Lorentz kraften og dens betydning

I dette tillæg skal vi se, at der virker en kraft på en ladning, der bevæger sig i et magnetfelt, og vi skal se på betydninger heraf. Før vi gør det, skal vi dog kigge på begrebet *krydsprodukt* fra matematikken.

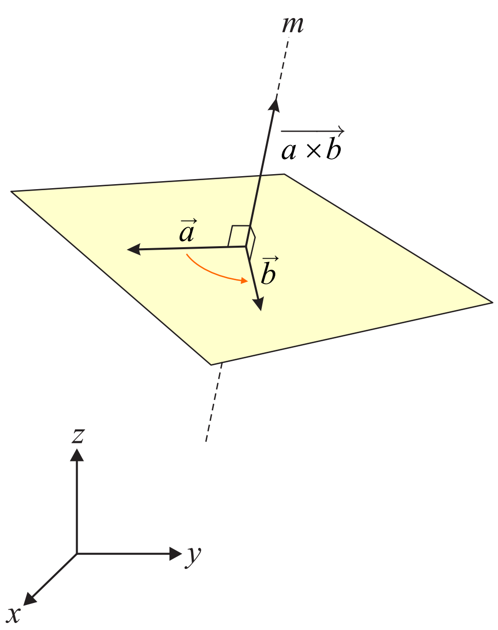
Krydsproduktet

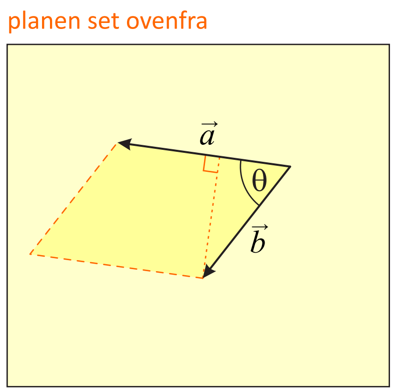
Lad $\vec{a}$ og $\vec{b}$ være to vektorer i rummet. Da kan man definere det såkaldte krydsprodukt $\vec{a} \times \vec{b}$ mellem de to vektorer. Krydsproduktet er en ny vektor med følgende egenskaber: Hvis en af vektorerne er nulvektoren, eller hvis $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er parallelle, så er $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$. I alle andre tilfælde gælder følgende:

1) $\vec{a} \times \vec{b}$ står vinkelret på såvel $\vec{a}$ som $\vec{b}$. Vi skriver: $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a}$ og $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{b}$.

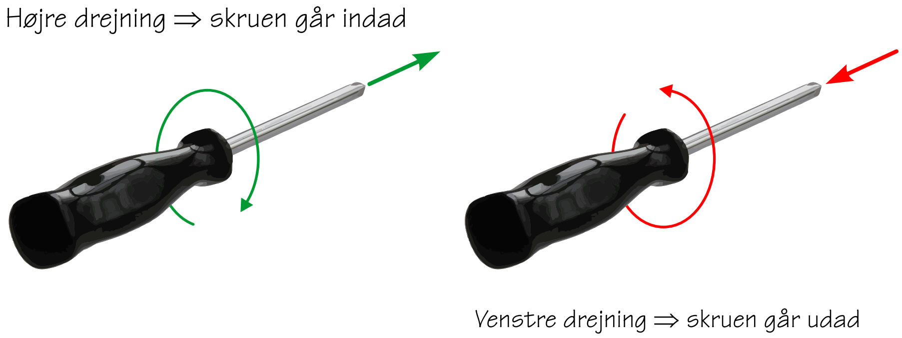
2) Retningen af $\vec{a} \times \vec{b}$ er sådan, at $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b})$ er et *højresystem*.

3) Længden af $\vec{a} \times \vec{b}$ er lig med arealet af det parallelogram, som vektorerne $\vec{a}$ og $\vec{b}$ udspænder. Hvis θ er vinklen mellem de to oprindelige vektorer, så har vi altså: $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\theta)$.

