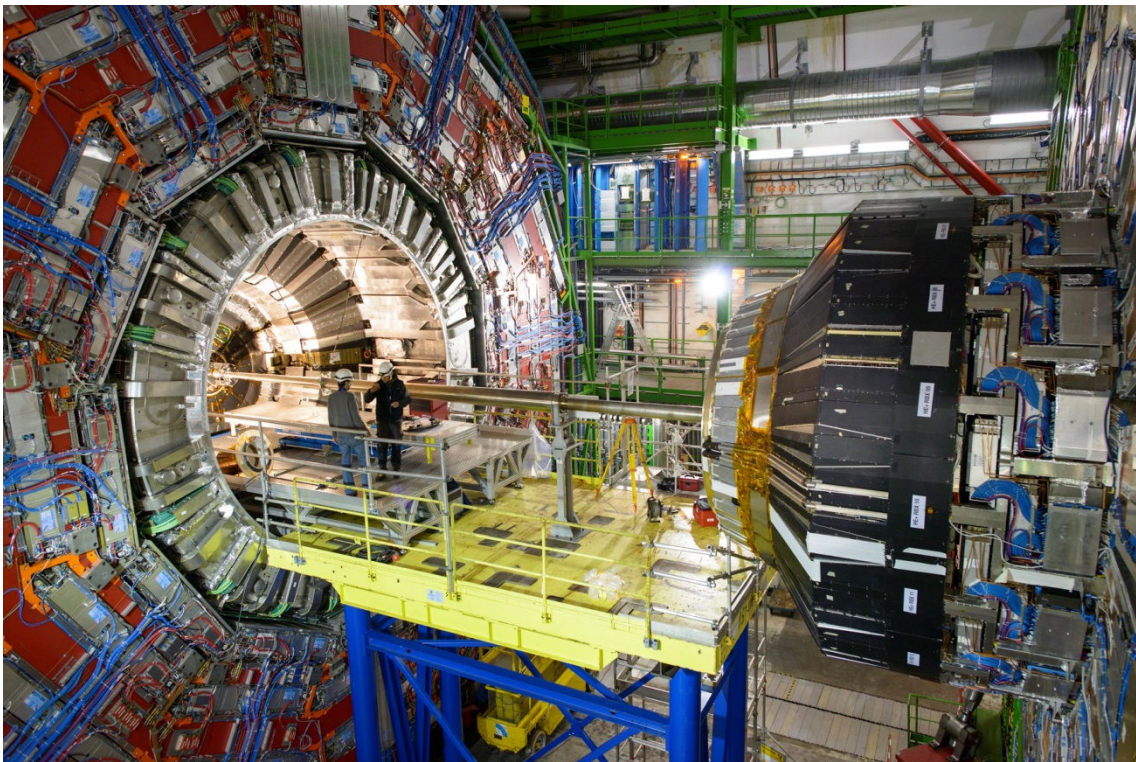


Tillæg til partikelfysik



© Erik Vestergaard

© Erik Vestergaard, 2015

Forsidebillede er fra CERN's Photo Service og viser CMS detektoren hos CERN. CMS står for *Compact Muon Solenoid*.

Figuren side 5 er fra CERNs Photo Service.

Billedet side 34 er ligeledes fra CERN's Photo Service, 10. maj 1999.

Figuren øverst side 27 er tegnet af Jakob Kramer, www.jakobkramer.dk

Billede af Carl D. Anderson side 32 er fra Wikimedia Commons.

Vekselvirkninger

Hvordan afgør man, hvilken vekselvirkning, som gør sig gældende i en given reaktion? Gravitationsvekselvirkningen ser vi bort fra.

Reaktionen	Hvilken vekselvirkning?
Der er en foton involveret (γ)	Den elektromagnetiske vekselvirkning
Der skabes en neutrino (ν_e, ν_μ, ν_τ)	Den svage vekselvirkning
Der laves om på kvarkernes <i>flavour</i> . For eksempel laves en <i>s</i> kvark om til en <i>u</i> kvark. *)	Den svage vekselvirkning

*) Bemærk, at der godt kan være tale om, at der er forskellige kvarker på hver side i en reaktion, uden at det er den svage vekselvirkning, der er i spil. Vi ser på et eksempel nedenfor, hvor den stærke vekselvirkning virker.

I tilfældet med *henfald* er *middellevetiden* en god indikator for, om der er tale om den stærke vekselvirkning, den svage vekselvirkning eller den elektromagnetiske vekselvirkning. For de tre vekselvirkninger, har man typisk følgende middellevetider:

$$\begin{aligned} \text{Den stærke:} & \quad T_{\text{leve}} \approx 10^{-23} \text{ s} \\ \text{Den elektromagnetiske:} & \quad T_{\text{leve}} \approx 10^{-19} \text{ s} \\ \text{Den svage:} & \quad T_{\text{leve}} \approx 10^{-10} \text{ s} \end{aligned}$$

Kig i databogen på de fire sider, som hører til partikelfysik. Her er en lang række partikler med deres kvarkindhold, hvilemasser, middellevetid og ladning angivet. Der er endda anført nogle typiske henfald for den pågældende partikel.

lambda	Λ	uds	1115,6	$2,6 \cdot 10^{-10}$	0	$\Lambda^0 \rightarrow p^+ + \pi^-$ (64%) $\Lambda^0 \rightarrow n^0 + \pi^0$ (36%)
sigma plus	Σ^+	uus	1189,4	$8,0 \cdot 10^{-11}$	+1	$\Sigma^+ \rightarrow p^+ + \pi^0$ (52%) $\Sigma^+ \rightarrow n^0 + \pi^+$ (48%)
sigma nul	Σ^0	uds	1192,6	$7,4 \cdot 10^{-20}$	0	$\Sigma^0 \rightarrow \Lambda^0 + \gamma$
sigma minus	Σ^-	dds	1197,4	$1,5 \cdot 10^{-10}$	-1	$\Sigma^- \rightarrow n^0 + \pi^-$
ksi nul	Ξ^0	uss	1314,9	$2,9 \cdot 10^{-10}$	0	$\Xi^0 \rightarrow \Lambda^0 + \pi^0$

Vi ser for eksempel, at sigma nul i processen $\Sigma^0 \rightarrow \Lambda^0 + \gamma$ danner en foton. Derfor er det den elektromagnetiske vekselvirkning, der er tilfældet her. Det stemmer også fint overens med tommelfingerreglerne for middellevetiderne.

En anden reaktion, man kan betragte er henfaldet $\Sigma^- \rightarrow n^0 + \pi^-$. Databogen giver os følgende kvarksammensætning: $[dds] \rightarrow [ddu] + [\bar{u}d]$. Vi ser her, at der laves om på *flavour*en. En *s*-kvark omdannes til en *d*-kvark. Derfor er der tale om den svage vekselvirkning. Dette passer også fint med det faktum, at levetiden for Σ^- ifølge databogen er af størrelsesorden 10^{-10} s.

Et andet eksempel er processen $\pi^- + p \rightarrow \Lambda^0 + K^0$ med følgende kvarksammensætning: $[\bar{u}d] + [uud] \rightarrow [uds] + [d\bar{s}]$. Selv om der er forskellige kvarker på hver side i reaktio-

nen, kan man ikke automatisk slutte, at det er den svage vekselvirkning, som er i spil! Når vi ser på, hvad der er på venstre side i forhold til højre side, konkluderer vi, at en \bar{u} -kvarke fra mesonen og en u -kvarke fra protonen annihilerer, hvorefter der dannes et s, \bar{s} -par. Hele denne proces kan forløbe med en *gluon* som mellemtilstand, hvilket gør, at det er den stærke vekselvirkning, som er i spil. De resterende kvarker u, d og d er ens på begge sider, så denne del af processen kan også foregå via den stærke vekselvirkning. Alt i alt vil vi kalde vekselvirkningen for stærk.

NB! Det skal dog nævnes, at mellemtilstanden også kan forløbe via en virtuel foton eller en Z^0 -boson, hvilket vil gøre at den elektromagnetiske vekselvirkning eller den svage vekselvirkning også er i spil, men det forbigår vi her. Den stærke vekselvirkning dominerer under alle omstændigheder.

Three generations
of matter (fermions)

	I	II	III		
mass →	2.4 MeV/c ²	1.27 GeV/c ²	171.2 GeV/c ²	0	? GeV/c ²
charge →	2/3	2/3	2/3	0	0
spin →	1/2	1/2	1/2	1	0
name →	u up	c charm	t top	γ photon	H Higgs boson
	4.8 MeV/c ²	104 MeV/c ²	4.2 GeV/c ²	0	
	-1/3	-1/3	-1/3	0	
	1/2	1/2	1/2	1	
Quarks	d down	s strange	b bottom	g gluon	
	<2.2 eV/c ²	<0.17 MeV/c ²	<15.5 MeV/c ²	91.2 GeV/c ²	
	0	0	0	0	
	1/2	1/2	1/2	1	
	ν_e electron neutrino	ν_μ muon neutrino	ν_τ tau neutrino	Z⁰ Z boson	
	0.511 MeV/c ²	105.7 MeV/c ²	1.777 GeV/c ²	80.4 GeV/c ²	
	-1	-1	-1	±1	
	1/2	1/2	1/2	1	
Leptons	e electron	μ muon	τ tau	W[±] W boson	Gauge bosons

Standardmodellen omtalt i Wikipedia

Ovenstående figur er god: Partiklerne er inddelt i familier i de lodrette søjler I, II og III. Partikler fra 2. og 3. familie vil – med undtagelse af neutrinoerne – gerne henfalde til partiklerne i 1. familie. Henfaldene formidles gennem bosonerne W^+ , W^- og Z^0 samt gluonerne og fotonerne i 4. søjle. Higgs' partiklen har en særlig status, som ikke omtales her.

Antipartikler

Hadroner: Kvarksammensætningen af en antipartikel fås ved at sætte anti på alle kvarkerne i kvarksammensætningen for den oprindelige partikel.

Masse: Partikler og deres antipartikler har samme masse.

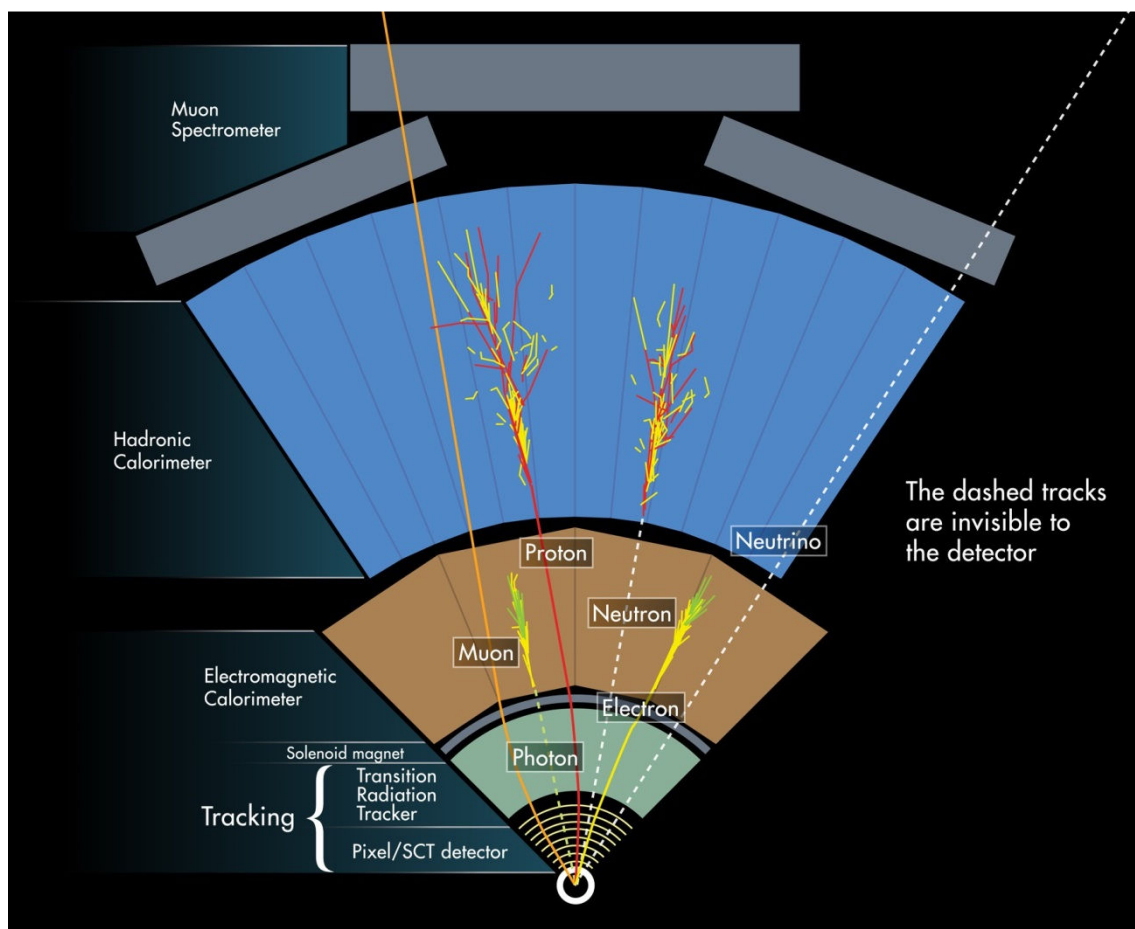
Ladning: Ladningen af en antipartikel fås ved at skifte fortegn på ladningen af den oprindelige partikel.

Bevarelsessætninger

- Elektrisk ladning er bevaret i enhver proces
- Det samlede baryontal før og efter en reaktion skal være bevaret. Almindelige baryoner tæller for 1, mens antipartiklers baryontal tæller for -1 .
- Det samlede leptontal før og efter en reaktion skal være bevaret, sågar indenfor hver af de tre leptontyper. En lepton tæller for 1, mens antipartiklers leptontal tæller for -1 .

Detektorer

Det er indlysende, at for at det giver nogen mening at lave forsøg med partikler på CERN, så skal man bruge *detektorer* til at registrere forskellige forhold omkring de partikler, der opstår ved sammenstød eller ved henfald: Hvilken type partikel, dens ladning, dens impuls og fart, dens energi, m.m. På CERN anvender man forskellige detektorer i forbindelse med LHC (The Large Hadron Collider). En af dem bærer navnet *CMS* og er afbildet på tillæggets forside. En anden bærer navnet *ATLAS*. Sidstnævnte ligner en cylinder, der er lagt ned, og er på størrelse med Rundetårn. Figuren nedenfor viser et lodret cirkeludsnit af CERN's ATLAS detektor.

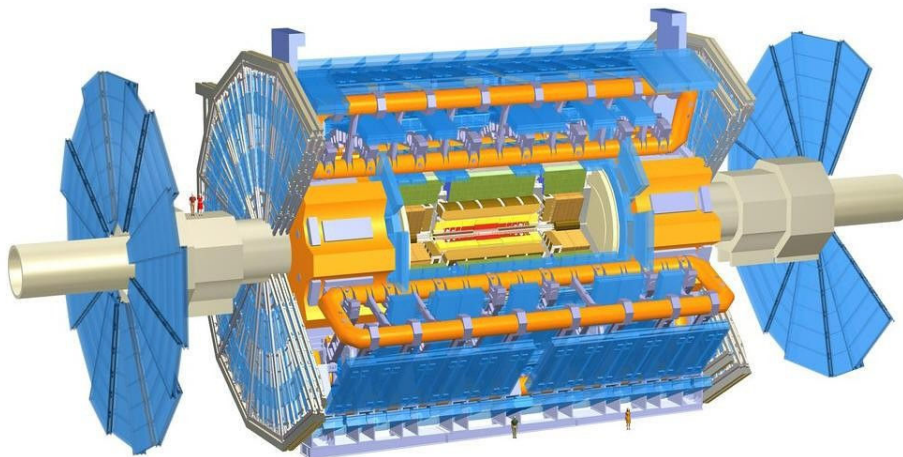


Billede fra CERN's Photo Service. Viser udsnit af ATLAS detektoren

Detektoren består i al væsentlighed af *fire* forskellige detektorer. Iderst har man et *sporkammer*, hvor ladede partiklers baner kan ses. Vi ser at elektroner, protoner og myoner kan ses i spordetektoren, hvorimod neutroner, fotoner og neutrinoer, der ingen ladning har, er usynlige her (stiplede kurver). Vi ser endvidere at de ladede partiklers baner bøjer en smule i spordetektoren. Det skyldes, at detektoren befinder sig i et magnetfelt. Afbøjningen skyldes *Lorentz-kraften*. Man kan bruge krumningsradius af banerne til at bestemme partiklens impuls, og har man bestemt partiklens masse, kan man udregne dens fart. Man kan desuden afgøre ladningens fortegn ved at iagttage hvilken vej partikelbanen krummer. Det viser sig, at det også i nogen grad er muligt at skelne de vigtigste partikeltyper – herunder π , K , p og e – fra hinanden i spordetektoren.

De næste to detektorer er det *elektromagnetiske kalorimeter* og *Hadron-kalorimeteret*. Her kan *energien* af både ladede og neutrale partikler måles. Det elektromagnetiske kalorimeter anbringes umiddelbart udenom spordetektoren, hvor de ladede partiklers baner er identificeret. Som vi ser på figuren, vil fotoner og elektroner blive absorberet i det elektromagnetiske kalorimeter. Herved skabes byger af såkaldte sekundær partikler, ud fra hvilke energien af den oprindelige partikel kan bestemmes. Hadronerne når meget længere i tungt stof end elektroner og fotoner gør. Derfor lægger man en såkaldt *Hadron-kalorimeter* udenom det elektromagnetiske kalorimeter. En hadron vil blive opsnappet i denne detektor og energien af hadronen kan bestemmes ud fra de sekundære partikler, der skabes ved vekselvirkningen med stoffet i detektoren. I det elektromagnetiske kalorimeter er det især den elektromagnetiske vekselvirkning, som skaber de sekundære partikler, mens det især er den stærke vekselvirkning, som skaber sekundærpartiklerne i Hadron-kalorimeteret. På figuren ser vi, at protonen og neutronen (hadroner) især vekselvirker i Hadron-kalorimeteret.

