre for eksempel varigheden af målingen, så kan det gøres via menuen *Experiment > Data Collection...*(**Ctrl+D**). Under fanen *Collection* finder du punktet *Length*. Pr. default er den sat til 5 sekunder. Afhængig af hårdheden af den fjeder man benytter, så kan det desuden være relevant at indstille, hvor mange målinger sensoren skal tage i sekundet. Det sker via punktet *Sampling Rate*. Træk nu loddet ud fra dets ligevægtsposition, hvor det hænger i hvile og slip, hvorefter loddet vil svinge op og ned. Start hurtigt for målingerne i Logger Pro. Forsøget er færdigt kort efter.

Teori

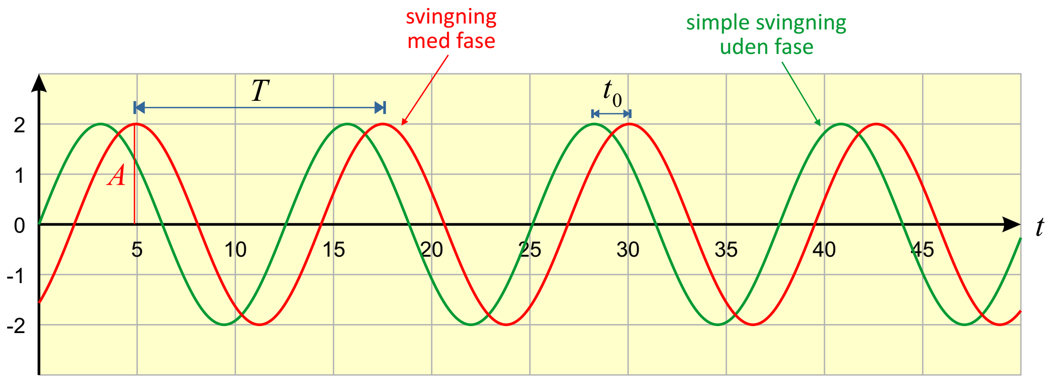
Det tidsmæssige forløb af en *harmonisk svingning* kan beskrives ved en funktion af følgende form:

(1) $$y(t) \;=\; A\cdot\sin(\omega\cdot t+\varphi)$$

Størrelsen A kaldes bølgens *amplitude*, ω betegnes *vinkelhastigheden* og φ betegnes *fasen*. Vinkelhastigheden kan bestemmes, hvis man kender *svingningstiden* T. Som bekendt gentager sinus sig, når der lægges 2π til argumentet – når der som her regnes i radianer. Derfor haves $[\omega\cdot(t+T)+\varphi]-[\omega\cdot t+\varphi]=2\pi \;\Leftrightarrow\; \omega\cdot T=2\pi$. Deraf fås:

(2) $$\omega \;=\; \frac{2\pi}{T}$$

Fasen har den virkning, at den forskyder bølgen tidsmæssigt. Hvis vi omskriver udtrykket (1) til $y(t)=A\cdot\sin(\omega\cdot(t+\varphi/\omega))$, kan vi se, at grafen for (1) fås ved at parallelforskyde grafen for den simplere $y(t)=A\cdot\sin(\omega\cdot t)$ med $t_0=-\varphi/\omega$ i t-aksens retning.



Som bekendt gælder om frekvensen: $f=1/T$. Heraf fås ifølge (2), at $\omega=2\pi f$. Indsættes dette i (1), fås følgende alternative forskrift for svingningen:

(3) $$y(t) \;=\; A\cdot\sin(2\pi f\cdot t+\varphi)$$

Denne forskrift er særlig hensigtsmæssig i forbindelse med lydbølger, hvor frekvensen ofte er kendt. (1) benyttes som oftest i mekanik.

Databehandling

Vi er nu klar til databehandlingen. Forhåbentligt fik du en rimelig glat harmonisk bølge. Idéen er herefter at undersøge, hvor godt den eksperimentelle kurve passer overens med den teoretiske kurve, som er givet ved forskriften (1) ovenfor.

a) Vi er interesseret i udsvinget i forhold til *ligevægtsstillingen*, som er den stilling loddet er i, når det hænger i ro. Derfor skal der trækkes et fast tal fra alle de udsving, som motion sensoren har optaget. Hvor meget der skal trækkes fra vurderes bedst ved at tage gennemsnittet af udsvinget ved en top og udsvinget ved den efterfølgende bund. Lav en *New Calculated Column…* via menuen *Data* i Logger Pro, hvor du trækker nævnte tal fra den variable angivet ved *Position*.
b) Tegn grafen for den korrigerede position. Det skulle gerne give en svingning omkring 1. aksen.
c) Aflæs amplituden A og svingningstiden T på grafen for den korrigerede position.
d) Udregn vinkelhastigheden ved hjælp af (2).
e) Lav nu endnu en *New Calculated Column*, hvor du definerer følgende funktion: $y(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t)$.
f) Tegn grafen for funktionen under e) *sammen* med den korrigerede position fra b). Den ene graf vil sandsynligvis være lidt forskudt i forhold til den anden, ligesom de to kurver i teoriafsnittet.
g) Vi skal give funktionen under e) en fase, så de to kurver ser ud til at ligge oven i hinanden – på bedst mulig måde. Det kan gøres ved at aflæse tidsforskydningen t_0 (se figur) og ændre funktionen under e) til $y(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot (t - t_0))$. Husk at regne t_0 med fortegn! Vi vil kalde den nye funktion for den *teoretiske forskrift*. Ligger de to grafer omtrent oveni hinanden? Konkluder!

Vi kunne egentligt godt stoppe her, men en ting, der kan være lærerigt, er at sammenligne graferne for *position*, *hastighed* og *acceleration*. Benyt de grafer, der stammer fra selve eksperimentet.

h) Hvornår er hastigheden af loddet maksimalt henholdsvis minimalt? Hvilke steder i bevægelsen svarer det til? Når loddet er i top, i bund eller i ligevægtspositionen?
i) Samme spørgsmål for accelerationen.

Ekstra opgave

Ligesom der er et begreb, der hedder *potentiel energi* i tyngdefeltet, så kan man også indføre en *potentiel energi for fjederen*. Idéen er, at hvis fjederen er spændt, så er der ”oplagret” noget energi, som kan udløses ved at slippe genstanden i fjederen. Herved vil potentiel fjederenergi blive omsat til kinetisk energi. Formlen for den potentielle energi i fjederen er $E_{\mathrm{pot}} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2$, hvor x er fjederens udstrækning.

Antag, at man trækker i fjederen med en lige så stor og modsat rettet trækkraft som fjederkraften. Vis at udtrykket for den potentielle fjederenergi da netop svarer til trækkraftens arbejde, når fjederen trækkes fra slap tilstand til en udstrækning på x. *Hjælp*:

Bemærk at trækkraften *ikke* er konstant under bevægelsen, så du skal kigge på arealer! Se side 18 i noten *Mekanik*.