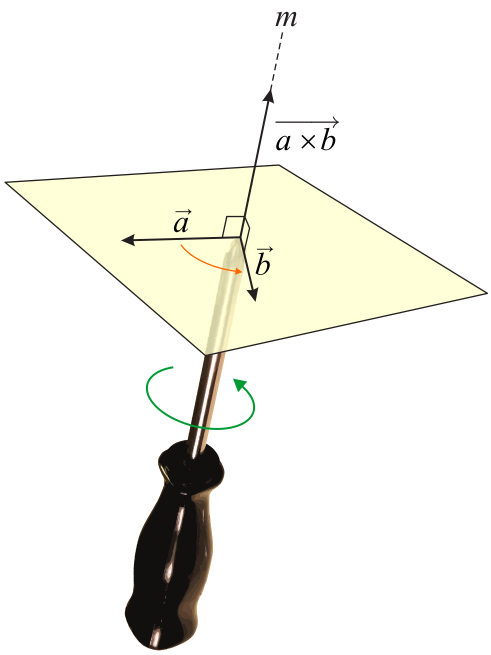




Kommentarer: Antag at $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er to egentlige, ikke-parallelle vektorer. Da har krydsproduktvektoren ifølge 3) en bestemt positiv længde. De to vektorer udspænder en plan og krydsproduktvektoren skal stå vinkelret på denne plan. Der er kun to muligheder for en vektor, der skal opfylde 1) og 3), da vektoren skal være parallel med linjen m : Enten skal vektoren pege den ene vej eller den modsatte vej. Ifølge betingelsen 2) skal vi vælge den, der gør $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b})$ til et højresystem. I praksis kan man afgøre hvilken vej vektoren skal vende ved at tænke på hvordan man skruer en skrue i med en skruetrækker! Hvis man drejer højre om (med uret), så går skruen indad. Hvis man derimod drejer venstre om (mod uret), så skruer man skruen udad.



Kig på figuren i boksen på forrige side: Vektoren $\vec{a}$ skal drejes om imod vektoren $\vec{b}$. Hvis vi forestiller os, at vi skruer "under planen", så ser det ud som på figuren nedenfor. Vi drejer højre om for at få $\vec{a}$ ført over til $\vec{b}$. Det betyder at skruen går indad, dvs. krydsproduktvektoren vender i skruetrækkerens retning. Man kan i øvrigt også vælge at skrue fra den anden side, og det vil give samme resultat!



Vi skal nu tilbage til fysikken.

Lorentz kraften

En ladning q, der bevæger sig med hastigheden $\vec{v}$ i et magnetfelt $\vec{B}$ vil være påvirket af en kraft givet ved følgende udtryk:

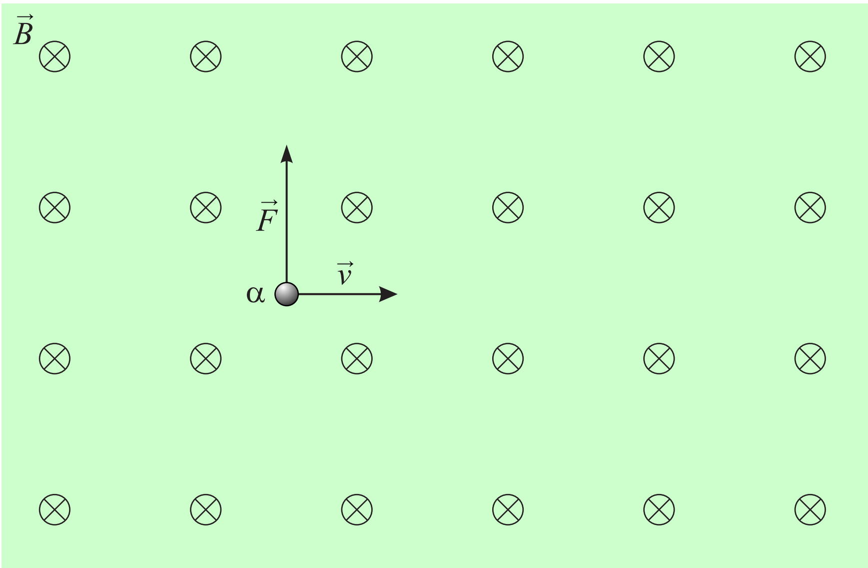
(1) $$\vec{F} = q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$$

Det er vigtigt at bemærke, at denne sammenhæng *ikke* kan udledes teoretisk, men er konstateret ved talrige eksperimenter.

Eksempel 1

En alfapartikel fra en radioaktiv kilde bliver sendt ind i et homogent magnetfelt med feltstyrken $B = 400\ \text{mT}$. Partiklens hastighed er vinkelret på magnetfeltet. I magnetfeltet foretager partiklen en jævn cirkelbevægelse med radius 78,7 cm. En alfapartikel er en heliumkerne, og den vides at have en masse på $6{,}64 \cdot 10^{-27}\ \text{kg}$.

a) Bestem alfapartiklens fart.
b) Bestem størrelsen af den kraft magnetfeltet påvirker alfapartiklen med.
c) Bestem alfapartiklens energi i elektronvolt.