Kun myoner og neutrinoer har evnen til at trænge igennem Hadron-kalorimeteret. Derfor anbringes *myon-detektoren* yderst. Myondetektorerne registrerer ladede partikler, som passerer igennem kalorimetrene, uden at frembringe partikelbyger. På figuren ser vi da også, at myonen når igennem Hadron-kalorimeteret og registreres i myon-detektoren. Neutrinoen, der er yderst utilbøjelig til at vekselvirke med noget som helst, ryger direkte igennem ATLAS detektoren uden at blive registreret.



En figur af ATLAS detektoren på CERN (under Wikimedia Commons license)

Lidt relativitetsteori

En del af formlerne står i tillægget til formelsamlingen *Fysik i overblik*. Jeg vil her præcisere nogle vigtige ting, især hvad angår impuls (= bevægelsesmængde) og energi.

Partiklens energi

Når vi taler om *energien* af en partikel, vil vi normalt mene den samlede energi, altså både den del, der skyldes partiklens bevægelse (den kinetiske energi) samt den del, der skyldes partiklens hvilemasse. Husk her, at energi og masse er to sider af samme sag, ifølge Einsteins berømte formel! Energien betegnes med bogstavet E . Vi har:

$$(1) \quad \underbrace{E}_{\text{energien}} = \underbrace{E_{kin}}_{\text{kinetiske energi}} + \underbrace{m_0 \cdot c^2}_{\text{hvile-energien}}$$

Hvor m_0 er partiklens (hvile)masse og c er lysets hastighed.

NB! Det skal dog lige nævnes, at man undertiden i en opgave kan blive spurgt om, hvor stor en energi en partikel skal have, for at et eller andet kan foregå. Her hentydes der ofte til den kinetiske energi.

En anden yderst vigtig formel, er den, der sammenknytter impuls, masse og energi:

$$(2) \quad E^2 - p^2 \cdot c^2 = m_0^2 \cdot c^4$$

Isoleres energien heri, fås:

$$(3) \quad E = \sqrt{m_0^2 \cdot c^4 + p^2 \cdot c^2}$$

Vil man have gammafaktoren γ ind i billedet, kan energien også udtrykkes ved gammafaktoren ganget med hvileenergien:

$$(4) \quad E = \gamma \cdot m_0 \cdot c^2$$

Undertiden kaldes $\gamma \cdot m_0$ for den *relativistiske masse* og betegnes med m . Dermed vil man få $E = m \cdot c^2$. Det kan dog være en god praksis ikke at operere med denne masse og kun hvilemasserne sammen med gammafaktoren, for at undgå, at man sammenblender masserne. Bruger man kun hvilemasser i sine beregninger, går det ikke så nemt galt.

Partiklens kinetiske energi

Ifølge (1) fås den ved at trække hvileenergien fra hele energien:

$$(5) \quad E_{kin} = E - m_0 \cdot c^2$$

Kombinerer vi denne formel med (4) får vi:

$$(6) \quad E_{kin} = \gamma \cdot m_0 \cdot c^2 - m_0 \cdot c^2 = (\gamma - 1) \cdot m_0 \cdot c^2$$

Impulsen

Impulsen kan findes ved hjælp af gammafaktoren på følgende måde:

$$(7) \quad \vec{p} = \gamma \cdot m_0 \cdot \vec{v}$$

Hvis man kombinerer formlerne (7) og (4) får man en anden formel for impulsen:

$$(8) \quad \vec{p} = \frac{E}{c^2} \cdot \vec{v}$$

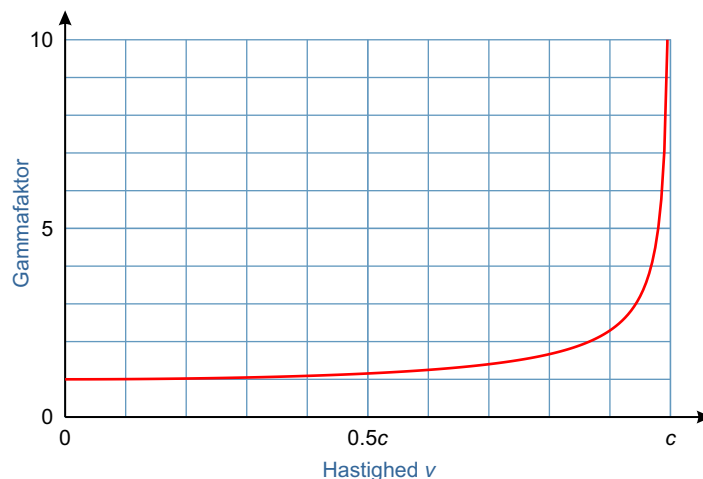
Ønsker man blot størrelsen af impulsen, fjernes vektorpilene. Impulsen kan naturligvis også findes ved hjælp af (3), hvis man kender partiklens energi og dens masse ved at løse en ligning i sit CAS-værktøj.

Gammafaktoren og farten i laboratoriet

Gammafaktoren er defineret ved formlen:

$$(9) \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

hvor v er partiklens fart i laboratoriet. Gammafaktoren opfylder $\gamma \geq 1$. Når partiklen ligger stille, er gammafaktoren lig med 1. Hvis partiklen har meget stor fart på, kan gammafaktoren blive vilkårlig stor. Formel (9) kan bruges til at bestemme partiklens fart, hvis man kender gammafaktoren. Nedenfor er afbildet en graf over gammafaktorens afhængighed af hastigheden v . Som en tommelfingerregel plejer man at sige, at når hastigheden er over 10% af lysets hastighed, bør man regne relativistisk.



Den invariante masse

Lad os kigge på formel (2), blot vendt rundt:

$$(10) \quad m_0^2 \cdot c^4 = E^2 - p^2 \cdot c^2$$

Formlen gælder for én partikel. Hvad der imidlertid er overraskende er, at formelen også med fordel kan bringes til at virke for et *partikelsystem*, forstået på følgende måde: Lad

os sige, at der er n partikler med energierne E_1, E_2, \dots, E_n og impulser $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_n$. Da kan vi indføre en størrelse M_0 , så følgende gælder:

$$(11) \quad M_0^2 \cdot c^4 = \left(\sum_{i=1}^n E_i \right)^2 - \left(\sum_{i=1}^n \vec{p}_i \right)^2 \cdot c^2$$

Bemærk, at første parentes på højre side er summen af partiklernes energier, mens den første del af andet led er længden af den samlede impulsvektor i 2. potens. Størrelsen M_0 betegnes *partikelsystemets invariante masse*. Det interessante er, at denne størrelse *ikke* afhænger af, hvilket (reference)system (inertialsystem) energierne og impulserne er målt i! Beviset for denne påstand er for kompliceret til at blive bragt her. Da venstresiden i (11) er uafhængig af valg af referencesystem, så bliver højresiden det også. Højresiden giver altså det samme, uanset hvilket referencesystem, man anvender. Denne kendsgerning udnyttes kraftigt i opgaveregning, idet man kan vælge sig et fordelagtigt referencesystem at regne i – typisk CMS (se senere). Vi kan endda slutte en ting mere: Højresiden af (11) - og dermed også den invariante masse M_0 - er uændret ved en *reaktion*, for der er jo energi og impulsbevarelse ved en reaktion! Hvordan kan den invariante masse for et partikelsystem da tolkes? Hvis der kun er én partikel, så er M_0 lig med partiklens hvilemasse, som det fremgår af (10). Hvis der er flere partikler: I CMS er partiklernes samlede impuls lig med nulvektor. Derfor går sidste led i (11) ud og vi har: $M_0 \cdot c^2 = \sum E_i$ i CMS. Man kan derfor tolke M_0 som den hvilemasse en enkelt partikel skulle have, for at have samme hvileenergi som summen af alle partiklernes energier i CMS. Mere om den invariante masse under punktet *Tærskelenergien*.

Tærskelenergien

Undertiden bliver man spurgt om, hvor stor en energi, der skal til, for at en bestemt reaktion kan foregå. Man skal lige vide, at i sådan en formulering, vil man normalt underforstå den *kinetiske energi*, partiklen eller partiklerne skal have for at reaktionen kan forløbe. Det kan være, at der efter en reaktion er en større samlet hvilemasse end før reaktionen. Da kræver det kinetisk energi, for at reaktionen kan forløbe.

Man kan vise, at en samling af partikler altid har et referencesystem, hvor den samlede impulsvektor er 0-vektoren. Et sådant system er CMS (*Center of Mass System*), og det kaldes på dansk for *massemidtpunktssystemet*. Se mere herom i næste punkt.

Tilbage til formel (11) med den invariante masse: Som nævnt er den invariante masse uafhængig af det valgte system og også uændret ved reaktionen. Der kan da være meget fornuft i at vælge CMS som ens system *efter* reaktionen. Det betyder nemlig, at sidste led i (11) forsvinder! *Før* reaktionen bruges laboratoriesystemet. Man kan nu overveje at sænke den kinetiske energi af partiklerne i laboratoriesystemet før reaktionen. Det vil naturligvis få den invariante masse til at blive mindre. Den nedre grænse for M_0 svarer til at partiklerne efter reaktionen ligger stille i CMS. Det er dette faktum, som fastlægger tærskelenergien og dermed hvilken kinetisk energi, der mindst er nødvendig i laboratoriesystemet for at danne partiklerne ved reaktionen.

Tærskelenergien

For at bestemme tærskelenergien for reaktionen, kan man altså med fordel vælge CMS for systemet af partikler *efter* reaktionen, hvor partiklerne vil ligge stille. Det betyder, at sidste led i (11) går ud, samt at partiklernes energier er lig deres hvile-energi. Dermed haves et udtryk for $M_0^2 \cdot c^4$ efter reaktionen. Herefter findes et udtryk for $M_0^2 \cdot c^4$ i laboratoriesystemet *før* reaktionen. Den vil typisk indeholde en impulsverdi. Da den invariante masse er bevaret under reaktionen, kan vi sætte de to udtryk lig med hinanden og bestemme impulsen i laboratoriesystemet. Herefter kan energien E og den kinetiske energi E_{kin} (tærskelenergien) for den relevante partikel bestemmes.

Hvis man har at gøre med en partikel, der i laboratoriet skydes ind mod en anden partikel i *hvile*, så kan man vise, at følgende formel gælder for tærskelenergien:

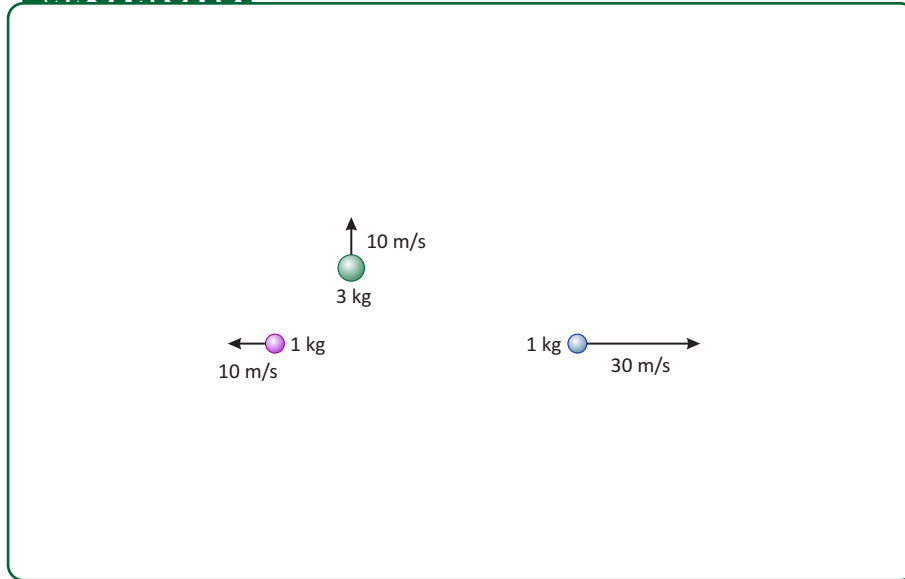
$$(12) \quad E_{kin,tærskel} = -Q \cdot \left(\frac{m_{før} + m_{efter}}{2 \cdot m_{target}} \right)$$

hvor $m_{før}$ og m_{efter} er den samlede hvilemasse før og efter reaktionen, m_{target} er hvilemassen af partiklen, der beskydes og $Q = -(m_{efter} - m_{før}) \cdot c^2$ er reaktionens Q -værdi. Vi henlægger beviset for formlens rigtighed til appendiks B.

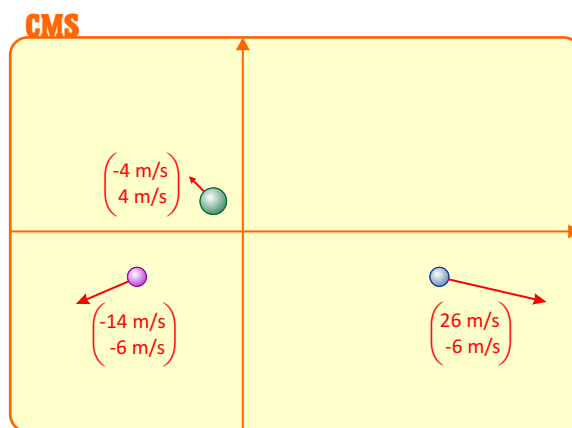
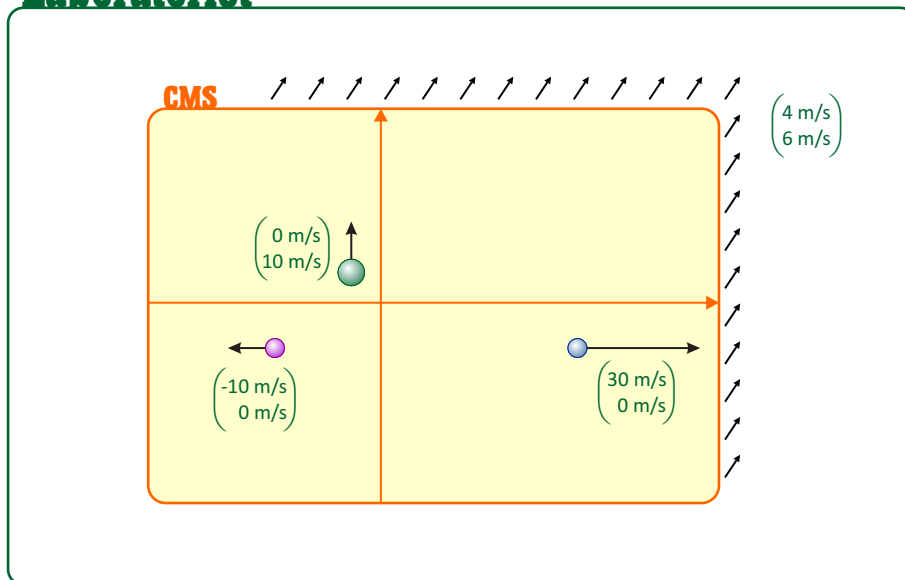
CMS

Under dette punkt vil vi kigge på Center of Mass systemet CMS. Meningen er at give læseren en fornemmelse af begrebet. For at gøre det mere forståeligt, tager vi udgangspunkt i det klassiske, ikke-relativistiske tilfælde. Som et eksempel forestiller vi os tre partikler, der bevæger sig i *Laboratoriet* (LAB). For at gøre det simpelt antager vi endvidere, at bevægelserne foregår i to dimensioner i papirets plan. Idéerne kan dog nemt overføres til det tredimensionale rum. Betragt den øverste figur på næste side. Størrelserne og retningerne af partiklernes hastigheder er angivet sammen med deres masser. Ved at vægte partiklernes positioner til et givet tidspunkt med deres masser, kan man beregne et *tyngdepunkt* også kaldet et *massemidtpunkt* for partikelsystemet. Vi skal ikke gå i detaljer med formler her. Dette massemidtpunkt vil vi lade være *Origo*, dvs. begyndelsespunkt, i et nyt koordinatsystem CMS. Akserne i CMS vil vi lade være parallelle med de respektive akser i laboratoriesystemet. CMS til et bestemt tidspunkt er afbildet på den anden figur på næste side. Når tiden går, vil partiklerne bevæge sig. Det vil give anledning til nye værdier for massemidtpunktet. CMS vil altså bevæge sig, når partiklerne gør det. Man kan vise, at da vi har at gøre med et *isoleret partikelsystem*, dvs. et system, der ikke er påvirket af kræfter udefra, vil CMS bevæge sig med konstant hastighed. Det sikrer, at CMS også er et *inertialsystem* i forhold til LAB. Du kan studere CMS nærmere i opgave 18. På den anden figur på næste side er det vist, hvordan CMS bevæger sig skråt opad til højre med hastigheden (4 m/s, 6 m/s).

Laboratoriet



Laboratoriet



Vi skal nu overveje, hvordan situationen ser ud set fra CMS, altså hvordan vil en person, der følger med dette system, opleve partiklernes bevægelse. Det er det, der er vist på den tredje figur på forrige side. Rent matematisk får man de relative hastigheder af partiklerne i forhold til CMS ved at trække hastigheden af CMS fra partiklernes hastigheder i forhold til LAB. Det kan man se på den tredje figur, hvor de med rødt angivne udtryk for hastighederne er i forhold til CMS. Man skal være opmærksom på, at denne måde at trække hastigheder fra hinanden *ikke* går i det relativistiske tilfælde. Her skal mere indviklede formler anvendes.

NB! På figurerne er de grønne udtryk for hastighedsvektorerne i forhold til LAB, mens de røde udtryk for hastighedsvektorerne er i forhold til CMS.

Det gode ved CMS systemet er, at summen af impulserne af partiklerne giver nulvektor:

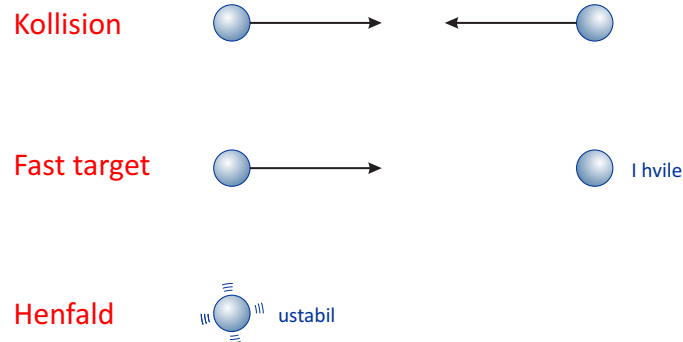
$$\begin{aligned}\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 &= m_1 \cdot \vec{v}_1 + m_2 \cdot \vec{v}_2 + m_3 \cdot \vec{v}_3 \\ &= 1 \text{ kg} \cdot \begin{pmatrix} -14 \text{ m/s} \\ -6 \text{ m/s} \end{pmatrix} + 1 \text{ kg} \cdot \begin{pmatrix} 26 \text{ m/s} \\ -6 \text{ m/s} \end{pmatrix} + 3 \text{ kg} \cdot \begin{pmatrix} -4 \text{ m/s} \\ 4 \text{ m/s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \text{ m/s} \\ 0 \text{ m/s} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Dermed går sidste led ud ved brug af den vigtige formel (11). Højresiden i (11) er dermed lettere at udregne. Hvis partiklerne endda ligger stille i CMS – hvilket er tilfældet, når tærskelenergien er anvendt i reaktionen – så bliver det endnu nemmere: Så reducerer summen af energierne af partiklerne i forhold til CMS til summen af partiklernes hvileenergier! Sidstnævnte fremgår af formel (3). Afgørende er naturligvis også, at CMS er et inertialsystem, og at den invariante masse er uafhængig af referencesystemet!

Forskellige typer reaktioner

Hvor det i fission eller fusionsprocesser i kernefysikken handler om at omdanne masse til energi, så er det ofte omvendt i partikelfysikken. Her dannes der ofte nye partikler og større samlet masse. Det kræver derfor tilførsel af energi. I praksis sker det ofte ved at partikler med stor fart støder sammen. For at partiklerne kan få høj energi, skal de derfor accelereres i en accelerator. Der er i al væsentlighed to måder man kan få en reaktion til at foregå på: Enten kan man i en *accelerator* accelerere en partikel op og skyde den ind mod en anden partikel i hvile, eller man kan accelerere to partikler op og lade dem kolliderer i en såkaldt *Collider*. I sidstnævnte vil den samlede impuls typisk være lig med 0-vektor. Der foregår dog også *henfald* i partikelfysik. Hvis en partikel er ustabil, kan den henfalde til andre partikler, og det sker helt af sig selv. I databogen kan man finde typiske henfald for de enkelte partikler sammen med levetider. Ved et henfald er der mindre masse efter reaktionen, således at der dannes energi, som de nye partikler får tildelt i form af kinetisk energi. Man skal huske, at de levetider eller halveringstider, som man aflæser i databogen er i *hvilesystemet*. Henfalder en partikel i bevægelse, skal man omregne data-værdierne til laboratorie-systemet, hvis det er her man regner! Problematikken kan læses i afsnittet om *Myoner i atmosfæren* side 32.

I LAB før sammenstød/reaktion



I de to første tilfælde behøver der ikke nødvendigvis være tale om samme partikel. De kan endda have forskellig masse. I princippet behøver partiklerne i en kollision heller ikke at have samme størrelse impuls, men modsat rettet. Det vil dog ofte være tilfældet i konkrete opgaver. En partikel kan naturligvis henfalde mens den har fart på, men ofte vil den i opgaver ligge stille, når den henfalder.

Bemærk, at hvis to partikler kolliderer, således at den samlede impulsvektor er nulvektor i LAB, så vil den samlede impuls efter reaktionen også være nulvektor på grund af impulsbevarelsen. Det betyder, at CMS ikke bevæger sig! Dermed falder LAB og CMS sammen.

Man skelner mellem to typer sammenstød: *Elastiske* og *uelastiske*. Fra vores viden om stød mellem makroskopiske genstande ved vi, at et elastisk stød er defineret ved at den samlede kinetiske energi er bevaret ved reaktionen. Det er ikke tilfældet ved uelastiske stød. I partikelfysik er de ækvivalente begreber følgende:

Sammenstød	Definition
Elastisk sammenstød	Her afbøjes partiklerne, men det er de samme partikler, der kommer ind og ud.
Uelastisk sammenstød	Her dannes nye partikler, eller de eksisterende partikler omdannes.

Et specialtilfælde af et uelastisk sammenstød er en *annihilation*, hvor en partikel og dens antipartikel mødes og skaber ren energi. Det kan for eksempel være en positron, som møder en elektron og bliver til to (sjældent tre) fotoner: $e^+ + e^- \rightarrow \gamma + \gamma$. Et andet specialtilfælde er den modsatte proces, hvor energi bliver til masse. Hvis en foton har tilstrækkelig høj energi, kan den for eksempel blive til et elektron-positron par. Man taler om *pardannelse*: $\gamma \rightarrow e^- + e^+$. Sidstnævnte kan foregå, hvis fotonen passerer tæt forbi en atomkerne.

Klassiske formler grænseværdier for relativistiske

I matematikken kan man ret nemt vise, at der gælder følgende tilnærmelse, som bliver bedre og bedre jo tættere x kommer på 0: $1/\sqrt{1-x} \approx 1 + \frac{1}{2}x$. Denne formel kan vi benytte til at vise, at den relativistiske formel for en partikels kinetiske energi nærmer sig til den klassiske, når hastigheden nærmer sig til 0. Hvis v er meget mindre end lysets hastighed c , så er $v^2/c^2 \approx 0$. Vi kan sætte v^2/c^2 ind i stedet for x , hvorved vi da får:

$$(13) \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \approx 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{v^2}{c^2} \quad \text{for } v \ll c$$

Ved at indsætte i (6) fås:

$$(14) \quad E_{kin} = (\gamma - 1) \cdot m_0 \cdot c^2 \approx \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{v^2}{c^2} - 1\right) \cdot m_0 \cdot c^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{v^2}{c^2} \cdot m_0 \cdot c^2 = \frac{1}{2} \cdot m_0 \cdot v^2$$

som viser det ønskede.

Fotoner og andet

Vi skal benytte den vigtige formel (3) til at bestemme forskellige energier. Hvis en partikel har impuls 0, så fås af (3):

$$E = \sqrt{m_0^2 \cdot c^4 + 0^2 \cdot c^2} = \sqrt{m_0^2 \cdot c^4} = m_0 \cdot c^2$$

hvilket er partiklens hvileenergi. Det passer fint med at partiklen jo ligger stille, når impulsen er 0! Lad os kigge på impulsen af en foton ved igen at bruge (3). Da massen af en foton er 0 fås:

$$(15) \quad E_{foton} = \sqrt{0^2 \cdot c^4 + p^2 \cdot c^2} = \sqrt{p^2 \cdot c^2} = p \cdot c$$

Vi har den velkendte formel $E_{foton} = h \cdot f$ for energien af en foton. Benyttes (15) samt formlen $f \cdot \lambda = c$, får vi formler for impulsen af en foton:

$$(16) \quad p_{foton} = \frac{E_{foton}}{c} = \frac{h \cdot f}{c} = \frac{h \cdot c/\lambda}{c} = \frac{h}{\lambda}$$

Der er nogle erkendelser, der er vigtige i opgaveregning:

Bevarelsessætninger

- Den samlede energi før og efter en reaktion er bevaret.
- Den samlede impuls-vektor før og efter en reaktion er bevaret
- Den invariante masse er bevaret ved skift til andet referencesystem (inertialsystem) samt før og efter en reaktion.

Eksempel 1

I et forsøg skydes en proton A ind mod en anden proton B i hvile. Vi skal beregne tærskelenergien for A for at få skabt en proton, en neutron og en pi plus partikel:

$$(17) \quad p + p \rightarrow p + n + \pi^+$$

For en ordens skyld undersøger vi lige, om bevarelseslovene i boksen side 5 er opfyldt.

Baryontal: $1 + 1 \rightarrow 1 + 1 + 0$ (stemmer)

Leptontal: $0 + 0 \rightarrow 0 + 0 + 0$ (stemmer – og gælder alle tre familier af leptoner)

Ladningstal: $1 + 1 \rightarrow 1 + 0 + 1$ (stemmer)

Vi er nu klar til at udregne tærskelenergien. Vi vil både gøre det ved at bruge teknikken beskrevet i boksen side 10 samt ved hjælp af den færdige formel (12). Sidstnævnte kan bruges, da den ene proton ligger stille (target-partiklen).

Løsning 1 (via metoden i boksen side 10)

Først findes alle hvilemasserne af de involverede partikler:

$$m_{\text{proton}} = 938,3 \text{ MeV}/c^2$$

$$m_{\text{neutron}} = 939,6 \text{ MeV}/c^2$$

$$m_{\text{piplus}} = 139,6 \text{ MeV}/c^2$$

I LAB før reaktionen

Proton A har fart på i laboratoriet (LAB). Kald partiklens impuls for p . Vi kan bestemme dens energi i LAB ved brug af den vigtige formel (3):

$$(18) \quad E_A = \sqrt{m_{\text{proton}}^2 \cdot c^4 + p^2 \cdot c^2}$$

Proton B ligger stille i LAB og dens energi her er derfor givet ved hvileenergien:

$$(19) \quad E_B = m_{\text{proton}} \cdot c^2$$

Vi bruger nu formel (11) til at bestemme et udtryk for $M_0^2 \cdot c^4$ for de to protoner i LAB:

$$(20) \quad \begin{aligned} M_0^2 \cdot c^4 &= (E_A + E_B)^2 - (\vec{p} + \vec{0})^2 \cdot c^2 \\ &= (\sqrt{m_{\text{proton}}^2 \cdot c^4 + p^2 \cdot c^2} + m_{\text{proton}} \cdot c^2)^2 - p^2 \cdot c^2 \end{aligned}$$

hvor vi har indsat udtrykkene for energierne fra (18) og (19).

I CMS efter reaktionen

Ved tærskelenergien for proton A svarer det til, at de tre partikler efter reaktionen ligger stille i CMS. Partiklernes energier i CMS bliver derfor lig med deres hvileenergi.

Endvidere er alle impulser 0 i CMS, da alle tre partikler er i hvile her. Dermed får vi et særligt nemt udtryk for $M_0^2 \cdot c^4$ ved brug af (11):

$$(21) \quad \begin{aligned} M_0^2 \cdot c^4 &= (E_{proton} + E_{neutron} + E_{piplus})^2 - (\vec{0} + \vec{0} + \vec{0})^2 \cdot c^2 \\ &= (m_{proton} \cdot c^2 + m_{neutron} \cdot c^2 + m_{piplus} \cdot c^2)^2 \end{aligned}$$

Da den invariante masse er bevaret ved skift af referencesystem samt uændret ved reaktionen, kan vi sætte de to udtryk for $M_0^2 \cdot c^4$ i (20) og (21) lig med hinanden. Den eneste ubekendte er impulsen p . Den fremkomne ligning kan løses med et CAS-værktøj. Løsningen er $796,3 \text{ MeV}/c$. Ved indsættelse af denne værdi for impulsen i formel (3), kan energien af proton A findes. Endelig fås den minimale kinetiske energi for proton A ved at trække hvileenergien fra, ifølge formel (5):

$$(22) \quad \begin{aligned} E_A &= \sqrt{m_{proton}^2 \cdot c^4 + p^2 \cdot c^2} = 1230,7 \text{ MeV} \\ E_{kin,A} &= E_A - m_{proton} \cdot c^2 = 292,4 \text{ MeV} \end{aligned}$$

Bemærkning

Nogle kunne få den tilsyneladende smarte idé at skyde genvej og forsøge at løse opgaven nemmere ved blot at udregne summen af alle hvileenergiene af partiklerne efter reaktionen og trække hvileenergiene af alle partiklerne før reaktionen fra og så sige, at forskellen er den kinetiske energi, der skal til. *Men den går ikke!!* Årsagen er, at partiklerne efter reaktionen *ikke* vil ligge stille i laboratoriet (LAB) – selv ikke ved anvendelse af tærskelenergien. Summen af impulsvektorerne før reaktionen er jo ikke nulvektor, hvorfor summen af impulsvektorerne efter reaktionen heller ikke vil være det – ifølge impulsbevarelsen i LAB. Man slipper altså ikke udenom at skifte system til CMS for at løse opgaven.

Løsning 2 (Med brug af formel (12))

Husk, at formlen *kun* kan bruges, når en partikel skydes ind mod en partikel i hvile!

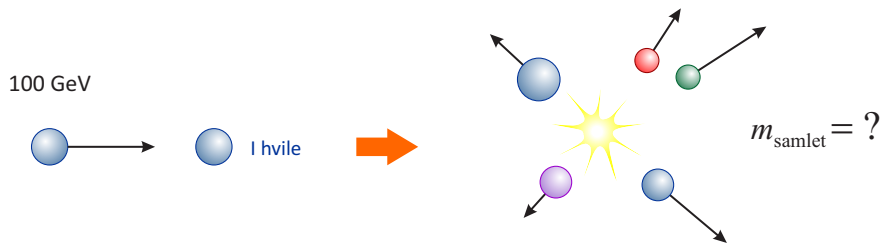
Først definerer vi forskellige masser og beregner derefter Q -værdien:

$$\begin{aligned} m_{før} &= 2 \cdot m_{proton} \\ m_{efter} &= m_{proton} + m_{neutron} + m_{piplus} \\ m_{target} &= m_{proton} \\ Q &= -(m_{efter} - m_{før}) \cdot c^2 \\ E_{kin,tærskel} &= -Q \cdot \left(\frac{m_{før} + m_{efter}}{2 \cdot m_{target}} \right) = 292,4 \text{ MeV} \end{aligned}$$

Opgaven er dermed løst.

Eksempel 2

Vi betragter en proces, hvor en proton med den samlede energi 100 GeV skydes ind mod en anden proton i hvile. Vi er interesseret i at vide, hvor stor en samlet masse, man maksimalt kan skabe efter reaktionen.



(Opgaven er en lettere omformuleret udgave af opgave side 87 i hæftet *Universets byggesten*. Frem for at løse opgaven som i hæftet ved at indsætte formler i andre formler, er det valgt her at give en mere CAS-værktøj venlig fremstilling, så man ikke behøver være ekspert i at omskrive formler. Det vil gøre metoden mere anvendelig til skriftlig eksamen. Der er lagt vægt på, at man får fat i de bagvedliggende idéer til en løsning).

Løsning

Man kunne måske få den idé at omregne de 100 GeV til masse via Einsteins formel og lægge massen af den hvilende proton til for at finde den samlede masse, der maksimalt kan skabes på højre side. *Men det går ikke!* Ligesom i eksempel 1 er problemet er, at den samlede impulsvektor før reaktionen ikke er nul-vektor. Grundet impulsbevarelsen vil den da heller ikke være det efter reaktionen. Og da vor idé indirekte har som antagelse, at partiklerne ligger stille i LAB efter reaktionen, så viser det, at vi er på forkert spor. Heldigvis kan vi altid ty til metoden med den invariante masse. Som i eksempel 1 kalder vi den bevægede proton for A og protonen i hvile for B.

Først defineres de kendte størrelser, idet vi vælger at regne i GeV:

$$m_{proton} = 0,9383 \text{ GeV}/c^2$$

$$E_A = 100 \text{ GeV}$$

I LAB før reaktionen

Dernæst findes proton A's impuls i LAB før reaktionen ved at anvende formel (2): Man løser ligningen $E_A^2 - p^2 \cdot c^2 = m_{proton}^2 \cdot c^4$ med hensyn til p . Den positive løsning er i den forbindelse $99,99559787 \text{ GeV}/c^2$. Vi sætter

$$p = 99,99559787 \text{ GeV}/c^2$$

Så nu kender vi impulsen for proton A i LAB før reaktionen. Vi kan nu bruge formel (11) på hele gruppen af de to partikler før reaktionen:

$$(23) \quad M_0^2 \cdot c^4 = (E_A + m_{proton} \cdot c^2)^2 - (\vec{p} + \vec{0})^2 \cdot c^2 = (E_A + m_{proton} \cdot c^2)^2 - p^2 \cdot c^2$$

Vi har her anvendt, at den samlede energi af proton A er E_A og den samlede energi af den hvilende proton er hvileenergien $m_{proton} \cdot c^2$. Summen af impulserne er $\vec{p} + \vec{0} = \vec{p}$.

Det bemærkes, at efter vi har beregnet impulsen p , er udtrykket på højre side af ligning (23) kendt! Vi går til situationen efter reaktionen i CMS.

I CMS efter reaktionen

Igen skal vi bruge formel (11). Det gode ved CMS er, at her ved vi, at den samlede impuls altid er nul-vektor. Enten kan man i CMS have nogle lidt lettere partikler, som hver har en impuls og dermed en kinetisk energi heri, eller man kan vælge at spørge – som tilfældet er her – om hvor meget masse der maksimalt kan skabes på højre side. Svaret er, at ved den maksimale masse vil partiklerne ligge stille i CMS. Det gør det meget nemt at udregne energierne af partiklerne i CMS, da det blot er summen af hvileenergi-erne! Samtidig er impulserne alle nul-vektorer i CMS. Derfor fås:

$$(24) \quad M_0^2 \cdot c^4 = (m_{samlet} \cdot c^2)^2 - (\vec{0} + \vec{0} + \dots + \vec{0})^2 \cdot c^2 = (m_{samlet} \cdot c^2)^2$$

Lykken er nu at udnytte, at den invariante masse er bevaret ved både skift af reference-system samt før og efter reaktionen. Det betyder, at vi kan sætte udtrykkene på højre side i (23) og (24) lig med hinanden og løse ligningen med hensyn til m_{samlet} :

$$(25) \quad (E_A + m_{proton} \cdot c^2)^2 - p^2 \cdot c^2 = (m_{samlet} \cdot c^2)^2$$

Løsningen er $m_{samlet} = 13,76 \text{ GeV}/c^2$.

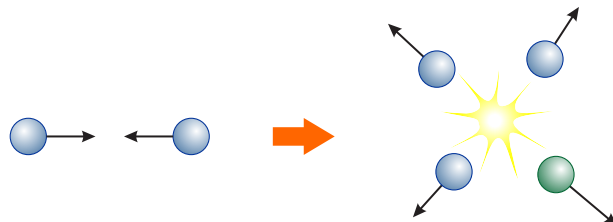
Hvis vi at antager, at to af partiklerne efter reaktionen er protoner, så er der

$$m_{samlet} - 2 \cdot m_{proton} = 13,76 \text{ GeV}/c^2 - 2 \cdot 0,9383 \text{ GeV}/c^2 = 11,88 \text{ GeV}/c^2$$

masse tilbage til resterende partikler. Lad os antage det er pi-mesoner. Da pi-mesoner hver har massen $0,1396 \text{ GeV}/c^2$ eller $0,135 \text{ GeV}/c^2$ alt efter om de er ladede eller neutrale, så kan der altså skabes over 80 pi-mesoner ved sammenstødet!