Løsning:

a) Da kernen har mistet to elektroner i forhold til heliumatomet, er dens ladning $+2e$. Ifølge figuren er magnetfeltet rettet ind i papiret. Hastigheden er rettet mod højre. Vektorproduktet $\vec{v} \times \vec{B}$ skal stå vinkelret på både $\vec{v}$ og $\vec{B}$, så krydsproduktvektoren må her være parallel med en lodret linje. For at se, om vektoren vender opad eller nedad, bruger vi teknikken med skruen: Når vi nedefra drejer $\vec{v}$ over mod $\vec{B}$, drejer vi *højre* om. Dermed skruer vi opad, hvilket betyder at $\vec{v} \times \vec{B}$ er rettet opad! Da alfapartiklen har en positiv ladning $q = 2e$, slutter vi, at kraften $\vec{F} = q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$ ligeledes vender opad. Størrelsen af vektoren fås af formlen $F = |q| \cdot v \cdot B \cdot \sin(\theta)$, hvor θ er vinklen mellem $\vec{v}$ og $\vec{B}$. Vinklen er her 90°, så $F = |q| \cdot v \cdot B = 2e \cdot v \cdot B$. Vi har altså en kraft, som hele tiden er vinkelret på hastigheden. Det er samme situation man har ved en jævn cirkelbevægelse. Det er da også en jævn cirkelbevægelse alfapartiklen ender med at foretage. Vi har tidligere set, at accelerationen i en generel jævn cirkelbevægelse er givet ved $F = m \cdot v^2 / r$, hvor r er radius i cirklen. Hvis vi sætter de to udtryk for kraften lig med hinanden, får vi:

$$(2) \qquad |q| \cdot v \cdot B = m \cdot \frac{v^2}{r} \quad \Leftrightarrow \quad v = \frac{|q| \cdot B \cdot r}{m}$$

Med talværdier indsat fås:

$$v \;=\; \frac{2e\cdot B\cdot r}{m} \;=\; \frac{2\cdot 1,602\cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}\cdot 0,400\cdot 0,787\,\mathrm{m}}{6,64\cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}} \;=\; 1,52\cdot 10^{8}\,\mathrm{m/s} \;\approx\; 0{,}051\cdot c$$

Så hastigheden er altså omtrent 5% af lysets hastighed. Bemærk, at vi har tilladt os ikke at regne *relativistisk*, da hastigheden er under 10% af lyshastigheden.

b) Kraften på alfapartiklen fås ved at benytte en formel nævnt ovenfor:

$$F \;=\; 2e\cdot v\cdot B \;=\; 2\cdot 1,602\cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}\cdot 1,52\cdot 10^{7}\,\mathrm{m/s}\cdot 0,400\,\mathrm{T} \;=\; 1,95\cdot 10^{-12}\,\mathrm{N}$$

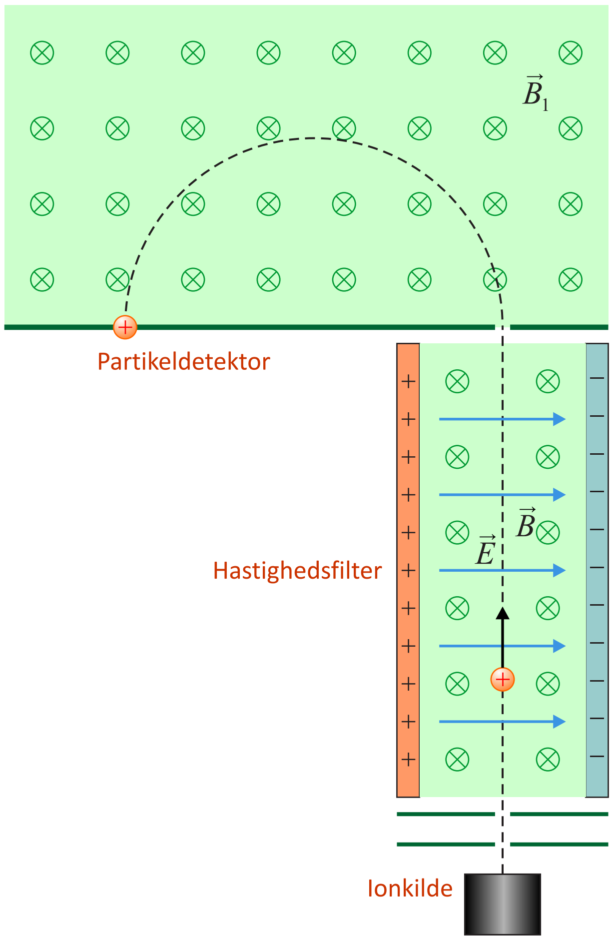
c) Da farten ikke er for høj, kan vi igen regne klassisk:

$$E \;=\; \tfrac{1}{2}\cdot m\cdot v^2 \;=\; \tfrac{1}{2}\cdot 6,64\cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}\cdot(1,52\cdot 10^{7}\,\mathrm{m/s})^2 \;=\; 7,66\cdot 10^{-13}\,\mathrm{J} \;=\; 4,78\,\mathrm{MeV}$$

NB! Vi har i opgaven set bort fra tyngdekraften på alfapartiklen, da den er mange størrelsesordner mindre end kraften forårsaget af magnetfeltet.