Eksempel 3

Lad os kigge på et eksempel, hvor to protoner med samme impuls, men modsat rettede, kolliderer head-on. Bestem hvor meget (kinetisk) energi der skal til for at reaktionen kan skabe et nyt proton-antiproton-par: $p + p \rightarrow p + p + p + \bar{p}$.



Løsning

I modsætning til de forrige to eksempler, hvor vi havde et target i hvile, så er den samlede impulsvektor før reaktionen her lig med nulvektor. Da impulsen er bevaret ved reaktionen, er den samlede impulsvektor efter reaktionen også lig med nulvektor. Man kan vise, at det betyder, at CMS ikke bevæger sig i forhold til LAB – se også boksen

side 13. Da vi ved, at tærskelenergien svarer til at alle partikler ligger stille i CMS, vil de også gøre det i LAB. Det betyder, at vi kan blive i LAB i hele opgaven. Faktisk kan vi uden videre konkludere, at den kinetiske energi de to protoner skal have før reaktionen må være lig med minus Q -værdien i reaktionen.

$$m_{proton} = 938,3 \text{ MeV}/c^2$$

$$\Delta m = m_{efter} - m_{før} = 4 \cdot m_{proton} - 2 \cdot m_{proton} = 2 \cdot m_{proton}$$

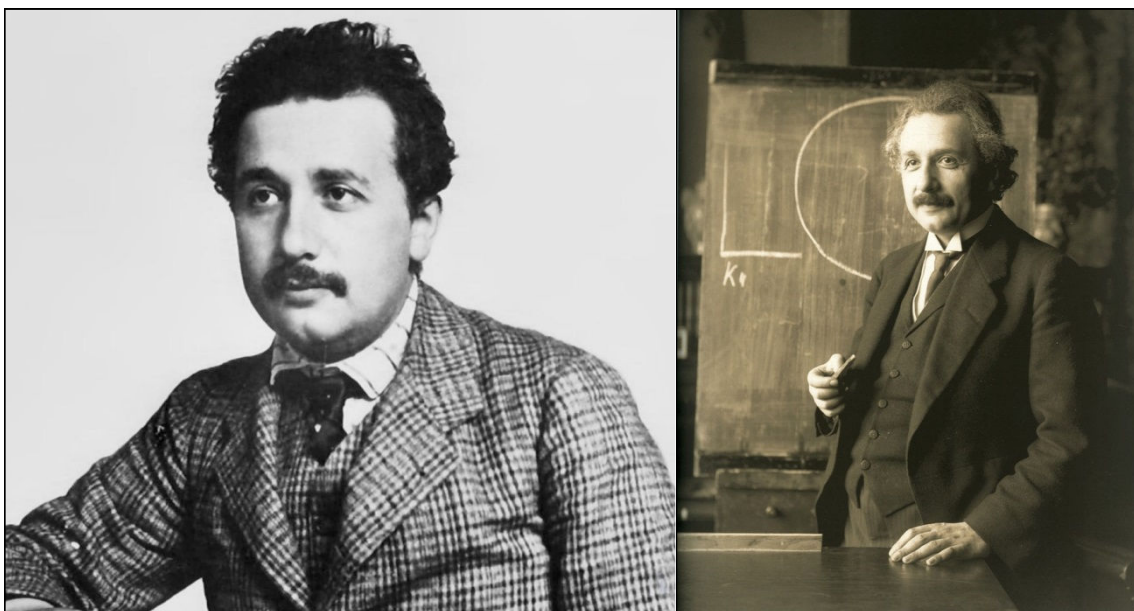
$$-Q = \Delta m \cdot c^2 = 2 \cdot 938,3 \text{ MeV} = 1776,6 \text{ MeV}$$

Derfor skal de to protoner hver have en kinetisk energi svarende til hvileenergien af en proton, nemlig 938,3 MeV .

NB! Man kan naturligvis også bruge den invariante masse til at løse denne opgave, men det vil i realiteten munde ud i de samme ligninger.

Appendiks A - Relativitetsteorien

Vi skal kigge lidt nærmere på grundlaget for *relativitetsteorien* uden at gå alt for meget i detaljer, da det er en ret omfattende teori. Der er egentlig to teorier: Den *specielle* relativitetsteori og den *generelle* relativitetsteori. I den første beskæftiger man sig kun med referencesystemer, som har en konstant hastighed i forhold til hinanden, mens den generelle teori inddrager gravitation og accelererede systemer. Sidstnævnte er overordentligt kompliceret, ikke mindst matematisk, men er nødvendig for at kunne forklare fænomener som sorte huller og andre forhold i astronomien, herunder pulsarer og den kosmiske baggrundsstråling og meget andet. I den generelle relativitetsteori forklares det for eksempel, hvordan lys kan afbøjes ved tilstedeværelsen af stærke gravitationsfelter og at tiden går langsommere her. Tyskeren *Albert Einstein*, som af mange regnes som historiens største fysiker, publicerede sin teori om den specielle relativitetsteori i 1905, og senere i 1916 publicerede han den generelle relativitetsteori.



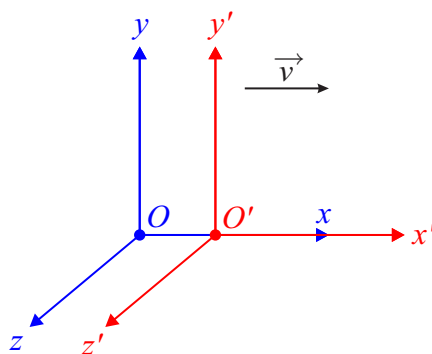
Albert Einstein i en ung (Bern, 1905) og lidt ældre udgave (Vienna, 1921)

I slutningen af 1800-tallet var man af den opfattelse, at lys skal have et medium at udbrede sig i, lidt ligesom lyd skal have. Dette medium for lys blev kaldt *æteren*. I 1887 udførte Michelson og Morley et berømt interferometer-eksperiment, hvor man søgte at bekræfte tilstedeværelsen af en æter. Det lykkedes dog ikke, og efterhånden begyndte man at tvivle mere og mere på æterteorien. Inspireret heraf og af Maxwells teori for *elektromagnetismen*, udviklede Einstein hans revolutionerende specielle relativitetsteori. Han opstillede to grundlæggende postulater, som teorien bygger på:

1. Hvis et koordinatsystem er valgt således, at de fysiske love gælder heri, så gælder de samme fysiske love også i ethvert andet koordinatsystem, som bevæger sig med konstant hastighed i forhold til førstnævnte (*relativitetsprincippet*).
2. I det tomme rum udbreder lyset sig altid med den samme konstante fart c og det i alle retninger, uanset iagttagers eller lyskildens bevægelse.

Referencesystemer, som omtalt i postulat 1 kaldes også for *inertialsystemer*. Relativitetsprincippet kan da også lidt løst udtrykkes ved at *alle inertialsystemer er ækvivalente*. Faktisk udgør et koordinatsystem, som er fastgjort til Jorden, i princippet ikke et inertialsystem, idet Jorden blandt andet roterer om sin egen akse og deltager i en årlig ellipse-bevægelse rundt om Solen. Jordens rotation medfører således at ting påvirkes af *fiktive* kræfter såsom Coriolis-kræfter og centrifugalkræfter. Vi vil ikke komme nærmere ind på denne komplikation.

Før Einstein fremkom med sin banebrydende teori blev den såkaldte *Galilei-transformation* anvendt, når man skulle ”oversætte” rumlige koordinater fra et system til et andet. Man gik uden videre ud fra, at man kunne benytte det samme ur i de to systemer. I relativitetsteorien er *tiden* imidlertid ikke en absolut størrelse, men derimod forskellig i forskellige systemer. Dermed blev der tilføjet en ny dimension, udover de tre rumlige, der kan beskrives med koordinaterne x , y og z . Man fik således fire koordinater: (x, y, z, t) . Lad os i det følgende antage, at vi har givet to koordinatsystemer, S og S' , og at sidstnævnte bevæger sig med den konstante fart v ud langs x -aksen på systemet S , samt at der er tale om en *translatorisk* bevægelse (parallelforskydning).



I henholdsvis Galilei-transformationen og Lorentz-transformationen kommer koordinaterne (x', y', z', t') til at se således ud, når origo'erne er sammenfaldende til $t = t' = 0$:

Galilei-transformationen	Lorentz-transformationen
$x' = x - v \cdot t$	$x' = \gamma \cdot (x - v \cdot t)$
$y' = y$	$y' = y$
$z' = z$	$z' = z$
$t' = t$	$t' = \gamma \cdot (t - v \cdot x/c^2)$

hvor $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$. Undertiden benytter man $\beta = v/c$, så $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$.

Størrelsen $\gamma \in [1, \infty[$ kaldes *Lorentz-faktoren* eller blot *gamma-faktoren*. Formlerne i Galilei-transformationen er ret indlysende, mens de tilsvarende for Lorentz-transformationen kan udledes ud fra Einsteins to postulater. Det vil dog ikke blive gjort her, da det ikke er helt enkelt. Vi skal i stedet blot antyde problematikken ved at gennemgå det

tankeeksperiment, som Einstein oprindeligt selv fremsatte og som viser, at hvis man har to inertialsystemer, hvor det ene bevæger sig med farten v i forhold til det andet, så kan personer i de to systemer blive uenige, om noget er foregået *samtidigt!* Dermed er det klart, at det vil være umuligt at bruge det samme ur i de to systemer.

Einsteins tog-paradoks

For at forklare *Einsteins tog-paradoks* skal vi gøre brug af figurerne på næste side, hvor toget af pædagogiske grunde dog er erstattet af en simpel vogn uden overbygning. Vi forestiller os at Poul står stille i det system S , som er jordoverfladen, og at Lise står stille på togvognen, som er det system S' , der bevæger sig med den konstante fart v i forhold til jordoverfladen (skinnerne). Før vi går videre er det nødvendigt nøje at definere, hvad det vil sige, at to begivenheder foregår samtidigt i forskellige punkter:

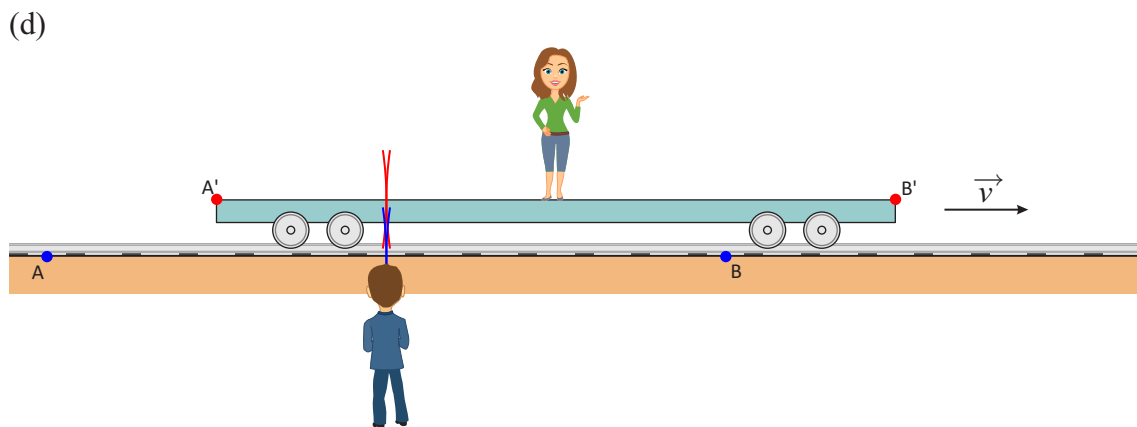
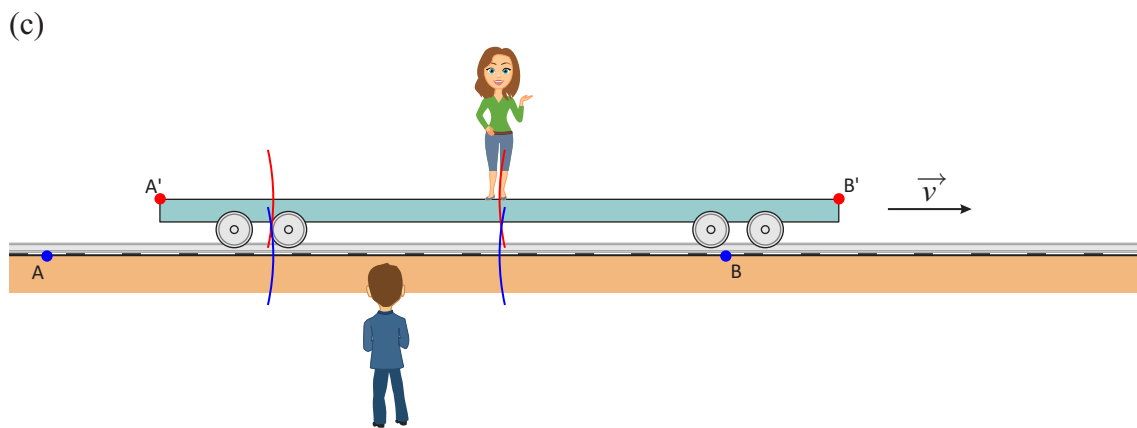
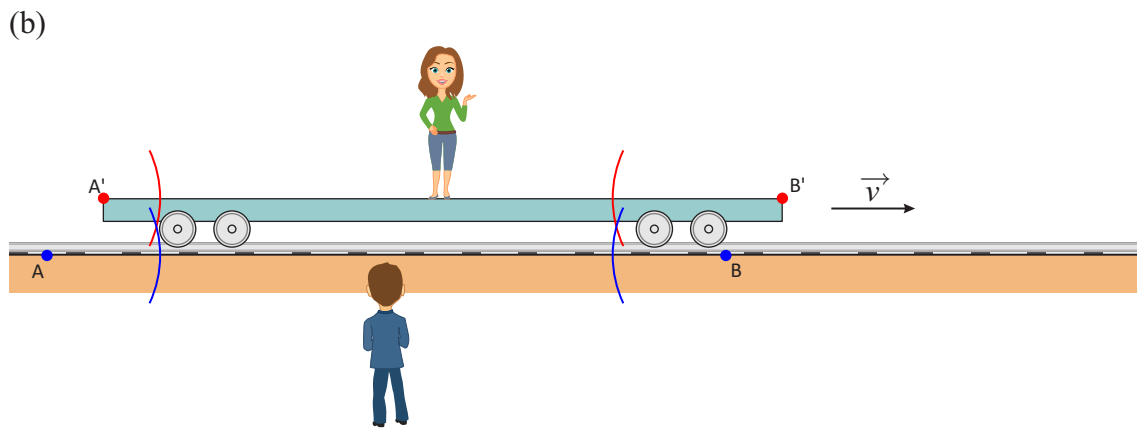
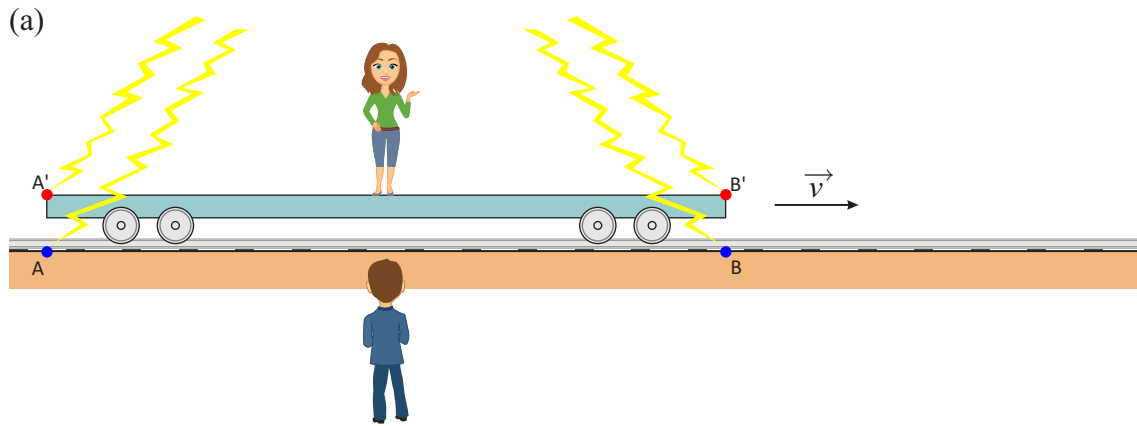
Samtidighed

To begivenheder, der foregår i punkterne A og B, siges at være *samtidige*, såfremt et lyssignal udsendt fra A, når begivenheden her finder sted, og et lyssignal udsendt fra B, når begivenheden her finder sted, når frem til en iagttager i samme afstand fra A og B til det samme tidspunkt.

Under et tordenvejr slår der lyn ned i hver ende af togvognen. I det øjeblik, hvor hvert lyn rammer, afsættes et mærke på såvel skinner som togvogn, hvorefter der sendes lysglimt ud i alle retninger fra mærkerne. Det er det, der er illustreret under (a) på figuren på næste side. Lidt senere har lyset fra mærkerne udbredt sig som vist under figurens punkt (b). Egentlig udsendes lyset i en kugleformet bølge, men da vi kun er interesseret i, hvor langt lyset er nået langs skinnerne, er lysudbredelsen angivet ved en cirkelbue. Lyset fra mærkerne A og B på skinnerne er angivet med blå buer, og lyset fra mærkerne A' og B' på togvognen er tegnet med røde buer. I (c) på figuren er lyset fra mærket B' nået frem til Lise, mens lyset fra A' endnu ikke er nået frem til hende. Da Lise befinder sig lige langt fra A' og B', må hun konstatere, at begivenhederne i A' og B' *ikke* er foregået samtidigt. Set fra hendes system bevæger lyset sig jo også med hastigheden c i alle retninger, jvf. Einsteins 2. postulat. Set fra jordens system er det fordi togvognen er kommet lyset fra mærket B' i møde, mens den bevæger sig væk fra lyset fra mærket A'. Poul derimod oplever under punkt (d) på figuren, at lyset fra A og B er nået frem til ham til samme tidspunkt. Da han desuden befinder sig lige langt fra A og B, så vil han sige, at de oprindelige begivenheder i A og B var foregået samtidigt!