Eksempel 2

Inspireret af J. J. Thompsons berømte *e/m*-eksperiment, blev der udviklet forskellige apparater til bestemmelse af ioners masser og dermed også atommasser. Nedenfor er idéen i Bainbridges *massespektrometer* afbildet.



En tynd stråle af ioner sendes ind i et kombineret elektrisk felt og magnetfelt. Den positive ion på figuren vil være udsat for en Lorentz-kraft, der peger mod venstre af størrelsen $F = q \cdot v \cdot B$. Samtidig vil den være påvirket af en kraft fra det elektriske felt af størrelsen $F = q \cdot E$, pegende mod højre. De to kræfter udligner hinanden, hvis

$$q \cdot E = q \cdot v \cdot B \quad \Leftrightarrow \quad v = \frac{E}{B} \tag{3}$$

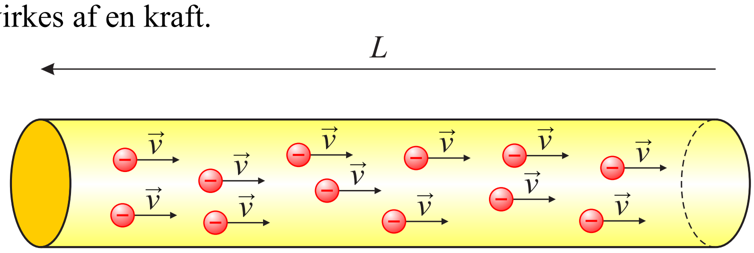
På den måde kan man styre ionernes hastighed. Kun de ioner, der har en hastighed som opfylder (3) vil gå igennem hullet foroven i hastighedsfilteret. De ioner, der når igennem, vil efterfølgende blive udsat for et nyt magnetfelt, hvorfor de vil foretage en cirkulær bevægelse. En detektor vil registrere ionen. Ud fra radius r af cirkelbanen og magnetfeltets feltstyrke B_1 kan massen bestemmes, da v kendes. Af (2) fås nemlig:

$$m = \frac{|q| \cdot B_1 \cdot r}{v} \tag{4}$$

□

Kraften på en strømførende leder i et magnetfelt

Vi skal kigge på en konsekvens af udtrykket for Lorentz-kraften i det følgende. Hvis vi anbringer en leder i et magnetfelt og sender en strøm igennem den, er det ikke overraskende, at hele lederen vil blive påvirket af en kraft, for vi har jo lige set, at ladninger i bevægelse påvirkes af en kraft.



Samlet ladning af frie elektroner i lederstykket: $-N \cdot e$

Lad os forestille os at der i et lige lederstykke af længden L befinder sig N frie elektroner, hver med ladningen $-e$. Den samlede ladning af frie elektroner i lederstykket er dermed $-N \cdot e$. Når der går en strøm i ledningen, vil elektronerne opnå en gennemsnitlig *drift hastighed*, som vi vil kalde v. Den er overraskende nok ikke ret stor. Det skyldes at de frie elektroner i lederen ustandselig kolliderer med massive ioner i ledermaterialet og derfor laver zig-zag bevægelser. Når der er strøm i ledningen, vil de frie elektroner trods alle disse kollisioner dog blive drevet fremad af det elektriske felt i ledningen. Lad Δt være det tidsrum, det tager for en fri elektron at tilbagelægge strækningen L. Dermed har vi $L = v \cdot \Delta t$. Lad os indføre vektoren $\vec{L}$: Dens længde skal være lig med L og dens retning skal være strømmens retning, altså modsat elektronerne! Dermed har vi

$$\vec{L} = -\Delta t \cdot \vec{v} \tag{5}$$

I løbet af tidsrummet Δt vil alle frie elektroner have tilbagelagt stykket L. Dermed vil netop alle de frie elektroner, der befinder sig i lederstykket passere ”bagenden” af lederstykket i løbet af tidsrummet Δt. Men strømstyrken i ledningen er lig med den ladning, der passerer et tværsnit af ledningen – for eksempel bagenden af lederstykket – pr. tidsenhed, så vi har dermed:

(6) $$I = \frac{N \cdot e}{\Delta t} \quad \Leftrightarrow \quad N \cdot e = I \cdot \Delta t$$

Det er klart, at vi kan lægge kræfter sammen, så når hver elektron bidrager med en Lorentz kraft på $-e \cdot \vec{v} \times \vec{B}$, så opnås en samlet kraft på $-N \cdot e \cdot \vec{v} \times \vec{B}$. Det kan omskrives ved først at udnytte (6) og derefter (5):

(7) $$\vec{F} = -N \cdot e \cdot \vec{v} \times \vec{B} = -I \cdot \Delta t \cdot \vec{v} \times \vec{B} = I \cdot \vec{L} \times \vec{B}$$

Vi har hermed udledt følgende:

En strømførende elektrisk leder, der befinder sig i et magnetfelt, er påvirket af en kraft givet ved følgende udtryk:

(8) $$\vec{F} = I \cdot \vec{L} \times \vec{B}$$

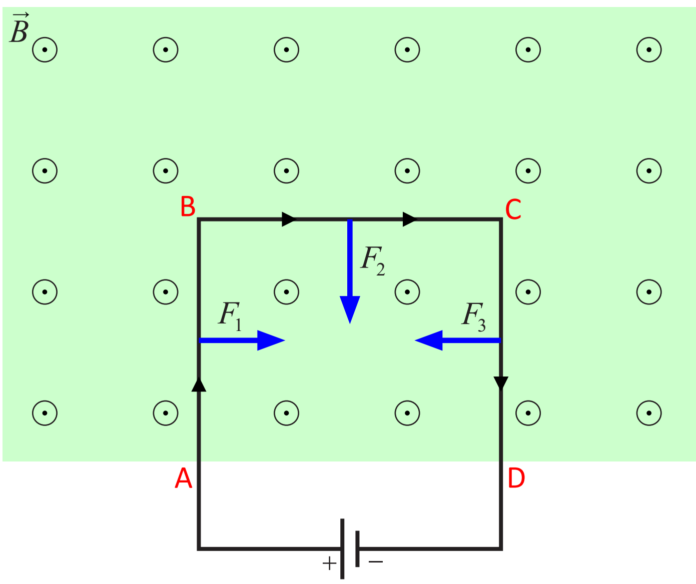
hvor I er strømstyrken, $\vec{B}$ magnetfeltet og $\vec{L}$ er en vektor, hvis længde er lig med lederens længde L og som er rettet i strømmens retning.

Af (8) fås specielt, at hvis ledningen danner vinklen θ med magnetfeltet, så er størrelsen af kraften givet ved

(9) $$F = B \cdot I \cdot L \cdot \sin(\theta)$$

Eksempel 3

Der sendes en strøm på 2,5 A igennem en strømkreds som afbildet nedenfor. En del af kredsen befinder sig i et magnetfelt med feltstyrken 200 mT. De stykker af lederen, der befinder sig inde i magnetfeltet er $|AB| = |CD| = 4\,\text{cm}$ og $|BC| = 5\,\text{cm}$. Bestem størrelsen og retningen af den kraft, der virker på hvert af de tre lederstykker.



Løsning: Lad os først betragte den kraft, som lederstykket AB er påvirket af. $\vec{L}$ er rettet i strømmens retning, der er angivet med en pil. Længden af vektoren er længden af lederstykket, dvs. 4 cm. $\vec{L}$ på figuren er rettet opad og $\vec{B}$ går ud af papiret: krydsproduktet $\vec{L} \times \vec{B}$ står vinkelret på begge vektorer og må derfor være vandret. Reglen med højreskruen godtgør, at kraften er rettet mod højre. Størrelsen af kraften findes ved hjælp af formel (9):

$$F_1 \;=\; B \cdot I \cdot L \cdot \sin(90°) \;=\; B \cdot I \cdot L \;=\; 200\,\mathrm{mT} \cdot 2{,}5\,\mathrm{A} \cdot 0{,}04\,\mathrm{m} \;=\; 0{,}020\,\mathrm{N}$$

På tilsvarende vis fås at $F_2 = 0{,}025\,\mathrm{N}$ og $F_3 = 0{,}020\,\mathrm{N}$. Retningerne af den anden og tredje kraft er angivet på figuren. Bemærk, at $\vec{F}_1$ og $\vec{F}_3$ er lige store og modsat rettede. Hvis man forestiller sig, at strømkredsen sidder fast på en plade, så vil de sidstnævnte kræfter udligne hinanden og $\vec{F}_2$ vil være den resulterende kraft.

□