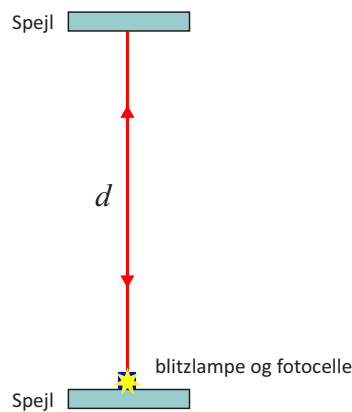
Det er vigtigt at bemærke, at der ingen absolut sandhed er her. Man kan ikke afgøre, hvem af de to personer der har ret. Det ene system er ikke bedre end det andet! En anden vigtig pointe: Sker to begivenheder i det samme punkt eller i det samme plan vinkelret på \vec{v} , så er der enighed om, hvad der foregår samtidigt i de to systemer.

NB! Hvis man påpeger at Poul står lidt tilbagetrukket fra skinnerne, vil det ikke ændre på, at han vil opleve at signalerne når ham til samme tidspunkt, blot lidt senere end det der svarer til (d) på figuren.

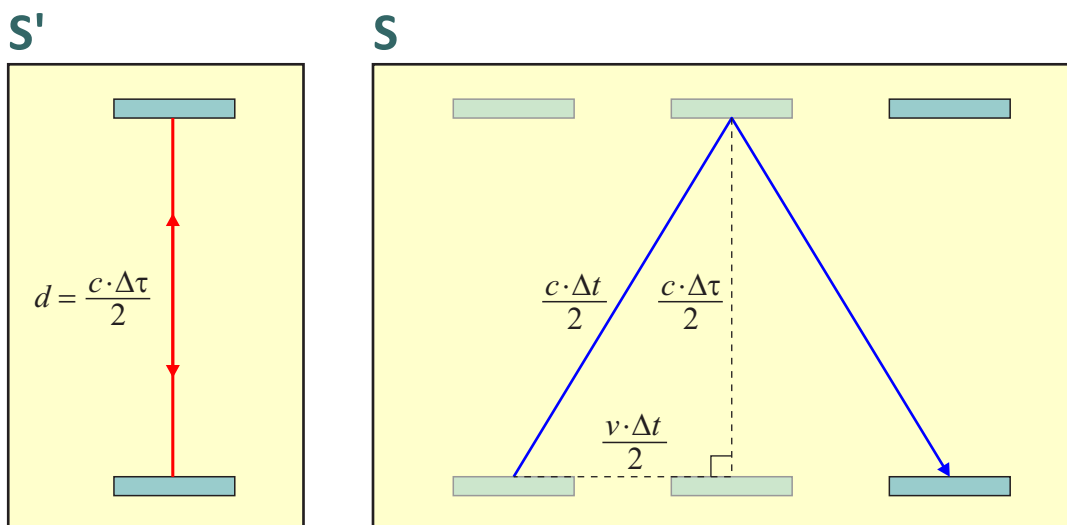


Feynman-uret og et udtryk for tidsforlængelsen

Da vi i forrige afsnit fandt frem til, at der ikke altid er enighed om, hvornår to begivenheder er foregået samtidigt i to forskellige inertialsystemer, bør det stå klart, at man heller ikke kan anvende det samme ur i de to systemer. I dette afsnit skal vi ved et smart argument – uden at gøre brug af Lorentz-transformationen – finde en sammenhæng mellem tidsrum målt i de to systemer. Vi har givet systemet S' , der antages at bevæge sig med den konstante fart v i forhold til systemet S . Som ur skal vi bruge *Feynmans lysur*, der er et tænkt ur. Det består af to spejle med den indbyrdes afstand d . En blitzlampe påmonteret det nederste spejl sender lys i alle retninger. Det lys, der rammer det øverste spejl og reflekteres tilbage til det nederste spejl, registreres af en fotocelle. Den tid, det har taget at bevæge sig frem og tilbage mellem de to spejle, svarer til tidsrummet mellem to ”tik” på Feynman-uret. Lysglimt reflekteres videre fra det nederste spejl tilbage mod det øverste spejl, hvor det igen reflekteres, etc. ... På den måde har man et ur!



Antag nu, at Lise tager Feynman-uret med i sit system S' , hvor det anbringes i hvile vinkelret på bevægelsesretningen for S' i forhold til S . Poul vil altså se uret bevæge sig med farten v ud af x -aksen. Lad os betegne tidsrummet mellem to tik i Feynman-uret med $\Delta\tau$ og Δt , målt i henholdsvis S' og S . Vi skal i det følgende undersøge sammenhængen mellem de to tidsrum.



For Lise vil urets gang se ud som på figuren på forrige side til venstre, mens den højre del af figuren vil være situationen set fra Pouls system. Da lyset har samme hastighed i de to systemer og lyset klart tilbagelægger en større afstand i S end det gør i S' , så er den eneste forklaring, at tidsrummet Δt er større end $\Delta \tau$. Strækningen gennemløbet i S' er givet ved $c \cdot \Delta \tau$, mens det i S er $c \cdot \Delta t$. Endvidere får lysuret flyttet sig stykket $v \cdot \Delta t$ i x -aksens retning i S . Det giver en retvinklet trekant at regne på, som vi kan bruge Pythagoras sætning på:

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{c \cdot \Delta t}{2}\right)^2 &= \left(\frac{v \cdot \Delta t}{2}\right)^2 + \left(\frac{c \cdot \Delta \tau}{2}\right)^2 \\
 \Leftrightarrow c^2 \cdot (\Delta t)^2 &= v^2 \cdot (\Delta t)^2 + c^2 \cdot (\Delta \tau)^2 \\
 \Leftrightarrow (\Delta t)^2 &= v^2/c^2 \cdot (\Delta t)^2 + (\Delta \tau)^2 \\
 \Leftrightarrow (\Delta t)^2 \cdot (1 - v^2/c^2) &= (\Delta \tau)^2 \\
 \Leftrightarrow \Delta t &= \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \cdot \Delta \tau
 \end{aligned}$$

eller $\Delta t = \gamma \cdot \Delta \tau$, hvis vi bruger gamma-faktoren.

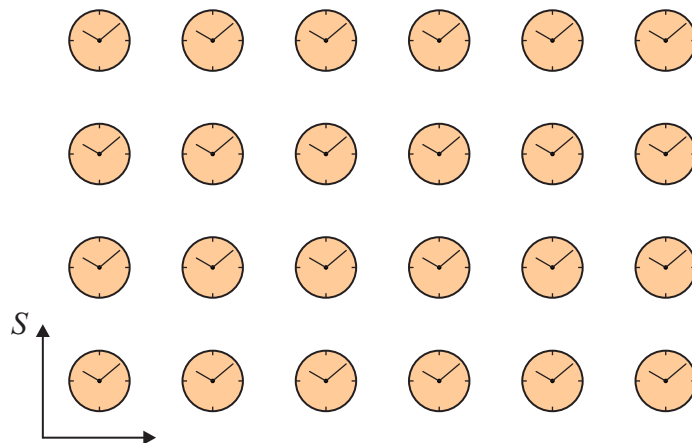
Bemærkning

Strengt taget har vi i udtrykket for den lodrette katete indirekte anvendt det faktum, at længder vinkelret på bevægelsen *ikke* ændres relativistisk set. At dette er tilfældet, kan indses gennem et lille tankeeksperiment. Antag at Lise og Poul, mens de begge var i hvile i det samme system, har savet to planker ud med samme længde. Lise og Poul anbringer hver deres planke langs den positive del af y -aksen, startende i Origo, i hvert deres system S' og S . Lise tilføjer desuden en malerpensel for enden af hendes planke. Lises system S' sætter sig derefter i bevægelse med farten v langs x -aksen i forhold til Pouls System S . For det første bemærker vi, at det ikke har mening at tale om, hvem der bevæger sig. Poul vil sige at Lise bevæger sig med farten v ud af x -aksen i hans system, mens Lise vil sige at Poul bevæger sig med farten v ud af den negative del af hendes x' -akse. De to systemer er ækvivalente og vi kan inddrage relativitetsprincippet. Poul og Lise vil dermed observere det samme set fra deres system. Der er tre muligheder:

- Både Poul og Lise vil opleve, at modpartens planke er kortere end deres egen.
- Både Poul og Lise vil opleve, at modpartens planke er længere end deres egen.
- Poul og Lise vil opleve, at modpartens planke er lige så lang som deres egen.

Lad os afprøve muligheden a): Poul observerer: Lises planke er kortere og vil derfor afsætte et mærke på hans planke. Lise observerer: Pouls planke er kortere end hendes egen, så malerpenslen vil passere over hans planke og ikke afsætte noget mærke. Om der afsættes et mærke eller ej kan ikke afhænge af det system, hvorfra det betragtes. Vi har altså en modstrid, hvorfor muligheden a) må afvises. b) afvises på analog vis. Altså må den tredje mulighed være den rigtige: Plankerne observeres lige lange i de to systemer! Det skal tilføjes, at denne påstand kun gælder for længder vinkelret på bevægelsen. Længder i bevægelsesretningen vil derimod observeres kortere i bevægede systemer, som vi skal se side 28!

Advarsel! Udtrykket for Δt i (26) involverer begivenheder, der sker i *forskellige punkter i rummet* i systemet S . Det er her vigtigt at notere sig, at forskellen på Δt og $\Delta\tau$ *ikke* skyldes forskelle mellem den tid det tager et lyssignal at nå frem fra disse to punkter i rummet til iagttageren, som er i hvile i S . Vi går ud fra, at iagttageren er i stand til at kompensere for denne forskel i rejselængde for lyset. For bedre at forstå det, kan man forestille sig, at man har *synkroniserede* ure i ethvert punkt i rummet i S . Synkroniseringen kan praktisk foregå ved, at man sender et lyssignal til de to ure fra en lysgiver anbragt midt mellem de to ure, hvorefter man indstiller urene til et på forhånd aftalt tidspunkt. Vær dog opmærksom på, at en sådan synkronisering af urene *ikke* duer i det andet system S' – netop fordi man ikke er enige om, hvornår noget foregår samtidigt.



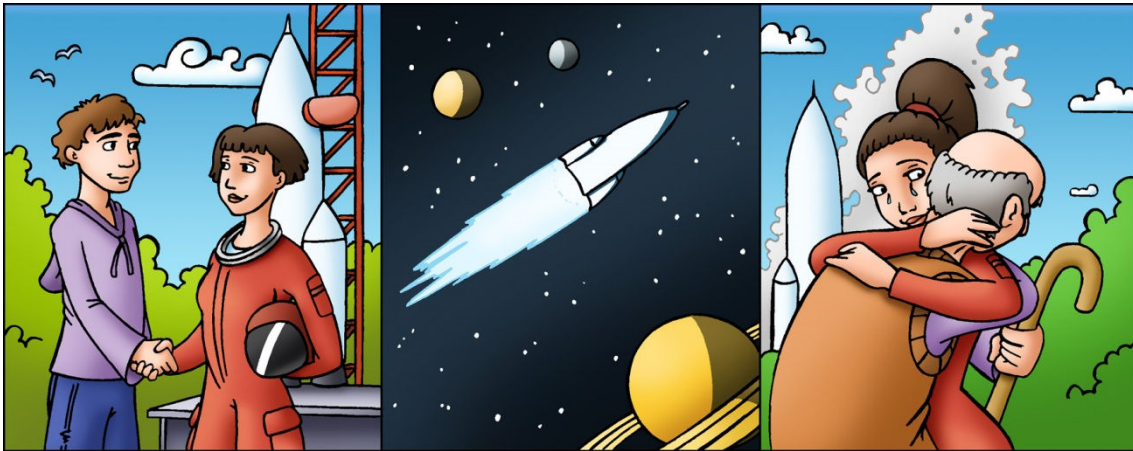
Egentiden (på engelsk *proper time*) – også kaldet *hvetiden* – mellem to begivenheder er den tid, der måles af et ur, som er i hvile i det inertialsystem, hvori de to begivenheder foregår i *samme punkt*. Vi vil fremover betegne egentiden med $\Delta\tau$. Tiden målt i ethvert andet inertialsystem er altid større end eller lig med egentiden: $\Delta t = \gamma \cdot \Delta\tau \geq \Delta\tau$.

Tvillingeparadokset

Mange af følgerne af relativitetsteorien kan virke underlige. For eksempel har vi lige argumenteret for, at der er en *tidsforlængelse* i det bevægede system. Poul vil opleve at tiden går langsommere i Lises system end i hans eget. Men de to systemer er ækvivalente, så vi kan trække relativitetsprincippet ind og konkludere, at Lise på samme måde vil opleve at tiden går langsommere i Pouls system sammenlignet med hendes eget. Det kan virke paradoksalt, men er ikke en modstrid. Det havde været inkonsistent, hvis der havde været ét system – eventuelt et helt tredje inertialsystem, hvori man kunne argumentere for begge påstande, men det er ikke tilfældet.

Det har naturligvis fået fysikerne til at tænke videre. Hvad nu hvis man lader den ene person ud af et tvillingepar tage på en rumrejse med høj fart, mens den anden tvilling bliver hjemme på Jorden? Når rum-tvillingen vender tilbage til Jorden vil han/hun da være yngre end Jord-tvillingen? Svaret er overraskende Ja! Men vil rumtvillingen da også være synligt yngre end Jord-tvillingen. Igen er svaret ja. Måske burde man tilføje

et ”formentligt” til det sidste, da denne del ikke er eksperimentelt verificeret med et menneske endnu. Det vil nemlig kræve, at rum-tvillingen rejser med en hastighed tæt på lysets, for at forskellen i ældning vil kunne ses tydeligt. Da urene på rumskibet går langsommere, må man også formode at alle livsprocesser gør det.



Men viser dette ikke en inkonsistens i relativitetsteorien? Er rum-tvillingens situation ikke ækvivalent med Jord-tvillingens situation – de oplever jo hver især, at den anden flyver væk med stor fart og endda accelererer? Af symmetri Grunde måtte må de da være lige gamle ved hjemkomsten. Nej, der er faktisk en *asymmetri* i situationen: Det er rum-tvillingen, som oplever accelerationerne, ikke den anden tvilling, som er i ro på Jorden.

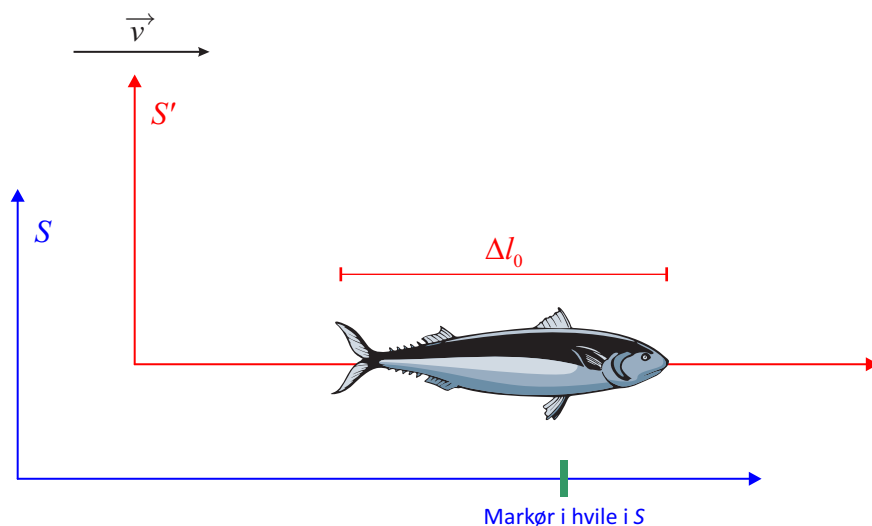


Udover asymmetrien er der som nævnt også en acceleration i spil for rum-tvillingen. Det foregår ved afskeden fra Jorden, hvor rumskibet skal op i fart og i det mindste ét sted ude i rummet, hvor rumskibet må vende rundt samt endelig ved gensynet, hvor rumskibet skal ned i fart før landingen. Selv om rum-tvillingen vælger at foretage store dele af rejsen med konstant hastighed, er der altså mindst to inertial-systemer involveret. For Jord-tvillingen er der kun ét! Er urene endvidere påvirket af et tyngdefelt, så kommer den generelle relativitetsteori i spil, idet det får urene til at gå langsommere.

At tidsforlængelserne er et *reelt* og ikke blot et tænkt fænomen, er også blevet verificeret eksperimentelt: Der er ikke tale om et forsøg med personer, men med et atomur, der blev sendt afsted i et jetfly, som blev sendt to gange rundt om Jorden, først østom og dernæst vestom. Fysikeren Joseph C. Hafele og astronomen Richard E. Keating udførte forsøget i 1971. Da flyet vendte tilbage til Jorden og man sammenlignede urvisningen med et fast atomur, som før forsøget var blevet synkroniseret med uret i flyet, konstaterede man, at urene ikke viste det samme længere! Afvigelse var i nanosekunder området. Det viser sig, at man foruden den specielle relativitetsteori må tage den generelle relativitetsteori i brug for at forklare dette fænomen. Vi skal snart se på et andet tilfælde, hvor tidsforlængelsen kommer i spil ... men først skal vi studere fænomenet længdeforkortning.

Længdeforkortning

En anden konsekvens af Einsteins postulater er, at genstande, som bevæger sig, observeres kortere i bevægelsesretningen. Vi taler om den såkaldte *længdeforkortning* eller *Lorentz-forkortning*.



I det følgende betragter vi kun længder parallelle med bevægelsesretningen. Ifølge bemærkningen side 25 sker der *ikke* nogen ændring i længder, som er vinkelrette på bevægelsesretningen. Vi forestiller os genstanden – her en fisk – anbragt i hvile i Lises system S' , mens Poul befinder sig i hvile i systemet S . Som sædvanlig bevæger S' sig med hastigheden v i forhold til S . Spørgsmålet er hvor lang fisken, der altså farer forbi Poul med farten v , vil blive målt til i Pouls system? I Lises system vil fisken have *hvilelængde*

den Δl_0 , da fisken er i hvile i hendes system. På engelsk kaldes hvilelængden for *proper length*. Poul har af strategiske grunde anbragt en markør i hvile i S . Meningen med den vil snart blive røbet. Det følger af symmetri Grunde, at hvis systemet S' bevæger sig med farten v i forhold til systemet S , så bevæger omvendt systemet S sig ligeledes med farten v i forhold til systemet S' , blot i modsat retning. Ellers ville de to systemer jo ikke være ligeberettigede. Vi har at gøre med to inertialsystemer og i begge skal vi bruge formlen $s = v \cdot t$ for bevægelse med konstant hastighed.

- a) Lad os kigge på sagen fra Pouls system: Poul måler tidsrummet imellem at fiskens snude og fiskens halefinne passerer hans markør. Tidsrummet benævnes $\Delta\tau$. Det er en egentid (hviletid), da der er tale om to begivenheder, som foregår i samme punkt, målt af et ur i hvile i systemet. Poul ved, at fisken bevæger sig med farten v . Han vil derfor sige, at dens længde Δl er givet ved:

$$(27) \quad \Delta l = v \cdot \Delta\tau$$

- b) Situationen for Lise i S' er følgende: Hun observerer, at fisken ligger stille og at markøren bevæger sig forbi fisken fra snude til halefinne. Hun ved, at markørens fart er v , og hun har målt fiskens hvilelængde til Δl_0 . Tidsrummet mellem de to begivenheder, hvor markøren passerer henholdsvis snude og halefinne, kaldes Δt . Lise kan derfor opskrive:

$$(28) \quad \Delta l_0 = v \cdot \Delta t$$

Bemærk, at tiden målt i Lises system *ikke* er en egentid, da begivenhederne foregår i forskellige punkter i S' !

Vi kan nu isolere v i formlerne (27) og (28) og sætte de to udtryk lig med hinanden:

$$(29) \quad v = \frac{\Delta l}{\Delta\tau} = \frac{\Delta l_0}{\Delta t} = \frac{\Delta l_0}{\gamma \cdot \Delta\tau} \Leftrightarrow \Delta l = \frac{\Delta l_0}{\gamma}$$

hvor vi i tredje lighedstegn har brugt vores viden fra (26) om sammenhængen mellem tiderne i de to systemer. Vi har dermed fundet en sammenhæng mellem længder målt i bevægelsesretningen i de to systemer: Genstande i bevægelse vil blive observeret mindre end hvilelængden med en faktor $1/\gamma$. Altså: $\Delta l = \Delta l_0/\gamma \leq \Delta l_0$.

Bemærkning

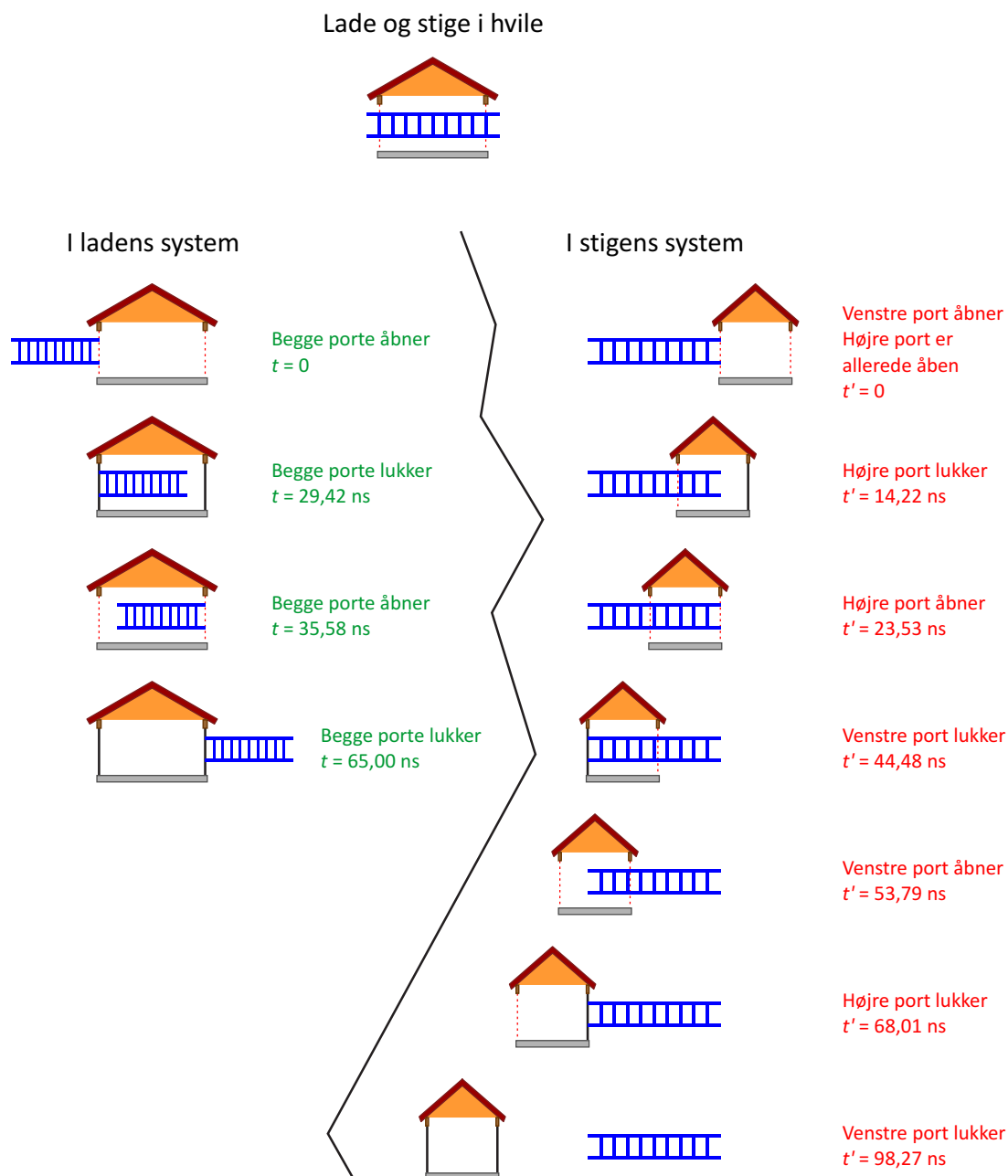
I udledningen af udtrykket for længdeforkortningen ovenfor har vi benyttet formlen $s = v \cdot t$ til at opstille udtryk for længderne. En alternativ måde er at gøre sig klart, at længden observeret i S fås ved til et eller andet vilkårligt fast tidspunkt i S at bestemme de rumlige koordinater til genstandens endepunkter og derefter måle afstanden mellem disse to punkter med et målebånd! Med denne erkendelse for øje kan udtrykkene for længdeforkortningen ret hurtigt udledes ved hjælp af Lorentz-transformationen side 21 (se opgaverne 13 og 14). ■

Det er en interessant konstatering, at eftersom genstande i bevægelse observeres kortere i bevægelsesretningen, men med uændret længde vinkelret herpå, så vil genstande i be-

vægelse observeres som havende en anden *form*. En cirkel, der bevæger sig i forhold til en iagttager, vil for eksempel blive observeret som værende en ellipse.

Den egentlige årsag til uenighed om længder i de to systemer har sin rod i uenigheden om *samtidighed*, som vi studerede helt tilbage i togeksemplet. Man kan sagtens forestille sig, at man i det ene system sætter mærker for enden af genstand til *det samme tidspunkt*, men at det set fra det andet system ikke betragtes som samtidigt! Dette fænomen kan gøres tydeligere ved at betragte det såkaldte *stigeproblem* – på engelsk kaldet *The Ladder Paradox* eller *The Pole-Barn Paradox*. Det oplyses, at når en stige ligger stille i forhold til en lade, så er stigen for lang til, at den kan være inde i laden. Ved kendskab til fænomenet længdeforkortning, kunne man nu komme på den idé, om man mon ikke kunne få stigen til at kunne være helt inde i laden, hvis bare man løber stigen ind hurtigt nok? Det ser umiddelbart meget tilforladeligt ud, indtil man finder på at se situationen fra stigens synspunkt. En person, som sidder på stigen vil jo opleve, at det er laden, som flytter sig den modsatte vej, mens stigen ligger stille. Dermed må laden jo forkortes, set i systemet, der følger med stigen. Men så vil problemet med at få stigen til at kunne være indeni laden jo blive endnu større, eller hvad? Stigen kan vel ikke både være inde i laden og ikke? Har vi en inkonsistens i relativitetsteorien? Svaret er nej, der er ikke nogen inkonsistens. Og man kan faktisk godt løbe stigen ind i laden, så den kan være der. Set fra stigens system vil stigen derimod ikke kunne være inde i laden. Om en genstand ”kan være inden i” er altså et *relativt* begreb. Den skeptiske vil måske finde på at tilføje porte for ladens ender og forestille sig, at portene åbner og lukker samtidigt og hurtigt henholdsvis når stigen kommer til en port og når stigens bagende forlader en port. Man kan forestille sig, at en personerne ved de to porte på forhånd har beregnet, hvornår de skal åbne portene samtidigt! På næste side er hændelsesforløbet set fra ladens system illustreret med fire situationer. Vi ser, at stigen da i et øjeblik vil være ”lukket inde” i laden. Det må vel også være tilfældet i systemet, der følger med stigen? Nej, for her vil portene nemlig ikke åbnes/lukkes samtidigt! Således er det med syv situationer antydnet, hvordan stigen kommer igennem laden – eller rettere laden passerer forbi/udenom stigen – uden at stigen banker ind i noget. Årsagen er, at venstre port lukker senere end højre port i stigens system (henholdsvis 6. og 4. delfigur på højre side).

Udgangspunktet for figuren på næste side er, at man har en stige og en lade med hvilelængder henholdsvis 10 meter og 8 meter. I ladens system bevæger stigen sig med farten $0,75 \cdot c$ hen imod laden, og i det øjeblik, hvor stigens højre forende når ladens venstre port, synkroniseres urene i de to systemer til $t = 0$, henholdsvis $t' = 0$. Lorentz-transformationen benyttes herefter til at udregne tiderne for de enkelte hændelser, idet man også gør brug af formlen for Lorentz-forkortningen. Man kan yderligere bringe overblik over situationen ved at tegne et såkaldt *Minkowski-diagram*, hvor både tid og sted figurerer. Matematikeren *Hermann Minkowski* udviklede det såkaldte *Minkowski Spacetime* til at beskrive *hændelser* i. Det vil dog føre for vidt at gå mere i detaljer her. Blot skal det understreges, at man skal passe overordentligt meget på, at man både får taget hensyn til tid og sted, når man argumenterer. Det giver således ingen mening tidsmæssigt at sammenligne situationerne i de to systemer – som afbildet på figuren!



Bemærkning (Fotografi)

Vi er vant til at kunne visualisere et øjebliksbillede af en situation ved et *foto*. Det går som regel ikke i relativitetsteorien, for et foto opstår ved at lys udsendes/reflekteres fra en genstand og rammer en fotografisk film/billedsensor i kameraet. Da lyset fra forskellige punkter i rummet er undervejs i forskellige tidsrum, vil det, der afbildes på filmen, derfor ikke være et billede af, hvad der skete samtidigt! Her er man nødt til at tænke på, at man har synkroniserede ure i ethvert punkt i rummet i det pågældende system. ■

Som med alle ægte videnskabelige teorier er det i princippet muligt at *falsificere* relativitetsteorien. Det er endnu ikke sket. Til dato er den tværtimod blevet bekræftet utallige gange eksperimentelt. Vi skal kigge på et eksempel, hvor man måtte bruge tidsforlængelsen for at kunne forstå det observerede fænomen.

Myoner i atmosfæren

Et klassisk eksempel, som demonstrerer relativitetsteoriens virkning på bedste vis er levetiden for myoner. *Myonen* er en ustabil partikel, som skabes i Jordens øvre atmosfære som følge af kosmisk stråling. Højhastigheds-protoner, der stammer fra vor egen galakse, kolliderer med oxygen og nitrogen kerner og producerer ladede pi-mesoner. Disse pi-mesoner henfalder hurtigt til myoner. Derved skabes en regn af myoner, som bevæger sig ned gennem atmosfæren. Her henfalder partiklerne før eller siden ved den svage vekselvirkning: $\mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$. Anti-myonen henfalder ved en tilsvarende proces: $\mu^+ \rightarrow e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu$.



Myonen blev i 1936 opdaget af forskerne Carl D. Anderson (foto) og Seth Neddermeyer, da de studerede kosmisk stråling. Da partiklens bane krummede mindre end elektronens og mere end protonens i et magnetfelt, og man samtidig antog, at partiklen havde samme ladning som elektronen, konkluderede man, at den nye partikel måtte være tungere end elektronen, men lettere end protonen. Anderson opdagede desuden *positronen*, antipartiklen til elektronen, hvis eksistens forinden var blevet forudsagt teoretisk af fysikeren Paul Dirac. For den opdagelse fik Anderson i 1936 Nobelprisen i fysik sammen med en anden fysiker.

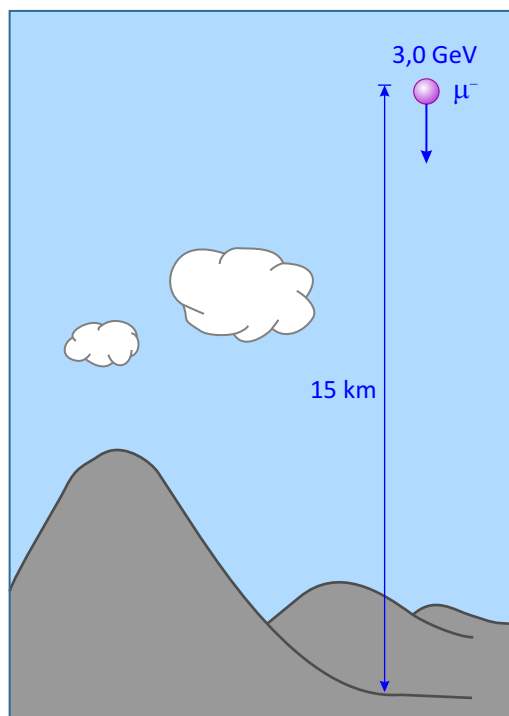
Mens pi-mesonerne typisk bevæger sig mindre end 100 m før de henfalder, når myonerne ret ofte helt ned til jordoverfladen – en strækning på ofte 15 km.

Der er flere ubekendte i problematikken:

- Myonerne skabes ikke helt i samme højde
- De har ikke alle retning direkte mod Jorden
- De lever ikke alle lige lang tid, før de henfalder. Henfald handler om sandsynlighed!
- De har ikke alle samme energi og dermed hastighed.
- Myonerne taber energi ved ioniseringer og andet under deres bevægelse ned gennem atmosfæren.

Vi skal ikke forsøge at tage højde for alle disse forhold, blot regne på, hvor langt en myon med lad os sige en energi på 3,0 GeV, gennemsnitligt vil bevæge sig, før den henfalder. Vi vil se bort fra tab af energi undervejs. Først

bestemmes myonens gammafaktor ud fra partiklens energi E ved hjælp af formel (4) side 7: $E = \gamma \cdot m_0 \cdot c^2$. Når man løser ligningen med hensyn til γ , fås $\gamma = 28,38$.



Dernæst bestemmes myonens fart ved at løse ligningen $\gamma = 1/\sqrt{1-v^2/c^2}$ med hensyn v . Det giver en fart på $0,99938 \cdot c$, hvilket er meget tæt på lysets hastighed. Ifølge databogen er *middellevetiden* for en myon lig med $2,197 \mu\text{s}$. Man kunne nu måske for den idé at udregne den distance, myonen i gennemsnit tilbagelægger, ved at gange denne tid med myonens hastighed: $0,99938 \cdot 299792458 \text{ m/s} \cdot 2,197 \mu\text{s} = 658 \text{ m}$. Men det er forkert! Middellevetiden, der står i databogen, er naturligvis *hviletiden*. Hvad skulle den også ellers være? For at få den rigtige distance er vi nødt til at tage hensyn til *tidsforlængelsen* i det bevægede system (se side 24-25). Set fra Jorden lever myonen længere:

$$(30) \quad \Delta t = \gamma \cdot \Delta \tau = 28,38 \cdot 2,197 \mu\text{s} = 62,36 \mu\text{s}$$

Da vi nu har tid og hastighed i det samme system, kan vi gange dem sammen:

$$(31) \quad \Delta s = v \cdot \Delta t = 0,99938 \cdot 299792458 \text{ m/s} \cdot 62,36 \mu\text{s} = 18680 \text{ m}$$

En myon med en energi på 3,0 GeV kan altså snildt nå ned til Jorden, hvis vi ser bort fra tab i atmosfæren. Relativitetsteorien skal altså i sving for at kunne forklare, hvorfor man observerer så relativt mange myoner ved Jordens overflade!

Man kan også vælge at se på situationen fra myonens system. Herfra vil man opleve, at Jorden farer forbi myonen, som ligger stille. Stykket fra myonens fødselssted i atmosfæren til Jordens overflade vil derimod ikke måles som 15 km! *Længdeforkortningen* kommer nemlig i spil her. Ifølge (29) fås:

$$(32) \quad \Delta l = \frac{\Delta l_0}{\gamma} = \frac{15 \text{ km}}{28,38} = 529 \text{ m}$$

Tiden det vil tage for længdestykket fra atmosfæren til Jordoverfladen at passere forbi myonen kan derfor beregnes:

$$(33) \quad \Delta t = \frac{\Delta l}{v} = \frac{529 \text{ m}}{0,99938 \cdot 299792458 \text{ m/s}} = 1,76 \mu\text{s}$$

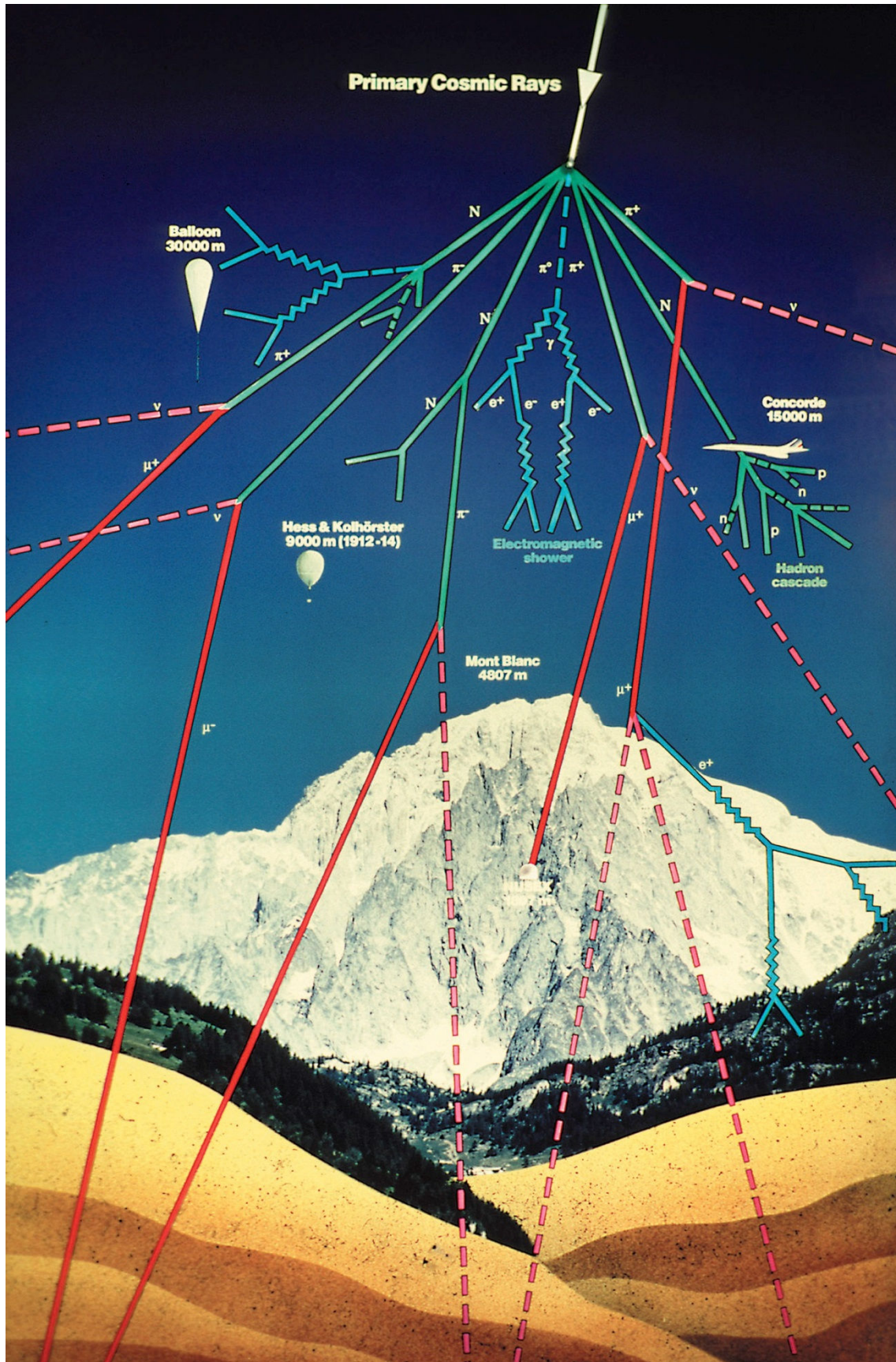
altså et tidsrum, som er lidt mindre end partiklens middellevetid. Så også set fra dette system vil myonen nå Jordoverfladen, og sådan må det selvfølgelig også være!

Som ovenfor nævnt lever alle myoner ikke lige længe. Hvis man vil vide, hvor stor en del af de myoner, der har en energi på 3,0 GeV, der gennemfører en strækning på 15 km i Jord-systemet, må man ty til *henfaldsloven* for radioaktive henfald. Igen ser vi bort fra tab af energi i atmosfæren. For at tilbagelægge mindst 15 km, skal myonen mindst leve følgende tidsrum: $15 \text{ km}/0,99938 \cdot c = 50,07 \mu\text{s}$. Sammenhængen mellem middellevetiden og halveringstiden er $T_{\text{leve,Lab}} = T_{1/2,\text{Lab}}/\ln(2)$ (se opgave 16). Vi får:

$$(34) \quad T_{1/2,\text{Lab}} = \ln(2) \cdot T_{\text{leve,Lab}} = \ln(2) \cdot 62,36 \mu\text{s} = 43,22 \mu\text{s}$$

$$(35) \quad \frac{N(t)}{N_0} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T_{1/2}}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{50,07 \mu\text{s}}{43,22 \mu\text{s}}} = 0,448$$

Så ca. 44,8% gennemfører strækningen. Lab hentyder til Jord-systemet ■



Billede fra CERN's Photo Service. Højenergipartikler rammer atomer i den øverste del af atmosfæren og giver anledning til en regn af partikler. Relativitetsteorien kan gøre rede for, hvorfor så mange myoner når helt ned til jordoverfladen, før de henfalder.

Appendiks B – Tærskelenergi

Vi skal nu give et bevis for den formel for tærskelenergien, som er angivet side 10. En tak til Jens-Søren K. Andersen, Esbjerg Gymnasium, for at have gjort mig opmærksom på formlen og udlede den. Lad os formulere formlen og dens forudsætninger præcist.

Tærskelenergi når targetpartiklen er i hvile

I laboratoriet skydes en partikel ind mod en anden partikel i hvile. Den mindste kinetiske energi (tærskelenergien), som den indkommende partikel skal have for at reaktionen kan foregå, er givet ved følgende formel:

$$(36) \quad E_{kin,tærskel} = -Q \cdot \left(\frac{m_{før} + m_{efter}}{2 \cdot m_{target}} \right)$$

hvor $m_{før}$ og m_{efter} er den samlede hvilemasse henholdsvis før og efter reaktionen, m_{target} er hvilemassen af partiklen, der beskydes, og $Q = -(m_{efter} - m_{før}) \cdot c^2$ er reaktionens Q -værdi.

Bevis: Vi forestiller os, at der før reaktionen er en partikel A, som sendes hen imod en i laboratoriet stillestående partikel B. Efter reaktionen er der n partikler, som vi nummerer fra 1 til n . Vi skal først udnytte, at partikelsystemets invariante masse er uændret før og efter reaktionen, ligesom den heller ikke afhænger af referencesystemet (inertialsystemet). Vi har:

$$(37) \quad \begin{aligned} M_{0,før,lab} &= M_{0,efter,CMS} \\ \Downarrow \\ M_{0,før,lab}^2 \cdot c^4 &= M_{0,efter,CMS}^2 \cdot c^4 \\ \Downarrow \\ (E_A + E_B)^2 - (\vec{p}_A + \vec{0})^2 \cdot c^2 &= \left(\sum_{i=1}^n E_i \right)^2 - (\vec{0})^2 \cdot c^2 \\ \Downarrow \\ (E_A + E_B)^2 - p_A^2 \cdot c^2 &= \left(\sum_{i=1}^n E_i \right)^2 \end{aligned}$$

hvor vi i tredje linje har udnyttet udtrykket (11), at partikel B ligger stille, så $\vec{p}_B = \vec{0}$ samt at den samlede impuls i CMS er nulvektor: $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \dots + \vec{p}_n = \vec{0}$. Lad os regne videre på venstre side i (37):

$$(38) \quad \begin{aligned} &(E_A + E_B)^2 - p_A^2 \cdot c^2 \\ &= E_A^2 + E_B^2 + 2 \cdot E_A \cdot E_B - p_A^2 \cdot c^2 \\ &= (m_A^2 \cdot c^4 + p_A^2 \cdot c^2) + m_B^2 \cdot c^4 + 2 \cdot (E_{kin,A} + m_A \cdot c^2) \cdot m_B \cdot c^2 - p_A^2 \cdot c^2 \\ &= m_A^2 \cdot c^4 + m_B^2 \cdot c^4 + 2 \cdot m_A \cdot m_B \cdot c^4 + 2 \cdot E_{kin,A} \cdot m_B \cdot c^2 \\ &= (m_A + m_B)^2 \cdot c^4 + 2 \cdot E_{kin,A} \cdot m_B \cdot c^2 \end{aligned}$$

I tredje linje i (38) har vi brugt to forskellige udtryk for partikel A's totale energi, nemlig formel (1) og formel (3) side 7. Da partikel B ligger stille i laboratoriet, er dens energi lig med dens hvileenergi, dvs. $E_B = m_B \cdot c^2$. I linje 4 har vi brugt formelen for kvadratet på en 2-leddet størrelse: $(m_A + m_B)^2 = m_A^2 + m_B^2 + 2m_A m_B$. Lad os herefter regne på højre side i (37):

$$(39) \quad \left(\sum_{i=1}^n E_i \right)^2 = \left(\sum_{i=1}^n (E_{i,kin} + m_i \cdot c^2) \right)^2$$

hvor vi har splittet energierne af partiklerne i CMS efter reaktionen op i deres kinetiske energier og deres hvileenergi. Den mindst mulige samlede energi i (39) opnås, hvis alle de kinetiske energier er 0 – partiklernes hvileenergi er jo faste. Det svarer til at alle partiklerne ligger stille i CMS. Vi har dermed:

$$(40) \quad \left(\sum_{i=1}^n E_i \right)_{\min}^2 = \left(\sum_{i=1}^n (0 + m_i \cdot c^2) \right)^2 = \left(\sum_{i=1}^n m_i \right)^2 \cdot c^4$$

Ved at bruge udtrykkene i (38) og (39) og sætte dem ind i (37) får vi følgende ligning for den mindste kinetiske energi partikel A skal have, for at reaktionen kan foregå:

$$\begin{aligned} (m_A + m_B)^2 \cdot c^4 + 2 \cdot E_{kin,A,\min} \cdot m_B \cdot c^2 &= \left(\sum_{i=1}^n m_i \right)^2 \cdot c^4 \\ \Downarrow \\ E_{kin,A,\min} &= \frac{\left(\sum_{i=1}^n m_i \right)^2 \cdot c^4 - (m_A + m_B)^2 \cdot c^4}{2 \cdot m_B \cdot c^2} \\ &= \frac{\left(\sum_{i=1}^n m_i \right)^2 - (m_A + m_B)^2}{2 \cdot m_B} \cdot c^2 \\ &= \frac{\left(\sum_{i=1}^n m_i \right)^2 - (m_A + m_B)^2}{2 \cdot m_B} \cdot c^2 \\ &= \frac{\left(\sum_{i=1}^n m_i - (m_A + m_B) \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^n m_i + (m_A + m_B) \right)}{2 \cdot m_B} \cdot c^2 \\ &= \frac{(m_{\text{efter}} - m_{\text{før}}) \cdot (m_{\text{efter}} + m_{\text{før}})}{2 \cdot m_B} \cdot c^2 \\ &= - \frac{Q \cdot (m_{\text{efter}} + m_{\text{før}})}{2 \cdot m_B} \end{aligned}$$

hvor vi i linje har benyttet, at Q -værdien er lig med $Q = -(m_{\text{efter}} - m_{\text{før}}) \cdot c^2$. Targetpartiklen er partiklen B. Formlen er dermed bevist.

Opgaver

Først nogle opgaver, som tester de basale ting. Derefter stiger sværhedsgraden af opgaverne. Oplysninger om de forskellige partikler kan findes i databogen.

Opgave 1

En Σ^+ partikel har en impuls på $203 \text{ MeV}/c$.

- Aflæs partiklens hvilemasse i databogen.
- Bestem partiklens energi ved hjælp af standardformlen (3)
- Bestem partiklens kinetiske energi
- Bestem gammafaktoren samt partiklens fart

Opgave 2

En Δ^0 partikel har hastigheden $2,58 \cdot 10^6 \text{ m/s}$ i laboratoriet.

- Bestem gammafaktoren
- Bestem partiklens kinetiske energi
- Bestem partiklens (totale) energi
- Bestem partiklens impuls. Prøv både at bruge (3) samt (7). Giver de det samme?

Opgave 3

En K^+ partikel har energien 711 MeV .

- Bestem partiklens impuls
- Bestem partiklens kinetiske energi
- Bestem partiklens fart
- Hvad hedder antipartiklen til K^+ og hvad er dens kvarksammensætning og masse?

Opgave 4

Partiklen Σ^+ kan ifølge databogen henfalde således: $\Sigma^+ \rightarrow n^0 + \pi^+$.

- Redegør for at processen tilfredsstiller de tre bevarelseslove for kvantetal
- Bestem processens Q -værdi
- Hvor meget kinetisk energi må de to partikler på højre side have tilsammen, når det oplyses, at Σ^+ var i hvile i laboratoriet, da den henfaldt?

Opgave 5

En proton accelereres og skydes ind mod en target proton i hvile. Det giver anledning til følgende proces: $p + p \rightarrow p + p + \pi^+ + \pi^- + \pi^0$.

- Redegør for at processen tilfredsstiller de tre bevarelseslove for kvantetal.
- Bestem *tærskelenergien*, dvs. den mindste kinetiske energi, den accelererede proton skal have, for at partiklerne på højre side kan skabes. Prøv både at løse opgaven med formel (12) samt den mere generelle måde, som omtalt i boksen side 10.

Opgave 6

LEP ved CERN kan få en elektron og en positron til at kollideres, hvorved der skabes forskellige partikler: $e^+ + e^- \rightarrow p + \bar{p} + \pi^+ + \pi^- + \pi^0$. Det oplyses, at partiklerne støder sammen med impuls-vektorer, der har samme størrelser men er modsat rettede i LAB.

- Redegør for at processen tilfredsstiller de tre bevarelseslove for kvantetal.
- Bestem størrelserne af den impuls, som elektronen og positronen mindst skal have for at reaktionen kan foregå. *Hjælp:* Du kan ikke bruge formel (12), da den kræver et target, som er i hvile, men du kan benytte den invariante masse, som omtalt i boksen side 10. Bemærk i øvrigt kommentaren i boksen side 13.
- Hvor stor fart har elektronen og positronen da?

Opgave 7 (Anti-myon-henfald)

Betragt henfaldet $\mu^+ \rightarrow e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu$.

- Redegør for at processen tilfredsstiller de tre bevarelseslove for kvantetal.
- Hvilken type vekselvirkning er der tale om?
- Bestem processens Q -værdi.

Opgave 8

Betragt henfaldsprocessen $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$.

- Redegør for at processen tilfredsstiller de tre bevarelseslove for kvantetal.
- Hvilken type vekselvirkning er der tale om?
- Bestem bølgelængden af hver af de to gammakvanter, idet det oplyses, at pi nul mesonen ligger stille før henfaldet.

Opgave 9

Forklar hvorfor nedenstående to processer *ikke* kan forekomme?

- $n + p \rightarrow n + p + \bar{n}$
- $\pi^0 \rightarrow \mu^- + e^+ + \bar{\nu}_e$

Opgave 10

Betragt henfaldet $\Delta^- \rightarrow n + \pi^-$.

- Redegør for at processen tilfredsstiller de tre bevarelseslove for kvantetal. Opskriv desuden kvarksammensætningerne.
- Hvilken type vekselvirkning er der tale om?
- Hvor stor er den totale kinetiske energi af henfaldsprodukterne, hvis Delta minus partiklen er i hvile før henfaldet?

Opgave 11 (Annihilation)

En proton og en antiproton annihilerer og danner to fotoner: $p + \bar{p} \rightarrow \gamma + \gamma$. Reaktionen foregår ved en frontal kollision, hvor proton og antiproton hver har en kinetisk energi på 830 MeV. Beregn bølgelængden af hver foton efter reaktionen.

Opgave 12 (Kaon produktion)

Betragt processen $p + p \rightarrow p + p + K^- + K^+$, hvor en proton skydes ind mod en anden proton i hvile i laboratoriet og skaber nye partikler i form af *kaoner*.

- Bestem *tærskelenergien*, dvs. den mindste kinetiske energi, den accelererede proton skal have, for at processen ovenfor kan forløbe.
- Hvor stor er denne tærskelenergi i forhold til den samlede energi for de to kaoner?

Antag nu, at man lader protonerne kolliderende med hastigheder, der har samme størrelse, men er modsat rettede.

- Hvad er tærskelenergien her?
- Sammenlign resultaterne fra a) og c). Hvilken metode kan anbefales, hvis man vil minimere energien: Faste targets eller kolliderende partikler?

Opgave 13 (Den omvendte Lorentz-transformation)

Lorentz-transformationen nævnt side 21 angiver, hvordan man transformerer koordinater fra systemet S til systemet S' , som bevæger sig med farten v i forhold til S . Den omvendte Lorentz-transformation fortæller, hvordan man transformerer den anden vej. Vis, at den omvendte Lorentz-transformation er givet ved:

Den omvendte Lorentz-transformation

$$x = \gamma \cdot (x' + v \cdot t')$$

$$y = y'$$

$$z = z'$$

$$t = \gamma \cdot (t' + v \cdot x' / c^2)$$

Hjælp: Overvej hvorfor man kan få den ønskede transformation ved at udskifte v med $-v$ i Lorentz-transformationen og ombytte størrelserne med mærker og dem uden.

Opgave 14 (Tidsforlængelse og længdeforkortning – via Lorentz-transformationen)

Formlerne for tidsforlængelsen og længdeforkortningen kan forholdsvis nemt udledes ud fra Lorentz-transformationen side 21. Prøv at gøre det.

Hjælp: a) (Tidsforlængelsen). Antag at to begivenheder foregår til tidspunkterne t'_1 og t'_2 i det *samme* punkt x i systemet S' . Du skal transformere tiderne tilbage til systemet S . Det er altså den omvendte Lorentz-transformation, du skal bruge – se opgave 13. Egentiden er $\Delta\tau = t'_2 - t'_1$, og du skal kigge på $\Delta t = t_2 - t_1$. b) (Længdeforkortningen). Antag genstanden ligger stille i S' . Den målte længde i S er da $\Delta l = x_2 - x_1$, hvor x_1 og x_2 er endepunkterne for genstanden til et *fast* tidspunkt t i S . Hvilelængden er $\Delta l_0 = x'_2 - x'_1$. Brug Lorentz-transformationen.

Opgave 15 (Mere om myoner i atmosfæren)

Som nævnt i eksemplet side 32 kan relativitetsteorien forklare, hvorfor myonerne gennemsnitligt når så langt i atmosfæren som tilfældet er, før de henfalder.

- Det nævnes i eksemplet, at myonerne skabes ved henfald af pi-mesoner. Benyt Databogen til at finde ud af, hvilke processer der er tale om – både hvordan μ^+ og μ^- skabes.
- Som nævnt tidligere henfalder myonerne også. Hvilke henfaldsprocesser er der tale om? Godtgør, at processerne adlyder de tre bevarelseslove for kvantetal.
- En konkret myon har hastigheden $0,998c$. Bestem for langt en gennemsnitlig myon med denne hastighed når i atmosfæren, før den ”dør” ved et henfald. Vi ser bort fra, at myonen taber energi under dens rejse.
- Hvor stor er myonens (samlede) energi?

Opgave 16 (Middellevetid)

(Svær opgave). Ifølge formelsamlingen i fysik er sammenhængen mellem halveringstiden og *middellevetiden* (undertiden blot kaldet *levetiden*) for en partikel i et henfald givet ved formlen $T_{\text{leve}} = T_{1/2} / \ln(2)$. Du skal forsøge at udlede denne formel.

Hjælp: Husk at antallet af partikler ifølge *henfaldsloven* henfalder eksponentielt med tiden. Lav en skitse af grafen for en aftagende eksponentiel funktion og forsøg at få idéer. Hvad betyder $T_{1/2}$ og hvad betyder T_{leve} i denne sammenhæng?

Opgave 17 (Relativitetsteori)

Denne opgave indeholder en række arbejdsspørgsmål, som kan være nyttige ved gennemgangen af Appendiks A side 20-34.

- Hvad er æteren for noget?
- Hvad er et inertialsystem?
- Hvorfor strider Einsteins postulat 2 side 20 mod vores almindelige ”klassiske” måde at tænke på? Giv gerne et eksempel.
- Gennemgå argumenterne i Einsteins tog-paradoks. Forklar herunder evt. med en figur, hvad definitionen af begrebet *samtidighed* side 22 egentlig betyder. Hvorfor er Lise og Poul uenige om, om lynene er slået ned samtidigt?
- Hvordan fungerer Feynmans lysur beskrevet side 24? Hvordan kan det måle tiden?
- Hvad er *egentid* for noget? (side 26).
- Giv eksempler på steder i teksten, hvor *relativitetsprincippet* er anvendt. Hvorfor kommer det ikke til anvendelse i tilfældet med *tvillingeparadokset*?
- Gennemgå argumenterne for fænomenet med *længdeforkortning*. Hvordan kan man måle længden af en genstand, som bevæger sig?
- Hvad er det tilsyneladende paradoks i *stigeproblemet* side 30-31?
- Hvorfor skal relativitetsteorien til for at kunne forklare de eksperimentelle observationer af myoner på Jordens overflade?

- k) Benyt metoden linet op i afsnittet om myoner side 32-33 til at regne på et eksempel: En myon med energien 2,0 GeV skabes et sted 12 km over jordoverfladen og bevæger sig uden tab direkte ned mod Jorden. Vil muonen nå jordoverfladen, hvis den lever i et tidsrum svarende til middellevetiden for en muon? Hvor stor en del af de muoner, der har samme afstand og energi som ovennævnte, vil nå ned til jordoverfladen, før de henfalder?

Opgave 18 (CMS og dets egenskaber)

I det følgende skal vi kigge på massemidtpunktsystemet rent teoretisk og det i en klassisk, ikke-relativistisk ramme. Lad os sige, at vi har givet N partikler, hvor den i 'te partikel har masse m_i og stedvektor \vec{r}_i . Eftersom partiklen bevæger sig, er stedvektoren en vektorfunktion af tiden: $\vec{r}_i = \vec{r}_i(t)$. Partikelsystemets samlede masse er givet ved udtrykket $M = m_1 + m_2 + \dots + m_N$. Massemidtpunktet af de N partikler er givet ved:

$$(41) \quad \vec{r}_{CMS} = \frac{1}{M} \cdot \sum_{i=1}^N m_i \cdot \vec{r}_i$$

altså det *vejede gennemsnit* af partiklernes stedvektorer, med masserne som *vægte*. Den i 'te partikels hastighed og impuls betegner vi med henholdsvis \vec{v}_i og $\vec{p}_i = m_i \cdot \vec{v}_i$. Partikelsystemets samlede impuls \vec{P} er givet ved:

$$(42) \quad \vec{P} = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i$$

- a) Vis, ved at differentiere, at hastigheden af massemidtpunktet fås ved udtrykket:

$$(42) \quad \vec{v}_{CMS} = \frac{1}{M} \cdot \sum_{i=1}^N m_i \cdot \vec{v}_i$$

- b) Vis at hvis man forestiller sig al massen samlet i én partikel i massemidtpunktet, så vil denne partikels impuls være lig med partikelsystemets samlede impuls:

$$(43) \quad \vec{P} = M \cdot \vec{v}_{CMS}$$

Hvis vi differentierer den samlede impuls, får vi følgende:

$$(44) \quad \vec{P}' = \sum_{i=1}^N m_i \cdot \vec{v}_i' = \sum_{i=1}^N m_i \cdot \vec{a}_i = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i = \sum_j \vec{F}_{j,indre} + \sum_{i=1}^N F_{i,ydre} = \sum_{i=1}^N F_{i,ydre}$$

hvor kraften på hver partikel er delt op i en ydre kraft, som stammer fra objekter udenfor systemet, og i indre kræfter, som skyldes vekselvirkning med partiklerne indenfor systemet. Det kan for eksempel være sammenstød. Hvis et system af partikler ikke er påvirket af ydre kræfter, kaldes systemet *isoleret*. Bemærk, at summen af alle de indre kræfter er nulvektor på grund af Newtons 3. lov om *aktion og reaktion*: Hvis én partikel A påvirker en partikel B med en kraft, så påvirker partikel B også partikel A – nemlig med en kraft, der er lige så stor og modsat rettet førstnævnte.

- c) Benyt (43) og (44) til at vise at der gælder følgende for et partikelsystem:

$$(45) \quad M \cdot \vec{a}_{CMS} = \sum_{i=1}^N F_{i,ydre}$$

- d) Benyt c) til at argumentere for, at *den samlede impuls er konstant i et isoleret partikelsystem*.
- e) Argumenter for, hvorfor massemidtpunktet altid bevæger sig med konstant hastighed i et isoleret system.
- f) Vi kigger nu på partiklerne i massemidpunktsystemet (CMS). Som systemets begyndelsepunkt (origo) vælges massemidpunktet. Argumenter for, hvorfor stedvektoren til den i 'te partikel i CMS er givet ved: $\vec{r}_{i,CMS} = \vec{r}_i - \vec{r}_{CMS}$.
- g) Vis at den samlede impuls i CMS er nulvektoren.
Hjælp: Vis først at $\vec{v}_{i,CMS} = \vec{v}_i - \vec{v}_{CMS}$.

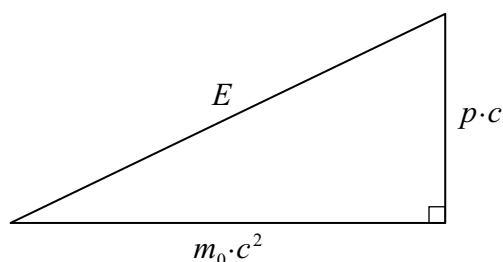
Det følger ret nemt af g), at massemidpunktssystemet også kan karakteriseres derved, at det er det entydigt bestemte system, hvor den samlede impuls er nulvektor. Bemærk, at e) sikrer, at CMS er et inertialsystem! Mærkeligt nok kan begrebet massemidpunkt ikke på nogen hensigtsmæssig måde defineres i relativitetsteorien. Derimod giver det fint mening i relativitetsteorien at tale om det system, hvor den samlede impuls er nulvektor. Det er det system vi vil kalde CMS i relativitetsteorien. Nogle gange ser man betegnelsen *zero-momentum frame* på engelsk – systemet med nul impuls. Det vil føre for vidt her at gå i detaljer med, hvordan det gøres i relativitetsteorien.

Opgave 19 (Energi-impuls-relasjonen)

Vi skal i denne opgave se på den meget vigtige relation mellem en partikels totale energi og dens impuls, som bliver benyttet så meget af partikelfysikere. Den er postuleret i (2) side 7, hvilket lettere omskrevet er det samme som:

$$(46) \quad E^2 = (m_0 \cdot c^2)^2 + (p \cdot c)^2$$

Den kan huskes som en slags Pythagoras, uden at der er noget, der skal overfortolkes:



Den relativistiske impuls for en partikel i et inertial-system S er *ikke* defineret ved udtrykket $\vec{p} = m_0 \cdot \vec{v}$, hvor \vec{v} er partiklens hastighedsvektor i S . En sådan definition viser sig at give en modstrid med relativitetsteoriens postulater, hvis man samtidigt vil fastholde definitionen af kraft ved $\vec{F} = d\vec{p}/dt$. Vi skal ikke gå i detaljer hermed. Den interesserede læser kan fx læse side 189 og fremefter i [5]. Derimod viser følgende definition sig at være meningsfuld og fornuftig:

$$(47) \quad \vec{p} = \gamma \cdot m_0 \cdot \vec{v}$$

Med denne definition kan vi også bevare ønsket om, at hvis der er *impulsbevarelse* i et system, så er der det også i ethvert andet inertial-system. Igen udelades detaljer. På tilsvarende måde kan man på fornuftig vis definere den *totale energi* eller bare *energi* E for en partikel ved følgende udtryk:

$$(48) \quad E = \gamma \cdot m_0 \cdot c^2$$

Vi er nu klar til opgaven:

- a) Vis at relationen (46) er rigtig ved at indsætte definitionerne af E og \vec{p} fra henh. (48) og (47) i ligningen.

Hjælp: Husk at vi kalder $|\vec{p}|$ for p og $|\vec{v}|$ for v . Dermed haves $p = \gamma \cdot m_0 \cdot v$. Indsæt udtrykkene for E og p i $E^2 - p^2 \cdot c^2$ og vis, at det giver $m_0^2 \cdot c^4$ som ønsket. Du skal her naturligvis udnytte definitionen (9) af γ .

NB! Det skal lige bemærkes, at man kan vise, at definitionen af \vec{p} i (47) desuden har den ønskværdige egenskab, at når farten v af partiklen går mod 0, så vil udtrykket for den relativistiske impulsvektor nærme sig til udtrykket for den klassiske impulsvektor! Grænseværdien for totalenergien har også gode fortolkninger, når $v \rightarrow 0$.

Opgave 20 (Energi-impuls-relasjonen i Minkowskis rum-tid)

Den tyske matematiker *Hermann Minkowski* indså, at relativitetsteorien med fordel kunne betragtes i et 4-dimensionalt rum, hvor den ene koordinat er tiden og de tre øvrige er rum-koordinaterne. Derfor bærer dette rum navnet *Minkowski rum-tid* (på engelsk er det *space-time*). I denne opgave skal vi kigge på energi-impuls-relasjonen i denne matematiske ramme. Der er lidt forskellige versioner i litteraturen. Vi vedtager at lade første koordinat indeholde tiden. Et punkt i rummet er da på formen $(c \cdot t, x, y, z)$. Af symmetriårsager er det valgt at gange konstanten givet ved lysets hastighed på tiden, så man får samme enhed som de øvrige koordinater, dvs. en længdeenhed. Punktet betegnes også en *begivenhed* - noget der skete til tiden t i det rumlige punkt (x, y, z) . Af udtrykket for Lorentz-transformationen side 21 har vi umiddelbart, at denne begivenhed i et andet inertial-system S' , som bevæger sig med farten v i x -aksens positive retning, er givet ved koordinaterne $(c \cdot t', x', y', z')$ i S' . Transformationen kan beskrives ved enten de fire koordinatudtryk nedenfor til venstre, eller ved hjælp matricen til højre. Husk betydningerne af γ og β side 21.

$\begin{aligned} c \cdot t' &= \gamma \cdot (c \cdot t - \beta \cdot x) \\ x' &= \gamma \cdot (x - \beta \cdot c \cdot t) \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned}$	$\begin{pmatrix} c \cdot t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta \cdot \gamma & 0 & 0 \\ -\beta \cdot \gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \cdot t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$
--	--

Lad os for simpelhed skyld kalde rum-tid begivenheden $(c \cdot t, x, y, z)$ i S for X og analogt med X' . Lorentz-transformationen betegner vi L_v . Dermed har vi: $X' = L_v(X)$.

Vi indfører nu begrebet *fire-vektor* eller 4-vektor.

Fire-vektor

En 4-vektor er specificeret ved, at der i ethvert inertial-system er givet et tuppel af fire tal $A = (A_0, A_1, A_2, A_3)$ samt at værdierne A og A' i to givne inertial-systemer S og S' har sammenhængen $A' = L_v(A)$, hvor L_v er den Lorentz-transformation, som forbinder S og S' .

Vi har da umiddelbart, at $X = (c \cdot t, x, y, z)$ er en 4-vektor, da den naturligvis transformerer efter Lorentz-transformationen! Vi skal også kigge på skalarer (tal):

Fire-skalar

Enhver størrelse (tal), som er invariant under Lorentz-transformationerne betegnes en *fire-skalar*, en *4-skalar* eller en *Lorentz-skalar*.

Endelig skal vi definere Minkowskis skalarprodukt eller indre produkt:

Minkowskis skalarprodukt

For to vilkårlige 4-vektorer $A = (A_0, A_1, A_2, A_3)$ og $B = (B_0, B_1, B_2, B_3)$ defineres skalarproduktet mellem dem ved: $A \cdot B = A_0 \cdot B_0 - A_1 \cdot B_1 - A_2 \cdot B_2 - A_3 \cdot B_3$

Der er ikke tale om et helt almindeligt skalarprodukt, idet dette ikke er *positiv-definit*. Tager man Minkowski skalarproduktet med 4-vektoren selv, så kan man både for et positivt eller negativt tal, eller et resultat, som giver 0.

- a) Vis at summen $A + B = (A_0 + B_0, A_1 + B_1, A_2 + B_2, A_3 + B_3)$ af de to 4-vektorer $A = (A_0, A_1, A_2, A_3)$ og $B = (B_0, B_1, B_2, B_3)$ igen er en 4-vektor.

Hjælp: Hvad er det for en egenskab ved Lorentz-transformationen, du har brug for her for vise egenskaben?

- b) Vis at hvis s er en 4-skalar og $A = (A_0, A_1, A_2, A_3)$ en 4-vektor, så er $s \cdot A$ givet ved $(s \cdot A_0, s \cdot A_1, s \cdot A_2, s \cdot A_3)$ også en 4-vektor.
- c) Givet to begivenheder $X_1 = (c \cdot t_1, x_1, y_1, z_1)$ og $X_2 = (c \cdot t_2, x_2, y_2, z_2)$ i rum-tid og lad $\Delta t = t_2 - t_1$, $\Delta x = x_2 - x_1$, $\Delta y = y_2 - y_1$ og $\Delta z = z_2 - z_1$. Vis hvorfor *4-intervallet* givet ved $\Delta X = (c \cdot \Delta t, \Delta x, \Delta y, \Delta z)$ da også er en 4-vektor.
- d) Givet to 4-vektorer A og B . Vis at Minkowski skalarproduktet $A \cdot B$ er en 4-skalar, dvs. er et tal, som er invariant under Lorentz-transformationerne. Du kan nøjes med

at vise det for standard Lorentz-transformationerne, hvor det ene systems x' -akse bevæger sig ud af x -aksen af det andet system*. Altså vis $L_v(A) \cdot L_v(B) = A \cdot B$.

Man kan vise, at hastigheder ikke transformerer efter Lorentz-transformationen, så der er altså *ikke* noget håb for at definere 4-hastigheden ved noget på formen:

$$(49) \quad \left(?, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right)$$

Vi kan forstå problemet, hvis vi gør en lille overvejelse: dx/dt er egentlig en grænseværdi af $\Delta x/\Delta t$ for $\Delta t \rightarrow 0$. Differenskvotienten har imidlertid i nævneren en størrelse, som ikke er en 4-skalar. Tiden er som bekendt bestemt ikke invariant under Lorentz-transformationen! Man kan reparere (49) ved at vælge *hviletiden* τ i stedet for tiden t . Idet vi bruger tidsforlængelsen $dt = \gamma \cdot d\tau$ fra side 25, viser det sig, at vi får den ønskede 4-hastighed:

$$(50) \quad \begin{aligned} U &= \left(c \cdot \frac{dt}{d\tau}, \frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau}, \frac{dz}{d\tau} \right) = \left(c \cdot \frac{dt}{d\tau}, \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dt}{d\tau}, \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{d\tau}, \frac{dz}{dt} \cdot \frac{dt}{d\tau} \right) \\ &= \left(\gamma \cdot c, \gamma \cdot \frac{dx}{dt}, \gamma \cdot \frac{dy}{dt}, \gamma \cdot \frac{dz}{dt} \right) = \gamma \cdot \left(c, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right) = \gamma \cdot (c, \vec{v}) \end{aligned}$$

hvor \vec{v} er den rumlige hastighedsvektor. Vi er nu klar til 4-impulsen. I forlængelsen af 4-hastigheden er det da nærliggende at tro, at man kan få 4-impulsen ved at gange hvilemassen m_0 på 4-hastigheden, eftersom hvilemassen er en 4-skalar. Det er da også netop det man får:

$$(51) \quad P = m_0 \cdot U = \gamma \cdot m_0 \cdot (c, \vec{v}) = (\gamma \cdot m_0 \cdot c, \gamma \cdot m_0 \cdot \vec{v}) = \left(\frac{E}{c}, \vec{p} \right)$$

idet vi har benyttet formlerne (47) og (48) for henholdsvis den relativistiske impulsvektor \vec{p} og den totale energi E .

- e) Udregn Minkowski skalarproduktet $P \cdot P$ og benyt det til at vise den vigtige energi-impuls-relation $E^2 = (m_0 \cdot c^2)^2 + (p \cdot c)^2$.

Hjælp: Husk at $P \cdot P$ er en 4-skalar og at størrelsen derfor er invariant under Lorentz-transformationen. Hvis du bare kan finde værdien i et inertialsystem, så har du det i alle! Udregn $P \cdot P$ i det system, som følger med partiklen.

- f) Overvej hvorfor udtrykket for 4-impulsen fra (51) godtgør, at hvis der er impulsbevarelse i ét inertialsystem, så er der i alle.

*) Der findes naturligvis også inertialsystemer, hvor det ene systems x' -akse *ikke* bevæger sig ud af x -aksen i forhold til det andet system. Det giver anledning til Lorentz-transformationer, som ser lidt grimmere ud. Der er en rotation indbefattet. De kan dog håndteres også. Vi ser bort fra dem her.

Litteratur

- [1] Michael Cramer Andersen, Henrik Peter Bang, Katrine Facius og Rasmus Møller. *Universets byggesten – moderne partikelfysik*. Fysikforlaget, 2012.
- [2] Steve Adams. *Relativity – An introduction to space-time physics*. Taylor & Francis Ltd., 1997.
- [3] Ralph Baierlein. *Newton to Einstein – The trail of light*. Cambridge University Press, 1992.
- [4] Mogens Dam. *Introduktion til den specielle relativitetsteori*. Niels Bohr Instituttet, 7. udgave, 2007.
- [5] Ole Knudsen og Olaf Pedersen. *Lærebog i mekanik, 2. del*. Akademisk Forlag, 1972.
- [6] John R. Taylor. *Classical Mechanics*. University Science Books, 2005.